

スーパーコンピュータ“HITAC S-810”による拡散方程式の数値計算

日立 ソフト 後 保 範 (Yasunori Ushiro)

柁野佳津子 (Kazuko Togano)

1. はじめに

科学技術計算は物理現象をいかに正確に数値シミュレーションするか，すなわち予測精度を実用に耐えるまでいかに向上させるかが課題である。解析対象は2次元モデルから3次元モデルへ，静的線形解析から動的的非線形解析へ，一部分から全体へと大型化複雑化している。スーパーコンピュータ HITAC S-810 はこのとき発生する大量の演算を高速処理することを目的として開発した。

高速演算を必要とする数値シミュレーションの多くは，偏微分方程式の数値解を得ることである。偏微分方程式は，差分法，有限要素法あるいは境界要素法などで離散化し行列の形へ変換する。その結果数値シミュレーションは連立一次方程式の計算又は固有値問題の計算に帰着する。この計算は大量データの記憶と高速演算を必要とする。

2. HITAC S-810 の構成と特徴

HITAC S-810 は, S-810/5, S-810/10, S-810/20 の 3 つのモデルでシリーズを形成している。また下位のモデルから上位のモデルへは, 設置場所で容易にフィールドアップできる。

HITAC S-810 のプロセッサ仕様を表 1 に示す。

表 1 S-810 プロセッサ仕様

モ デ ル		S-810/5	S-810/10	S-810/20
演算処理装置	最大性能	160 MFLOPS	315 MFLOPS	630 MFLOPS
	ベクトル命令数	80	80	83
	レジスタ	汎用レジスタ		
		16 (32ビット)		
		浮動小数点レジスタ		
		16 (64ビット)		
		ベクトルレジスタ		256語×32
		ベクトルマスクレジスタ		256語×8
		スクラレジスタ		16
				32
	データ形式	固定小数点	32ビット	
		浮動小数点	32, 64ビット	
		論理	64ビット	
	条件付きベクトル処理		有	
	ベクトル処理用タイマ機構		有	
	バッファ記憶		256 KB	
ハイ プ ラ イ ン	加算 / 論理	1	2	4
	乗算 / 加算	1	1	2
	乗除算 / 加算	1	1	2
	マスク演算	1	1	1
	ベクトルロード	1	2	6
	ベクトルストア	1	2	2
主記憶装置	容 量	32, 64, 128 MB		64, 128, 256 MB
拡張記憶装置	容 量	256~1536 MB または 512~3,072 MB		
	最大転送速度	500 MB/秒 または 1000 MB/秒		
入出力処理装置	チャネル数	8, 16, 24, 32		
	最大転送速度	96 MB/秒		

現在のスーパーコンピュータは高速処理能力を発揮するために様々な工夫がなされている。S-810も現在のスーパーコンピュータが持つ特徴は保持している。他のスーパーコンピュータと比較して、そしてS-810の特徴をあげれば次のようなものである。

- (1) リストベクトルの性能がよい。
- (2) 転送速度が従来のディスクの数百倍である拡張記憶装置がある。

3. 拡散方程式の数値計算上の特性

拡散方程式を離散化して得られる行列を非ゼロ要素の形で分類したものを図1に示す。境界要素法で離散化すると密行列となる。有限要素法及び差分法で離散化すると、通常はスパース行列になる。しかし、その行列を係数とする連立一次方程式の解法を考慮すると、有限要素法で離散化したものの多くは帯行列として扱う。行列の帯幅は一定の場合も、変化する場合もある。規則的なスパース行列は、解析対象領域を長方形又は直方体に写像し、差分法で離散化した場合に得られる。複雑な解析対象領域を有限要素法で離散化すると、不規則的なスパース行列となる。拡散方程式の数値解析の場合、多くは各種方法で連立一次方程式を作成し、これを係数とする連立一次方程式の解を得ることに帰着される。最近では高速な反復解法が使用できるようになったので、連立一次方程式

式を解くよりも，行列を作成する方に時間がかかる場合も多い。しかし，離散化するところまで取りあげると紙面の都合上，長くなりすぎるので，ここでは拡散方程式を離散化して発生する行列を係数とする連立一次方程式について主に述べる。

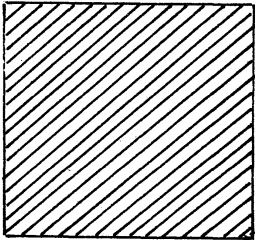
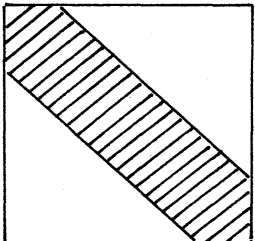
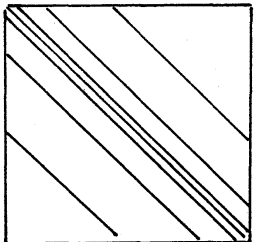
項番	行列の形	代表的離散化手法	連立一次方程式の代表的解法
1	密行列 	境界要素法	ガウス消去法 改訂コレスキー法
2	帯行列 	有限要素法	ガウス消去法 改訂コレスキー法
3	規則的スパース行列 	差分法	SOR法 ICCG法 SCG法 ILUBCG法
4	不規則的スパース行列 	有限要素法	SOR法 ICCG法 SCG法 ILUBCG法

図1 拡散方程式から発生する行列の形

4. 拡張記憶を使用した大次元行列の解法

S-810 の拡張記憶装置は通常のディスクと同様にファイルに対して READ, WRITE が可能である。このため同一のプログラムで拡張記憶装置でもディスクでも自由に使用できる。

連立一次方程式を S-810/20 を使用し、入出力を使用して解いた場合、拡張記憶装置とディスク (H-8598) を使用した場合の処理時間の差の一例を表 2 に示す。

(S-810/20 で測定)

表2. 拡張記憶装置とディスクを使用した場合の処理時間の差

連立一次方程式の解法	データの 分割数	測定 時間	拡張記憶④ を使用	ディスク ⑤ (H-8598) を 使用	倍率 ⑤/④
非対称密行列のガウス消去法 (2000次元)	7	CPU	14 秒	20 秒	1.4
		経過	14 秒	164	12
対称帯行列のガウス消去法 (7000次元, 帯幅: 350)	7	CPU	3.1 秒	4.7	1.5
		経過	3.2 秒	42	13
スカイライン法 (7752次元, ファイル数: 1644418)	7	CPU	3.5 秒	5.5	1.6
		経過	3.5 秒	42	12

(シングルジョブで測定)

表 2 からわかるよう連立一次方程式を解く場合は入出力回に対し数十〜数百回の演算を行うため、拡張記憶装置とディスクでの経過時間の比は約 1 桁程度である。これに対し、線形非定常問題や

逆反復計算による固有値計算を取り扱う場合は、前進後退代入の部分が主力となり、入カ一回に対し演算は乗算と、加算が各一回となり、入出力のスピード差が大きく現れる。

例として帯半幅 350 で 7000 次元の対称帯行列となる線形拡散方程式の問題を 500 ステップ計算した場合の CPU 時間と経過時間は次のようになる。(S-810/20 を使用したシングルラン)

拡張記憶を使用のとき、CPU 時間 105 秒、経過時間 106 秒

ディスク(H-8589)を使用のとき、CPU 時間 454 秒、経過時間 9400 秒

この場合拡張記憶を使用すると CPU 時間も 4.5 倍向上し、経過時間は約 2 桁向上する。

このように S-810 で拡張記憶装置を使用すると、一回の入出力で演算量の多い場合で約 1 桁、演算量が少い場合は約 2 桁、ディスクに対して経過時間が短縮される。

このように拡張記憶の効果は非常に大きく、今後スーパーコンピュータを使用するには必須のものとなるであろう。

4. 差分法で離散化した大次元の行列の解法

拡散方程式を差分法で離散化した行列を係数とする連立一次方程式の解法として現在、対称行列の場合は MICCG¹⁾法が、(Modified Incomplete Cholesky Conjugate Gradient Method)、非対称行列の場合には、CR法(Conjugate Residual Method)、BCG法(Bi-Conjugate Gradient Method) あるいは CGS法(Conjugate

te Gradient Squared Method) に不完全三角分解 (ILU: Incomplete LU Decomposition) を付けた解法²⁾が注目されてきている。

規則的対称疎行列を係数とする MICCG 法は収束は速いがベクトル計算機向きにするには工夫がいる。このため (M)ICCG 法をベクトル計算機向きにするためのアルゴリズムの検討が種々なされてきた。しかしそれらのほとんどのアルゴリズムは元の (M)ICCG 法より収束速度が低下するという傾向があった。

ここ数年、収束速度を低下させないベクトル計算機向き (M)ICCG 法を検討してきた¹⁾。その結果リストベクトルを使用すると同一な収束速度を保ったままベクトル化することが分かった。また一方では MICCG 法よりは収束速度は低下してもベクトル計算機の性能を十分に発揮させることによりトータルの性能で MICCG 法に對抗しようとする方法も検討されている。その代表が SCG³⁾法 (Scaled Conjugate Gradient Method) である。

リストベクトルを使用した MICCG 法と SCG 法の性能をベクトル計算機上で単純に比較することはできない。取り扱う問題によっても、ベクトル計算機の特性によっても比較結果が異なるためである。しかし、ここではあえて S-810/20 という特定の計算機で、また限られた問題のレポートリの中で比較する。S-810/20 は他のベクトル計算機に比較して相対的にリストベクトル処理が速いため、ここでの比較結果は他のベクトル計算機によるとリスト付

MICCG法を平均以上に高く評価している可能性はある。

収束の速さの比較には(1)式に示す三次元拡散方程式を中央差分で離散化して得られる行列を使用した。計算対象領域は直方体領域の左下奥 $1/8$ 領域である。全体領域の表面は0に固定した境界(P_1)とし、 $1/8$ 領域への切断面は拡散による移動のない境界(P_2)とする。拡散係数と形状の収束性への影響を考慮して計算対象モデルは図2に示すCASE-A, CASE-B, CASE-C及びCASE-Dの4種類のモデルを選定した。各モデルは直方体領域の $1/8$ 領域に対応するもので境界条件はすべて同一とする。

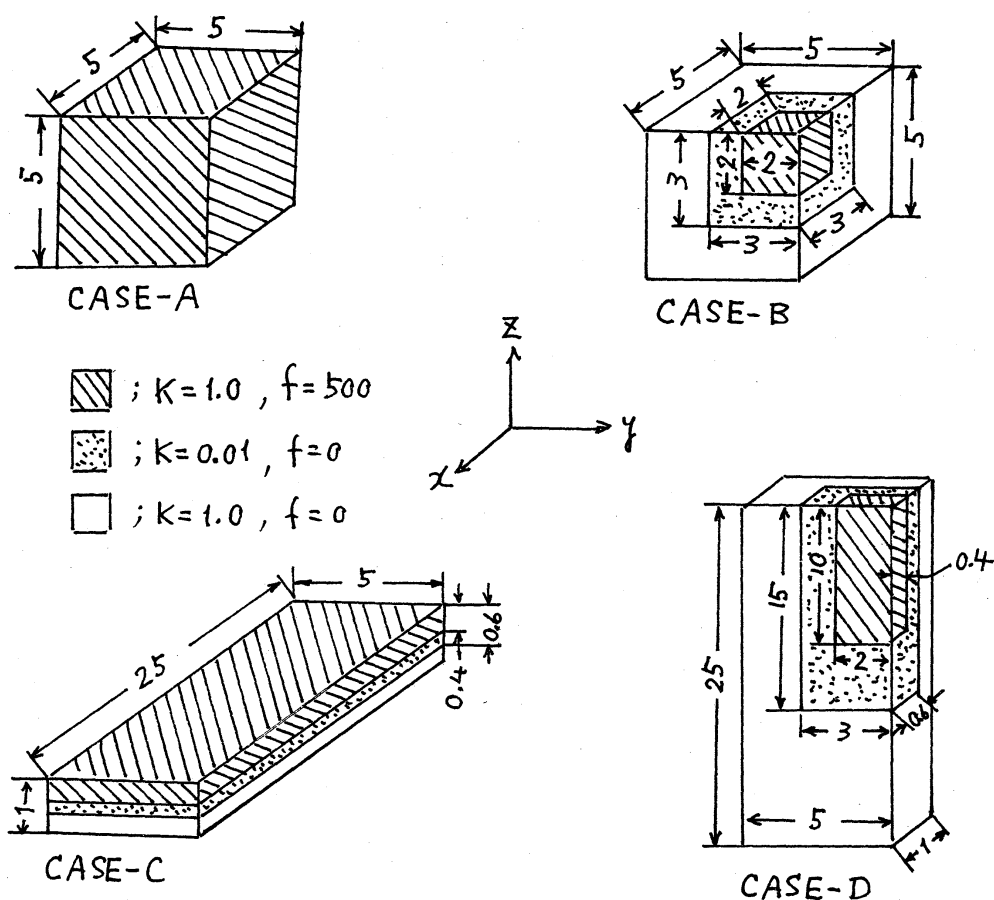


図2. 三次元熱伝導モデル

各モデルとも下記の拡散方程式及び境界条件に従う。

$$-\operatorname{div}(K \cdot \operatorname{grad} \phi) = f \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{ll} \phi = 0 & \text{on } \Gamma_1 \\ (K \cdot \operatorname{grad} \phi) \cdot n = 0 & \text{on } \Gamma_2 \end{array} \right\} \text{境界条件} \quad (2)$$

各モデルとも $40 \times 40 \times 40$ に等分割し、中央差分公式を使用して 64000 次元の次のような連立一次方程式を作成する。

未知数となる節点の番号は x 方向, y 方向, z 方向の順に付けた, x^p を p 回反復計算時の解ベクトルとするとき, 解の収束を判定する基準として次式で表現される二乗ノルムの相対残差を使用した。

$$\text{相対残差} = \frac{\|Ax^p - b\|_2}{\|b\|_2} \leq 10^{-8} \quad (3)$$

S-810/20 における MICCG 法, ICCG 法と SCG 法の比較を表3に示す

表3. S-810/20 における各反復解法の比較

解法 CASE	MICCG 法 (a)		ICCG 法 (b)			SCG 法 (c)		
	CPU時間 (s)	反復回数	CPU時間 (s)	反復回数	比 (b)/(a)	CPU時間 (s)	反復回数	比 (c)/(a)
A	0.59	33	1.12	64	1.9	1.13	196	1.9
B	0.63	35	1.18	67	1.9	1.21	206	1.9
C	1.57	89	3.47	198	2.2	7.51	1279	4.8
D	1.07	61	2.08	118	1.9	4.38	742	4.0

反復計算の初期値は $(0, 0, 0, \dots, 0)^T$ なるゼロベクトルとした。MICCG法は参考文献(1) P8の方式1を採用し、加速パラメータは $\alpha=0.975$ に固定した。表2によれば、リストベクトルを使用したMICCG法が全面的に有利である。しかしこの結果は使用したベクトル計算機とモデルに大きく依存する。またプログラムの作成方法にも依存する。例えばSCG法のプログラムを作成するとき、ICCG法のプログラムをSCG法に単純に置き換えたのと、SCG法向きに修正しなおしたのでは約2割SCG法向きに修正した方が速くなった。ここでの数値は一応SCG向きに修正したものの値である。

6 有限要素法で離散化した場合の解法

拡散方程式を有限要素法で離散化した行列を係数とする連立一次方程式の解法としては、帯行列のガウス消去法、スカイライン法及び差分法を離散化した場合に使用したのと同様な反復解法がある。帯行列のガウス消去法やスカイライン法を使用するとき、大次元の問題の場合はこの部分の処理時間がほとんどを占めるため、この部分の処理時間の短縮が最も重要である。この解法部分を高速化するためには拡張記憶装置の使用が非常に有効である。

一方有限要素法で離散化した不規則的疎行列が非常に疎な場合には差分法で使用したのと同様な反復解法が使用できる。行列が正値対称行列の場合にはICCG法が有効であり、これ

も、リストベクトルを上手に利用するとベクトル計算機向き解法になる。有限要素法の場合、差分法に比較して、方程式を離散化して連立一次方程式を作成する部分に処理時間がかかる。特に連立一次方程式の解法にICCG法を使用した場合には大次元行列の場合でも離散化部分の方により多くの時間がかかる場合がある。

ここでは一例を選んで数値解析全体をベクトル化した場合の例⁴⁾を述べる。解析対象として融解や凝固を伴う伝熱解析を選んだ。融解や凝固を伴う伝熱解析は熱収支条件（ステファン条件）と拡散方程式で数式表現されるが、実用上は拡散方程式だけでも計算できる。この場合相変化の潜熱はエンタルピーの変化に現れ、計算は熱容量の変化で吸収する。

図3はレーザー光線の照射を受けシリコンが融解してさらに凝固していくときの伝熱解析の例である。これは(4)式の拡散方程式で熱容量 $\rho(u)$ と熱伝導係数 $k(u)$ を温度 u に依存させて計算できる。

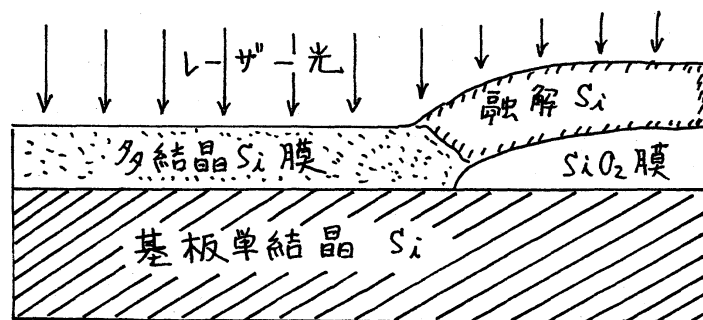


図3. 融解を伴う伝熱モデル

$$\rho(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (k(u) \operatorname{grad}(u)) = f(t) \quad (4)$$

(4) 式の拡散方程式を有限要素法で離散化して計算する手順を図3に示す。

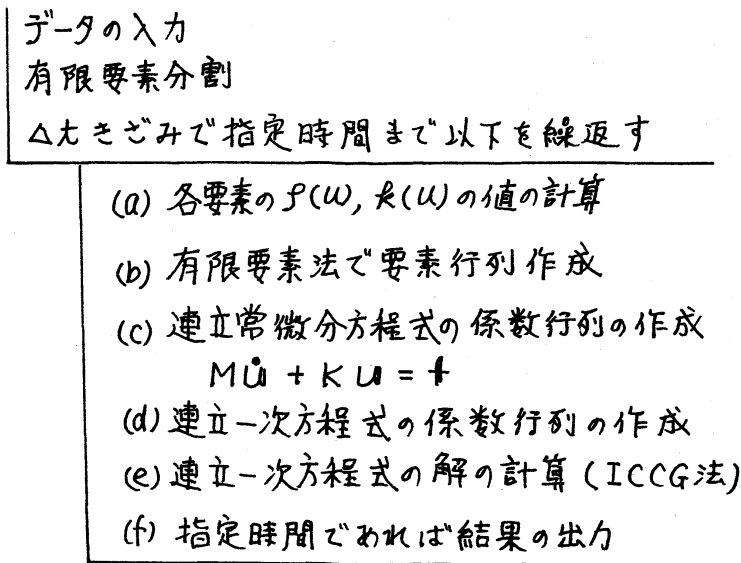


図3. 有限要素法における計算手順

図3の(a)から(e)までの計算をベクトル処理で高速化するには汎用機と異なった工夫がいる。その要点を示すと次のようになる。工夫すべき項目の項番は図3の(a)から(e)にそれぞれ対応する。

- (a) ベクトル長を長くする工夫 及び 区間検索をベクトル化する工夫が必要
- (b) 最内側のDOループを要素数で回すことによるベクトル長を長くする工夫が必要
- (c) 同一節点を共有しない単位に要素のグループを作成し、その要素番号をリストに記憶させておき、データの独立が保てる工夫をして、リストベクトルを上手に使用してベクトル化する工夫が必要。

- (d) ベクトル長を行列の次元数まで長くする工夫が必要。
- (e) 次の条件を満足するようにリストベクトルを作成すると
ICCG法の収束率をスカウ用と変えないでベクトル化することができる。
- (i) 直接結合する節点の番号の大小関係はオリジナルの番号と変更後の番号で一致させる。
- (ii) 連続する接点の番号ができるだけ結合しないように番号を変更する。

(a) から (e) の対策を行うと HITAC S-810/20 を用いて図3のモデルの計算を行ったところ HITAC M-280H の約 30 倍高速演算できた。

このときの節点数は約 5000, 時間方向のきざみ回数は 200 である。

7. 偏微分方程式向き言語 DEQSOL の概要。

DEQSOL は数値シミュレーション用に設計した高水準の問題向きプログラミング言語である。その特長として、アルゴリズムと計算スキームならびに領域形状の簡潔な記述と各種解法への柔軟な適応及び並列化アルゴリズムの自然な記述が可能である。

(a) アルゴリズムと計算スキームの簡潔な記述

偏微分方程式で表わされる物理現象はほとんどそのまま偏微分方程式の形で記述できます。たとえば偏微分方程式の一般的な記法である。

$$-\operatorname{div}(A \cdot \operatorname{grad}(u)) + v \cdot \operatorname{grad}(u) = f \quad (5)$$

は DEQSOL では次のように簡潔度においてはほとんど差がなく記述できる。

$$- \text{DIV}(A.. \text{GRAD}(U)) + V.. \text{GRAD}(U) = F \quad (6)$$

記述された方程式は自動的に差分法や有限要素法で離散化され計算される。数値シミュレーション対象の領域形状、メッシュ分割、境界条件及び初期条件も簡潔に記述できる。結果として DEQSOL での記述行数は同じ問題に対する FORTRAN ソースプログラムの記述行数と比べると約十分の一となる。また記述が簡単で、複雑な離散化や数値解法は DEQSOL が自動的に処理するため、数値解析の専門化でなくても容易に数値シミュレーションプログラムが作成でき、プログラミング上のミスも少なくなる。

(b) 各種解法への柔軟な適応

DEQSOL は単に解法ルーチンの名称を指定して計算するのとは異なり、解法ブロックにて実行文を任意に組み合わせて解法を記述する方式を採用しているため、各種の問題への柔軟な適応が図れる。データ操作のためには代入文とソルブ文の二種類を置き、陽解法、陰解法、及び準陰解法の種々のスキームに対応できるように配慮している。また時間依存問題や非線形問題の反復計算のため繰り返しブロック文を置き計算制御

が容易にできるようにになっている。

(c) 並列化アルゴリズムの自然な記述

偏微分方程式で表わされる物理現象をシミュレーションするプログラムは高い並列性を内在している。しかしこの並列性を有効に利用したプログラムを作成するには、高度な数値計算手法とスーパーコンピュータ・アーキテクチャを知る必要がある。DEQSOLでは自動的に、この並列性を生かしたFORTRANソースプログラムの生成及び行列解法ルーチンを用意しているためスーパーコンピュータの性能を十分に発揮することができる。

DEQSOLの主な適用分野は次の通りである。

(i) 熱伝導解析

静止又は動作している物体及び流れを伴う場の定常及び非定常解析

(ii) 電磁場解析

静止又は動作している物体の電位分布及び磁場分布の定常及び非定常の解析

(iii) 拡散解析

不純物及び中性子の定常、非定常の拡散と汚染解析

(iv) 半導体デバイス解析

半導体内の電子、正孔、イオンの変化による電圧、電流特性の解析

(V) 流体解析

完全流体及びレイノルズ数の低い流れの解析, 浸透流解析。

8 おわりに

スーパーコンピュータ HITAC S-810での拡散方程式の処理について述べたが, スーパーコンピュータの応用分野ははるかに広い。今後スーパーコンピュータによる数値シミュレーションが多くの分野で有効に使用されるためにはスーパーコンピュータの性能向上を図るだけでなく, FORTRANによる高度な自動ベクトル化, スーパーコンピュータ向き解法の開発及びベクトル化版汎用パッケージの充実が必要である。しかし, 取り扱うモデルがどんどん拡張している現在では汎用パッケージでは十分解析できない問題も多い。これらの問題をFORTRANだけで記述するのは効率を思ひ高度な技術が必要となる。このためFORTRANよりさらに高級な言語が必要である。その一つの試みとして偏微分方程式向き言語 DEQSOLを開発した。DEQSOLはまだ適用範囲がせまいが, より広い範囲の問題が簡潔に記述できる超高級言語でスーパーコンピュータを意識しないで, その時点のスーパーコンピュータの性能を十分に発揮できるものが今後ぜひ必要だと考える。

9. 参考文献

- 1) 後; ベクトル計算機向きICCG法, 京大数理解析講究録 514, PP 110~124 (1984)
- 2) 後; 移流拡散方程式に対するベクトル計算機向きPCG法, 京大数理解析講究録 548, PP 147~160 (1985)
- 3) 速水, 原田; ベクトル計算機における Scaled CG法の有効性について, 情報処理学会, 数値解析 17-4 (1986)
- 4) 後; スーパーコンピュータ "HITAC S-810"による拡散方程式の有限要素解析 電子通信学会全国大会, PP 7-229~7-230 (1984)