

パラメタを含む代数的局所コホモロジー類 の満たす偏微分方程式系

渋田敬史

TAKAFUMI SHIBUTA

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

INSTITUTE OF MATHEMATICS FOR INDUSTRY, KYUSHU UNIVERSITY*

田島 慎一

SHINICHI TAJIMA

筑波大学大学院数理物質科学系・数学域

GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA†

$\mathbb{C}^n$ の座標を $x = (x_1, \dots, x_n)$ とし, 原点 O の近傍 X 上正則で, 原点 O を孤立特異点として持つ関数 $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_{X,O}$ を取る. $\mathcal{D}_{X,O} = \mathcal{O}_{X,O} \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle$ を X 上の線形偏微分作用素全体のなす層 $\mathcal{D}_X$ の原点における茎とする. イデアル $\mathcal{J}_f = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle \subset \mathcal{O}_{X,O}$ を f のヤコビイデアルと呼ぶ. 原点に台を持つ n 次代数的局所コホモロジー類であり, $\mathcal{J}_f$ で annihilate されるようなものの全体のなす集合を

$$\Omega_f = \{ \psi \in \mathcal{H}_{[O]}^n(\Omega_X^n) \mid \psi g = 0, \forall g \in \mathcal{J}_f \}$$

とおく. ここで,

$$\mathcal{H}_{[O]}^n(\Omega_X^n) \cong \mathbb{C}[x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}] \frac{dx}{x_1 \cdots x_n},$$

$dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ であり, 右 $\mathcal{D}_{X,O}$ 加群としての構造が $gdx \in \mathcal{H}_{[O]}^n(\Omega_X^n)$, $P \in \mathcal{D}_{X,O}$ に対し,

$$(gdx)P = (P^*g)dx$$

で定まっていることに注意する (ただし, P^* は P の形式的随伴作用素). f は孤立特異を持つので, Ω_f は長さ有限の $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群であり, $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群としては一つのもので生成される. 以下では, Ω_f の $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群としての生成元を一つ固定し, ω_f で表すこと

*e-mail: shibuta@imi.kyushu-u.ac.jp

†e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

にする。 $\mathcal{H}_{[0]}^n(\Omega_X^n)$ は右 $\mathcal{D}_{X,O}$ 加群であるので、 ω_f の $\mathcal{D}_{X,O}$ 加群としての annihilator ideal を考えることができる;

$$\text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f) = \{P \in \mathcal{D}_{X,O} \mid \omega_f P = 0\}.$$

$\mathcal{D}_{X,O}$ には階数に関するフィルトレーションが入っており、 $\mathcal{D}_{X,O}^{(k)} \subset \mathcal{D}_{X,O}$ を 階数 k 以下の偏微分作用素の集合とする。各自然数 k に対し、 $\mathcal{D}_{X,O}^{(k)} \cap \text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)$ で生成される右イデアルを $\text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(k)}(\omega_f)$ と表すことにする。任意の k に対し、 $\text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(k)}(\omega_f) \subset \text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(k+1)}(\omega_f)$ であり、十分大きい k に対して $\text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(k)}(\omega_f) = \text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)$ である。 $\text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(0)}(\omega_f)$ は $\mathcal{I}_f$ で生成されるイデアルであり、任意の k に対して $\text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(k)}(\omega_f)$ はホロノミックである。ホロノミック系 $\frac{\mathcal{D}_{X,O}}{\text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(k)}(\omega_f)}$ の重複度を $\mu_f^{(k)}$ で表すことにする。 $\mu_f^{(0)} \geq \mu_f^{(1)} \geq \mu_f^{(2)} \geq \dots$ が成り立ち、 $\mu_f^{(0)}$ は f のミルナー数であり、 $\text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(k)}(\omega_f) = \text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)$ となる k に対して $\mu_f^{(k)} = 1$ である。 $\mu_f^{(k)}$ と f の特異点との関係は、[4, 5, 6, 8, 11] で議論されている。

ヤコビイデアル $\mathcal{I}_f$ の標準基底を計算する手法として、 Ω_f の $\mathbb{C}$ -基底を計算し、多変数留数に関するグロタンディーク双対性を用いる手法が与えられている ([1, 2, 10, 9])。本稿ではこの手法を拡張し、双対性定理を用いて $\text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(k)}(\omega_f)$ を逐次的に計算する方法を与える。他の手法としては、問題をサイズの小さい問題に分割し、線形代数を用いて計算する方法が [3] で与えられている。

1 準備

1.1 Matlis dual

R をネター局所環、 E を R の剰余体の入射閉包とする。 R 加群 M に対し、 $M^\vee := \text{Hom}_R(M, E)$ を M の Matlis dual と呼ぶ。 $\ell_R(M) = \ell(M)$ を M の長さとする。 $R = \mathcal{O}_{X,O}$ のとき、 $E \cong \mathcal{H}_{[0]}^n(\Omega_X^n)$ で、 $\ell(M) = \dim_{\mathbb{C}} M$ である。自由 R 加群 $F = R^{\oplus r}$ の部分加群 $M \subset F$ を取ると、 $(F/M)^\vee \subset F^\vee = E^{\oplus r}$ より、 $(F/M)^\vee$ は $E^{\oplus r}$ の部分加群とみなせる。一方、 $E^{\oplus r}$ の部分 R 加群 $V \subset E^{\oplus r}$ で長さ有限のものを取ると、ある $M \subset F$ により $V^\vee \cong F/M$ となる。

命題 1. $M \subset F$, $V \subset E^{\oplus r}$ で、 $\ell(F/M) < \infty$, $\ell(V) < \infty$ を満たすものを取る。このとき、 $(F/M)^{\vee\vee} \cong F/M$, $V^{\vee\vee} \cong V$ が成り立つ。

命題 1 は Matlis 双対性定理の特別な場合である。命題 1 により、 $M \subset F$ を知るには、 $(F/M)^\vee$ が分かればよいことが分かる。自然なペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times F^\vee \rightarrow E$ 存在するが、 $f \in F$ に対し、 $f \in M$ であることと、 $\langle f, \eta \rangle = 0$ が任意の $\eta \in (F/M)^\vee$ に対して成り立つことが同値である。 $R = \mathcal{O}_{X,O}$ のとき、このペアリングは

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X,O}^{\oplus r} \times \mathcal{H}_{[0]}^n(\Omega_X^n)^{\oplus r} &\rightarrow \mathcal{H}_{[0]}^n(\Omega_X^n) \\ ((g_1, \dots, g_r), (\eta_1, \dots, \eta_r)) &\mapsto \sum_{i=1}^r g_i \eta_i \end{aligned}$$

となる. 自由 R 加群 F と長さ有限の R 加群 N , および R 準同型写像 $\varphi: F \rightarrow N$ が与えられたとき,

$$0 \rightarrow F/\text{Ker } \varphi \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow N/\varphi(F) \rightarrow 0$$

という短完全列を得る.

$$0 \leftarrow (F/\text{Ker } \varphi)^\vee \xleftarrow{\varphi^\vee} N^\vee \leftarrow (N/\varphi(F))^\vee \leftarrow 0$$

も完全なので, $(F/\text{Ker } \varphi)^\vee \cong \text{Image}(\varphi^\vee)$ である. よって, 写像の核の計算を, Matlis dual により写像の像の計算に置き換えることができる.

1.2 標準基底

単項式の集合 $\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n\}$ 上の全順序 $\prec$ が $\mathcal{O}_{X,O}$ の局所順序であるとは, 次の 2 つの条件を満たすときである.

- 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対し, $x^\alpha \prec 1$.
- 任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対し, $x^\alpha \prec x^\beta$ ならば, $x^{\alpha+\gamma} \prec x^{\beta+\gamma}$.

任意の単項式全体の集合 Λ と局所順序 $\prec$ に対し, Λ の $\prec$ に関する最大限が存在する. $g(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c_\alpha x^\alpha \in \mathcal{O}_{X,O}$ ($c_\alpha \in \mathbb{C}$) に対し, $\text{LT}_\prec(g) := \max_\prec \{x^\alpha \mid c_\alpha \neq 0\}$ を g の $\prec$ に関する先頭項と呼ぶ.

$F = \mathcal{O}_{X,O}^{\oplus r}$ を階数 r の自由 $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群, F の基底を $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$ とする. $\mathcal{O}_{X,O}$ の局所順序 $\prec$ を一つ固定する. F の単項式全体の集合 $\{x^\alpha \mathbf{e}_i \mid \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, 1 \leq i \leq r\}$ 上の全順序 $\prec_F$ が局所順序とは, 次の 2 つの条件を満たすときである:

- 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, 1 \leq i \leq r$ に対して, $x^\alpha \prec x^\beta$ ならば $x^\alpha \mathbf{e}_i \prec_F x^\beta \mathbf{e}_i$
- 任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, 1 \leq i, j \leq r$ に対し, $x^\alpha \mathbf{e}_i \prec_F x^\beta \mathbf{e}_j$ ならば, $x^{\alpha+\gamma} \mathbf{e}_i \prec_F x^{\beta+\gamma} \mathbf{e}_j$.

任意の F の単項式の集合に対し, $\prec_F$ に関する最大限が存在し, $m \in F$ に対し, 先頭項 $\text{LT}_{\prec_F}(m)$ を同様に定義できる. 部分 $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群 $M \subset F$ に対し, $\mathbb{C}[x]$ 加群

$$\text{LT}_{\prec_F}(M) := \langle \text{LT}_{\prec_F}(m) \mid m \in M \rangle_{\mathbb{C}[x]} \subset \mathbb{C}[x]^{\oplus r}$$

を M の $\prec_F$ に関するイニシャル加群と呼ぶ. $\text{LT}_{\prec_F}(M)$ に含まれない単項式を, M の $\prec_F$ に関する標準単項式と呼ぶ. M の部分集合 $\{m_1, \dots, m_s\}$ が M の $\prec_F$ に関する標準基底とは, $\text{LT}_{\prec_F}(m_1), \dots, \text{LT}_{\prec_F}(m_s)$ が $\text{LT}_{\prec_F}(M)$ を生成するときを言う.

さて, $M \subset F$ を, $\ell(F/M) < \infty$ なる部分 $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群とする. イデアルの場合 ([2]) と同様に, $(F/M)^\vee$ の $\mathbb{C}$ 基底を用いて, M の標準基底を以下の様にして計算することができる.

$F^\vee = E^{\oplus r} = \mathcal{H}_{[0]}^n(\Omega_X^n)^{\oplus r}$ の単項式の集合 $\{\frac{dx}{x^{\alpha+1}}\mathbf{e}_i^\vee \mid \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n\}$ 上の全順序 $\prec_F^\vee$ を,

$$\frac{dx}{x^{\alpha+1}}\mathbf{e}_i^\vee \prec_F^\vee \frac{dx}{x^{\beta+1}}\mathbf{e}_j^\vee \stackrel{\text{def}}{\iff} x^\alpha \mathbf{e}_i \succ_F x^\beta \mathbf{e}_j$$

で定義する. この順序を, ここでは $\prec_F$ から定まる $\mathcal{H}_{[0]}^n(\Omega_X^n)^{\oplus r}$ の項順序と呼ぶこと

にする. $\eta = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, 1 \leq i \leq r} c_{\alpha,i} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}\mathbf{e}_i^\vee$, $c_{\alpha,i} \in \mathbb{C}$, に対し,

$$\text{LT}_{\prec_F^\vee}(\eta) = \max_{\prec_F^\vee} \left\{ \frac{dx}{x^{\alpha+1}}\mathbf{e}_i^\vee \mid c_{\alpha,i} \neq 0 \right\}$$

とする. $(F/M)^\vee$ の $\prec_F^\vee$ に関して階段状の $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての基底を $\eta_1, \dots, \eta_\ell$,

$$\eta_j = \frac{dx}{x^{\beta_j+1}}\mathbf{e}_{i_j}^\vee + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, 1 \leq i \leq r} c_{\alpha,i}^{(j)} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}\mathbf{e}_i^\vee,$$

$\text{LT}_{\prec_F^\vee}(\eta) = \frac{dx}{x^{\beta_j+1}}\mathbf{e}_{i_j}^\vee$, とすると, 次が成り立つ.

(1) $\{x^{\beta_j}\mathbf{e}_{i_j} \mid j = 1, \dots, \ell\}$ が M の $\prec_F$ に関する標準単項式の集合,

(2) $x^\alpha \mathbf{e}_i \in \text{LT}_{\prec_F}(M)$ ならば, $x^\alpha \mathbf{e}_i - \sum_{j=1}^\ell c_{\alpha,i}^{(j)} x^{\beta_j} \mathbf{e}_{i_j} \in M$.

(1) より $\text{LT}_{\prec_F}(M)$ を計算することができ, $\text{LT}_{\prec_F}(M)$ の各生成元に対して (2) の計算を行うことにより, M の $\prec$ に関する標準基底を求めることができる.

2 計算アルゴリズムの構成

2.1 Annihilator の計算法

非負整数 k に対し, 自由 $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群 $F_k = \mathcal{O}_{X,O}^{\oplus \binom{n+k}{k}}$ の部分 $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群

$$\mathcal{N}^{(k)}(\omega_f) := \left\{ (g_\alpha(x))_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, |\alpha| \leq k} \mid \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, |\alpha| \leq k} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \cdot g_\alpha(x) \in \text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(k)}(\omega_f) \right\}$$

を定める. $\text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(k)}(\omega_f)$ の生成系を得るには, $\mathcal{N}^{(k)}(\omega_f)$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群としての生成系が計算できればよい. $\mathcal{J}_f^{\oplus r} \subset \mathcal{N}^{(k)}(\omega_f)$ なので, $\ell(F_k/\mathcal{N}^{(k)}(\omega_f)) < \infty$ である. $\mathcal{O}_{X,O}$ の局所順序 $\prec$ と, F_k の局所順序 $\prec_{F_k}$ を固定する. 本節では, Matlis dual を用いて $\mathcal{N}^{(k)}(\omega_f)$ の標準基底を求める方法を与える. 次の定理が中心的役割を果たす.

定理 2 ([7]). P を k 階線形偏微分作用素とする. 次の二つの条件は同値である.

(i) 任意の $g \in \mathcal{J}_f$ に対して $[P, g] \in \text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(k-1)}(\omega_f)$ が成り立つ.

(ii) 任意の $1 \leq i \leq n$ に対して $[P, \frac{\partial f}{\partial x_i}] \in \text{Ann}_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(k-1)}(\omega_f)$ が成り立つ.

(iii) 関数 $h \in \mathcal{O}_{X,O}$ であって $\omega_f(P+h) = 0$ を満たすものが存在する.

$\mathcal{N}^{(0)}(\omega_f) = \mathcal{J}_f$ であり, $(\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_f)^\vee = \Omega_f$ の $\mathbb{C}$ 基底を計算し, それを用いて $\mathcal{J}_f$ の標準基底を計算するアルゴリズムは [1, 2, 10, 9] で与えられている.

2.2 $\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)$ の計算法

ここでは, $(\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_f)^\vee = \Omega_f$ の $\mathbb{C}$ 基底はすでに計算されているものとして, $\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)$ の生成系の計算法を与える.

$$pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)) = \{(a_1, \dots, a_n)^T \in \mathcal{O}_{X,O}^{\oplus n} \mid \exists h \in \mathcal{O}_{X,O}, \frac{\partial}{\partial x_1} a_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} a_n = h\}$$

とする. これは, 0 階項に対応する要素を消す射影 $pr : F_1 = \mathcal{O}_{X,O}^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_{X,O}^n$ による $\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)$ の像である. 定理 2 により, $(a_1, \dots, a_n)^T \in pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f))$ は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in (\mathcal{N}^{(0)}(\omega_f))^{\oplus n} = \mathcal{J}_f^{\oplus n} \quad (2.1)$$

と同値である. ここで現れた行列は f のヘッセ行列であり, 以降 H_f で表す. よって,

$$pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)) = \text{Ker}(\mathcal{O}_{X,O}^{\oplus n} \xrightarrow{H_f} (\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_f)^{\oplus n})$$

である. ここで, $(\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_f)^\vee = \Omega_f$ であつたので, Matlis duality により,

$$(\mathcal{O}_{X,O}^{\oplus n}/pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)))^\vee = \text{Image}(H_f^\vee) = \{(\eta_1, \dots, \eta_n) \cdot H_f \mid (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \Omega_f^{\oplus n}\}$$

を得る. Ω_f の $\mathbb{C}$ 基底はすでに求まっているので, $(\mathcal{O}_{X,O}^{\oplus n}/pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)))^\vee$ の $\mathbb{C}$ 基底を計算することができる. さらに, 局所順序から定まる順序に関して, 階段状の $\mathbb{C}$ 基底を求めることにより, $pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f))$ の標準基底を計算することができる. $pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f))$ の標準基底の各元 $(a_1, \dots, a_n)^T$ に対し, $\omega_f(\frac{\partial}{\partial x_1} a_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} a_n) = h\omega_f$ なる h が定理 2 により存在する. この h は, [3] で与えられた方法で計算することができる. これら $(a_1, \dots, a_n, h)^T$ の形の元と, $(0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_i})^T$ ($1 \leq i \leq n$) で $\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)$ は生成される. $(\mathcal{O}_{X,O}^{\oplus n}/pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)))^\vee$ の $\mathbb{C}$ 基底を $\eta_1, \dots, \eta_t$, Ω_f の $\mathbb{C}$ 基底を $h_1\omega_f, \dots, h_\mu\omega_f$ ($h_i \in \mathcal{O}_{X,O}$) とすると,

$$\{(\eta_i, 0) \mid 1 \leq i \leq t\} \cup \left\{ \left(\left(\omega_f \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha h_i \right)_{|\alpha| \leq k} \right) \mid 1 \leq i \leq \mu \right\}$$

が $(\mathcal{O}_{X,O}^{n+1}/\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f))^\vee$ の $\mathbb{C}$ 基底となる. $k \geq 2$ の場合も, 定理 2 (ii) の条件を (2.1) の様に行列で表現することにより, $k = 1$ のときと同様に $\mathcal{N}^{(k)}(\omega_f)$ の生成系を構成することができる. この方法は, 関数 f の係数にパラメタを含む場合にも適用可能である.

謝辞

本研究において第一著者は, 科研費 (若手研究 (B): 25800029) の助成を受けています.

参考文献

- [1] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について, 数理解析研究所講究録 **1456**, (2005), 126–132.
- [2] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について II, 数理解析研究所講究録 **1568**, (2007), 74–80.
- [3] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジー類に対する偏微分方程式系のスタンダード基底, 数理解析研究所講究録, **1785** (2012), 99–110.
- [4] S. Tajima, Y. Nakamura, Algebraic local cohomology classes attached to quasi-homogeneous isolated hypersurface singularities, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), 1–10.
- [5] 中村弥生, 田島慎一, Inner modality 4 以下の半擬斉次孤立特異点に付随したホロノミック系について, 数理解析研究所講究録, **1431** (2005), 55–67.
- [6] Y. Nakamura, S. Tajima, Unimodal singularities and differential operators, Séminaires et Congrès **10**, Sociétés Mathématiques de France, (2005), 191–208.
- [7] 田島慎一, 中村弥生, 孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーとホロノミック系, 数理解析研究所講究録 **1501** (2006), 168–180.
- [8] S. Tajima, Y. Nakamura, On holonomic D-modules associated with isolated singularities of a Reiffen surface (Russian), Sovrem. Mat. Prilozh. **54** No. 2 (2008), 124–132; translation in J. Math. Sci. **158** (2009), No. 2 288–296.
- [9] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals, Advanced Studies in Pure Mathematics **56**, (2009), 341–361.
- [10] S. Tajima, Y. Nakamura, Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class, Journal of Symbolic Computation **44** (2009), 435–448.
- [11] S. Tajima, Y. Nakamura, Algebraic local cohomology classes attached to unimodal singularities, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **48** (2012), No. 2, 21–43.