

Noether's problem for finite monomial subgroups of $GL_4(\mathbb{Q})$

陸名 雄一 (Yūichi RIKUNA, 都立大理・学振PD)

1 Introduction

$k(x_1, \dots, x_n)$ を体 k 上の n 変数有理函数体, $\text{Aut}_k k(x_1, \dots, x_n)$ をその k -自己同型群とする. 有限群 G とその忠実な表現

$$\rho: G \longrightarrow \text{Aut}_k k(x_1, \dots, x_n)$$

に対し, $\rho(G)$ の作用による $k(x_1, \dots, x_n)$ の固定体を $k(x_1, \dots, x_n)^{\rho(G)}$ と記す. 即ち,

$$k(x_1, \dots, x_n)^{\rho(G)} := \{f \in k(x_1, \dots, x_n) \mid f^\sigma = f, \forall \sigma \in \rho(G)\}.$$

拡大 $k(x_1, \dots, x_n)/k(x_1, \dots, x_n)^{\rho(G)}$ はガロア拡大であり, そのガロア群は G と同型になる. 固定体 $k(x_1, \dots, x_n)^{\rho(G)}$ に関する次の問題を一般 Noether 問題という.

問題 (General Noether's problem (GeneralNP)). 固定体 $k(x_1, \dots, x_n)^{\rho(G)}$ は k -有理的, 即ち k 上純超越的か?

E. Noether がこの問題 (の原型) を提唱した動機のひとつは Hilbert の既約性定理にある. $\mathbb{Q}$ を有理数体とする. n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ を変数の置換群として $\text{Aut}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ の部分群と見做すと, 対称式の基本定理によって固定体 $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)^{\mathfrak{S}_n}$ は $\mathbb{Q}$ 上の n 変数有理函数体 $\mathbb{Q}(t_1, \dots, t_n)$ と同型となる. 従って n 次一般方程式

$$g(t_1, \dots, t_n; X) := X^n - t_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n t_n \in \mathbb{Q}(t_1, \dots, t_n)[X]$$

は $\mathbb{Q}(t_1, \dots, t_n)$ の正則 $\mathfrak{S}_n$ -ガロア拡大を与える. D. Hilbert は次の“既約性定理”を証明し, パラメーター $t_1, \dots, t_n$ の特殊化によって $\mathbb{Q}$ の $\mathfrak{S}_n$ -ガロア拡大体が無限個得られることを示した. これがガロア逆問題に於ける“構成的研究”に関する最初の一般的な結果であろう.

定理 1.1 (Hilbert 1892, [6]). $f(t_1, \dots, t_r; X_1, \dots, X_s) \in \mathbb{Q}(t_1, \dots, t_r)[X_1, \dots, X_s]$ を有理函数体 $\mathbb{Q}(t_1, \dots, t_r)$ 上の s 変数既約多項式とする. このとき, パラメーターの特殊化 $(t_1, \dots, t_r) \mapsto (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Q}^r$ で $f(a_1, \dots, a_r; X_1, \dots, X_s) \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_s]$ が $\mathbb{Q}$ 上既約となるようなものが無限個存在する.

更に, $\mathfrak{S}_n$ の任意の部分群 H と $K \supset \mathbb{Q}$ を満たす体の H -ガロア拡大 L/K に対して, $g(a_1, \dots, a_n; X) \in K[X]$ の K 上最小分解体が L となるような変数の特殊化 $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ が存在することが知られている. これは, $g(t_1, \dots, t_n; X)$ が“ $\mathbb{Q}$ -生成的な $\mathfrak{S}_n$ -多項式 ($\mathbb{Q}$ -generic $\mathfrak{S}_n$ -polynomial)”であることを示している.

定義 1.2 (DeMeyer 1983, [3]). 体 k 上の n 変数有理函数体 $k(t_1, \dots, t_n)$ と有限群 G に対して, モニックな多項式 $f(t_1, \dots, t_n; X) \in k(t_1, \dots, t_n)[X]$ の $k(t_1, \dots, t_n)$ 上のガロア群が G と同型であるとする. このような多項式を $k(t_1, \dots, t_n)$ 上の “ G -多項式 (G -polynomial)” と呼ぶ. この $f(t_1, \dots, t_n; X)$ は, 更に次の条件を満たすとき “ k -生成的 (k -generic)” と呼ばれる.

(条件 A) G の任意の部分群 H と $k \subset K$ を満たす体の H -ガロア拡大 L/K に対して, $f(a_1, \dots, a_n; X) \in K[X]$ の K 上の最小分解体が L となるような変数の特殊化 $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ が存在する.

つまり k -生成的 G -多項式とは, 基礎体 k の上にある全ての G -ガロア拡大体 (及びその中間にあるガロア拡大体) をパラメトライズする多項式である. 例えば Kummer 理論により, k が 1 の原始 n 乗根を含むならば $X^n - t \in k(t)[X]$ は k -生成的 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -多項式である. なお, G. Kemper によって (条件 A) はより弱い条件に置き換え可能であることが示されている.

定理 1.3 (Kemper 2001, [10]). 定義 1.2 に於ける (条件 A) は次の (条件 B) と置き換えることができる.

(条件 B) $k \subset K$ を満たす体の G -ガロア拡大 L/K に対して, K 上の多項式 $f(a_1, \dots, a_n; X) \in K[X]$ の K 上最小分解体が L となるような変数の特殊化 $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ が存在する.

任意の有限群は適当な対称群 $\mathfrak{S}_n$ の部分群として実現される. E. Noether は (当時はまだ生成的多項式概念は存在しなかったが) Hilbert の結果をこれらへ適用する目的の為に [18] に於て冒頭の戦略 (の置換表現の場合) を提唱したのであった. 置換表現に対する Noether 問題を Permutation Noether's Problem (PermNP) と呼ぶことにする. k が無限体のとき, PermNP の肯定解が生成的多項式の存在を導くことが正規基底定理に基づく W. Kuyk による結果を使うことによって示されている.

補題 1.4 (Kuyk 1964, [13]). G を置換群 $\mathfrak{S}_n$ の部分群とし, L/M を無限体の G -ガロア拡大とする. 多項式 $f(X_1, \dots, X_n) \in L[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ に対して, 以下の条件を満たす $a_1, \dots, a_n \in L$ が存在する.

1. 任意の $\sigma \in G$ に対して $a_i^\sigma = a_{\sigma(i)}$. ただし a_i^σ で σ に対応するガロア作用を表す.
2. $f(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

以上のような背景から, Noether 問題はガロア逆問題の構成的研究に於いて重要な意義を持っている.

E. Noether による提唱以来, 多くの有限群について $\mathbb{Q}$ 上の PermNP が肯定的であることが示されてきた. が, R. G. Swan は [22] で組 $(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/47\mathbb{Z})$ に対する PermNP が否定的

であることを証明し、これを契機に PermNP が否定的であるような組 $(\mathbb{Q}, G)$ が次々と発見された。特に著しいのは $(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ で、この組に対する PermNP が肯定解を持たないことは類体論に於ける所謂 “Grunwald-Wang の反例” から導くことができる。また H. W. Lenstra はアーベル群に対する $\mathbb{Q}$ -生成的多項式が存在する為の必要十分条件を導いた。

定理 1.5 (Lenstra 1974, [15]). A を有限アーベル群とすると、 $\mathbb{Q}$ -生成的 A -多項式が存在するための必要十分条件は、 A が位数 8 の元を持たないこと、である。

従って 位数 8 の元を持つアーベル群については $\mathbb{Q}$ に関する PermNP が否定的であることがわかる。非可換群についても現在までに膨大な量の結果が得られているが、この辺りの解説は成書 [7] に譲る。最近の発見で特に著しいのは J. -P. Serre による、位数 16 の一般四元数群 Q_{16} に関する結果である。

定理 1.6 (Serre 2003, [21]). 組 $(\mathbb{Q}, Q_{16})$ に対する PermNP は否定的である。

この結果によって位数 32 未満の有限群で $\mathbb{Q}$ 上の PermNP が解かれていないものは位数 24 の線型群 $SL_2(\mathbb{F}_3)$ のみとなった。本稿の主な目的は $\mathbb{Q}$ 上の PermNP が解かれていなかった $GL_2(\mathbb{F}_3)$ と $SL_2(\mathbb{F}_3)$ についてその肯定性を、具体的に超越基底を与えることによって、示すことにある。次章で述べるように、これら PermNP は適当な $\mathbb{Q}$ 上の忠実 4 次線型表現に対する Noether 問題に帰着される。線型表現のうち “単項表現 (monomial representation)” と呼ばれるものに対しては、対応する Noether 問題が比較的容易に片付く場合がある。表題の “monomial subgroup” とは単項表現の像として得られる有限群を指しており、 $GL_2(\mathbb{F}_3)$ や $SL_2(\mathbb{F}_3)$ は $GL_4(\mathbb{Q})$ の monomial subgroups として実現されるのである。

2 Linear Noether's problem

与えられた函数体が基礎体上純超越的かどうかを判定することは、Zariski-Castelnuovo の定理 (cf. [2, 23]) からわかるように、超越次元が小さい場合でさえ、一般には非常に難しい問題である (我々はさらに基礎体が代数閉体で無い場合を扱うため、より難しさが増している)。従って超越次元を小さくする工夫が必要となる。

有限群 G を置換表現によって適当な r 次対称群 $\mathfrak{S}_r$ の部分群と見做す。 V を体 k 上の r 次元線型空間とし、 $\{x_1, \dots, x_r\}$ をその基底とする。 G は $x_1, \dots, x_r$ の置換として V に作用し、この作用によって V は忠実 $k[G]$ -加群となる。 $k[V]$ によって V の k 上の対称テンソル代数を表し、 $k(V)$ をその商体とする。 $k(V)$ は $x_1, \dots, x_r$ を変数とする k 上の r 変数有理函数体 $k(x_1, \dots, x_r)$ と同一視でき、 G は $x_1, \dots, x_r$ の置換として $k(V)$ に作用している。この作用による $k(V)$ の固定体を $k(V)^G$ で表す。次の補題は Hilbert 90 の一般化から導かれる。

補題 2.1 (“No-name lemma” (cf. [17])). W を V の忠実な部分 $k[G]$ -加群とする。このとき、 $k(V)^G$ は $k(W)^G$ 上有理的である。

W の基底を $w_1, \dots, w_s$ とすると, $k(W)$ は $w_1, \dots, w_s$ を変数とする k 上の s 変数有理関数体であり, $k(W)$ への G の作用は $w_1, \dots, w_s$ の線型変換である. 従って, この補題によって PermNP が線型表現に対する Noether 問題 (LinearNP) に帰着されることが示された.

命題 2.2. 組 (k, G) に対する LinearNP (忠実線型表現の取り方は任意) が肯定的であれば PermNP も肯定的である.

この命題によって超越次元を小さくすることができたが, G. Kemper のアイデアによってもう 1 次元小さくすることができる. 体 k 上の一般線型群 $GL_n(k)$ を変数の線型変換群として $\text{Aut}_k k(x_1, \dots, x_n)$ の部分群と見做し, G を $GL_n(k)$ の有限部分群とする. $n = 1$ に関しては Kummer 理論から LinearNP は自明である. よって, 以下 $n \geq 2$ とする.

I_n を n 次単位行列とし, 有理関数体 $k(x_1, \dots, x_n)$ の “zero-part” $k(x_1, \dots, x_n)_0$ を

$$k(x_1, \dots, x_n)_0 := k(x_1, \dots, x_n)^{k \times I_n}$$

で定義する. これは k 上 $n-1$ 変数の有理関数体と同型である. G は $k(x_1, \dots, x_n)_0$ へ標準射影

$$\pi : GL_n(k) \longrightarrow PGL_n(k) = GL_n(k)/k \times I_n$$

を経由して作用する. その固定体を $k(x_1, \dots, x_n)_0^G$ と記す. これは $k(x_1, \dots, x_n)^{k \times G}$ に等しい. 拡大 $k(x_1, \dots, x_n)_0/k(x_1, \dots, x_n)_0^G$ はガロア拡大であり, そのガロア群は第二同型定理によって $k \times G/k \times I_n \cong G/G \cap k \times I_n$ と同型である. 次数環の一般論から, $k(x_1, \dots, x_n)^G$ の k -有理性は $k(x_1, \dots, x_n)_0^G$ のそれと同値であることがわかる. 従って n 次元の LinearNP は $n-1$ 次元の GeneralNP へ帰着される. より具体的に, 次の補題が示される.

補題 2.3 (Kemper, 1996 (cf. [9])). $\theta \in k(x_1, \dots, x_n)^G$ を斉次 G -不変式の商で, 次数 (分子と分母の斉次数の差) の絶対値が最小となるようなものとする. このとき, $k(x_1, \dots, x_n)^G$ は $k(x_1, \dots, x_n)_0^G$ 上 θ によって生成される. また, この “次数の絶対値の最小値” はスカラー部分群 $G \cap k \times I_n$ の位数に等しい.

上記の θ は簡単に見つけることができる. よって我々の目的のためには $k(x_1, \dots, x_n)_0^G$ の具体的な表示を計算し, その k -有理性を調べればよいことになる. G の位数が大きいとき, 直接 $k(x_1, \dots, x_n)_0^G$ を考察するのは困難である. このような場合は $G/G \cap k \times I_n$ の適当な正規列を選び, 順々に固定体を求めていけばよい.

$n = 2$ に対する LinearNP は上に述べた通り 1 次元の GeneralNP に帰着されるが, Lüroth の定理によってそれは常に肯定的である. つまり, 2 次元の LinearNP は全て肯定的となる.

$n = 3$ に対する $\mathbb{Q}$ 上の LinearNP は $GL_3(\mathbb{Q})$ の $\mathbb{Q}$ -共役類の個数だけ, つまり 32 種ある. このうちの大部分が肯定的であることが H. Armad, M. Hajja, M. Kang らによって知られていた (cf. [1, 8]) が, 最近全ての場合について肯定的であることが判明した.

定理 2.4 (Oura-Rikuna, 2003 (cf. [19])). $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ の任意の有限部分群 G について, 組 $(\mathbb{Q}, G)$ に対する LinearNP は全て肯定的である.

$n = 4$ に対する $\mathbb{Q}$ 上の LinearNP は 227 種あるが, それらを統一的に扱う手段は現在のところ存在しない. そこで攻略しやすいものから考えることになるが, まず挙げられるのが先に述べた “monomial subgroup” 達である. これらに対する LinearNP については次章で触れることとし, 最後に LinearNP と生成的多項式との関係を述べておく. 補題 2.1 は LinearNP の肯定解が PermNP の肯定解を導くことを示しているが, 次の結果は LinearNP の肯定解の具体的な表示から直接生成的多項式を導く手段を与えている. こちらの 방법으로得られる生成多項式の方が PermNP から得られるものよりもパラメーターの個数が少ないという応用上の利点がある.

定理 2.5 (Kemper-Mattig, 2000 (cf. [11])). 無限体 k と有限群 $G < \mathrm{GL}_n(k)$ に対する LinearNP が肯定解 $k(x_1, \dots, x_n)^G = k(\eta_1, \dots, \eta_n)$ を持つとし, $f(X) \in k(\eta_1, \dots, \eta_n)[X]$ を拡大 $k(x_1, \dots, x_n)/k(\eta_1, \dots, \eta_n)$ のモノックな定義多項式とする. $k(t_1, \dots, t_n)$ を k 上の有理函数体とすると, 同型 $\varphi: k(t_1, \dots, t_n) \rightarrow k(\eta_1, \dots, \eta_n), (t_1, \dots, t_n) \mapsto (\eta_1, \dots, \eta_n)$ による $f(X)$ の (係数の) 引き戻し $F(t_1, \dots, t_n; X) := \varphi^{-1}(f(X)) \in k(t_1, \dots, t_n)[X]$ は k -生成的 G -多項式である.

3 Monomial subgroups of $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ の元で “各行各列に 1 または -1 が一つずつあり, その他の成分は 0” であるものを単項行列 (monomial matrix) と呼ぶ. n 次の単項行列全体 $\mathfrak{M}_n$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ の有限部分群であり, 次の各元で生成される:

$$\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}.$$

はじめの 2 個が n 次置換行列全体 ($\mathfrak{S}_n$ と同一視する) を生成するので, $\mathfrak{M}_n$ は環積 $\mathfrak{S}_n \wr C_2 \cong \mathfrak{S}_n \times C_2^n$ ($C_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) と同型である. また, 残りの n 個が生成する $\mathfrak{M}_n$ の正規部分群を C_2^n と同一する. $\mathfrak{M}_n$ の部分群に対する LinearNP はその zero-part への作用が “単項作用”, 即ち $y_i \mapsto cy_1^{e_1} \dots y_n^{e_n}$ ($c \in \mathbb{Q}, e_i \in \mathbb{Z}$) の形の作用となるため, 他のタイプの行列群よりも扱いが比較的易しくなっているのである. 単項作用に対する Noether 問題の研究については Kang による解説 [8] がある. 彼らの手法は基礎体の代数拡大を経由する必要があるが, 次章で用いられる手法は基礎体を上げる必要がなく, より簡明であることを注意しておく. $\mathfrak{M}_4$ の部分群も数多くあるが, 紙面の都合上, ここでは重要なもの幾つかを挙げるにとどめる.

1. $\mathfrak{S}_4$ の部分群 H に対して $H \wr C_2$ の形になるもの.
2. 2-群の系列, 特に C_8 , 位数 16 の二面体群, 準二面体群, modular-群, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 上のアフィン変換群 (位数 32).
3. 線型群 $GL_2(\mathbb{F}_3)$, $SL_2(\mathbb{F}_3)$.

ここでは 1. について簡単に説明し, 3. について次章で詳しく述べる. 2. については最近 [5] によって生成的多項式の極めて簡明な表示を含む, 多くの結果が得られている.

1. について

H を $\mathfrak{S}_n$ の部分群とすると, $H \wr C_2$ に対する LinearNP は次のようにして H に対する LinearNP に帰着される. C_2^n は $H \wr C_2$ の正規部分群であり, その固定体は $k(x_1^2, \dots, x_n^2)$ である. $(H \wr C_2)/C_2^n \cong H$ の $k(x_1^2, \dots, x_n^2)$ への作用は各 $y_i := x_i^2$ への置換作用であるから, 次の結果が得られる.

定理 3.1 (well-known (cf. [14])). $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ の $\mathfrak{S}_n$ の部分群 H による固定体を $\mathbb{Q}(\eta_1, \dots, \eta_r)$ ($\eta_i = \eta_i(x_1, \dots, x_n)$) とする. このとき $H \wr C_2$ による固定体は $\mathbb{Q}$ 上 $\{\eta_i(x_1^2, \dots, x_n^2) \mid 1 \leq i \leq r\}$ によって生成される. 特に, $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)^H$ が $\mathbb{Q}$ -有理的ならば, $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)^{H \wr C_2}$ も $\mathbb{Q}$ -有理的である.

4 LinearNP for $(\mathbb{Q}, GL_2(\mathbb{F}_3))$

線型群 $GL_2(\mathbb{F}_3)$ は位数 48 を持ち, 抽象群として次の表示を持つ:

$$GL_2(\mathbb{F}_3) \cong \langle a, b \mid a^8 = b^2 = (ab)^3 = [a^4, b] = 1 \rangle$$

(但し $[*_1, *_2]$ は $*_1, *_2$ の交換子を表す). この群は 8 次対称群の推移的部分群 ${}_8T_{23}$ として実現でき, 置換表現

$$\rho: (a, b) \mapsto \langle (12345678), (12)(48)(56) \rangle$$

を持つ. $\tilde{G} := \langle \rho(a), \rho(b) \rangle$ は $\{v_1, \dots, v_8\}$ を基底とする 8 次元 $\mathbb{Q}$ -線型空間 V へ基底の添字の置換として右から作用するものとする. $\rho(a), \rho(b)$ に対応する $GL_8(\mathbb{Q})$ の置換行列を

$\tilde{A}, \tilde{B}$ とする. 即ち,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

正則行列 $P \in \mathrm{GL}_8(\mathbb{Q})$ を

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で定めると,

$$P^{-1}\tilde{A}P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 & -1 \\ & & & & 0 & 1 & -1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}\tilde{B}P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

となる. 従って V は $\mathbb{Q}[\tilde{G}]$ -加群としての分解

$$V = W_4 \oplus W_3 \oplus W_1$$

を持つ. ただし, W_4, W_3, W_1 の次元をそれぞれ 4, 3, 1 とする. これら各成分が $\mathbb{Q}$ 上既約であること, 及び W_4 のみが忠実 $\mathbb{Q}[\tilde{G}]$ -加群であることが容易に確かめられる. P の形から W_4 の基底として

$$\{x_1 := v_1 - v_5, x_2 := v_2 - v_6, x_3 := v_3 - v_7, x_4 := v_4 - v_8\}$$

を選ぶことができ、これに対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ の 忠実既約 $\mathbb{Q}$ -線型表現は

$$(a, b) \mapsto \left(A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

である.

$G := \langle A, B \rangle$ のスカラー部分群 $G \cap \mathbb{Q}^\times I_4$ は $\langle A^4 \rangle = \langle -I_4 \rangle$ に等しく,

$$\mathbb{Q}^\times G / \mathbb{Q}^\times I_4 \cong G / G \cap \mathbb{Q}^\times I_4 = G / \langle A^4 \rangle \cong \mathfrak{S}_4$$

となっている.

zero-part $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_4)_0 = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_4)^{\mathbb{Q}^\times I_4}$ の $\mathbb{Q}$ 上の生成元として

$$y_1 := x_1/x_2, \quad y_2 := x_3/x_2, \quad y_3 := x_1 x_3 / x_2 x_4$$

を選ぶことができ、 $\mathbb{Q}(y_1, y_2, y_3)$ への $\alpha := A \bmod A^4$, $\beta := B \bmod A^4$ の作用は

$$\alpha : (y_1, y_2, y_3) \mapsto (1/y_2, y_1/y_3, -1/y_3), \quad \beta : (y_1, y_2, y_3) \mapsto (1/y_1, y_2/y_1, -y_3/y_1^2)$$

となっている. $\mathbb{Q}(y_1, y_2, y_3)$ の $G_0 := \langle \alpha, \beta \rangle$ による固定体を求めるために, 次の正規列に沿って考察を進める.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \triangleleft & \langle \alpha^2 \rangle & \triangleleft & \langle \alpha^2, \beta \alpha^2 \beta \rangle & \triangleleft & \langle \alpha^2, \alpha \beta \rangle & \triangleleft & \langle \alpha, \beta \rangle \\ & & \text{II} & & \text{II} & & \text{II} & & \text{II} \\ & & C_2 & & (C_2)^{\oplus 2} & & \mathfrak{A}_4 & & \mathfrak{S}_4 \end{array}$$

ただし $\mathfrak{A}_4$ は 4 次交代群である. 各 layer 対応する G の部分群は左からそれぞれ

$$\langle A^4 \rangle \cong C_2, \quad \langle A^2 \rangle \cong C_4, \quad \langle A^2, B A^2 B \rangle \cong Q_8, \quad H := \langle A^2, AB \rangle \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3), \quad G \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$$

になる. ただし Q_8 は位数 8 の四元数群である.

4.1 $\langle \alpha^2 \rangle$ -固定体

α^2 の $\mathbb{Q}(y_1, y_2, y_3)$ への作用は

$$\alpha^2 : (y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_3/y_1, -y_3/y_2, y_3)$$

である.

補題 4.1 (Hajja-Kang, 1994 (cf. [4])). 体 K 上の 2 変数有理関数体 $K(X_1, X_2)$ の K -involution

$$\sigma : (X_1, X_2) \mapsto (m_1/X_1, m_2/X_2) \quad m_1, m_2 \in K^\times$$

による固定体 $K(X_1, X_2)^{(\sigma)}$ は K 上

$$\frac{X_1^2 X_2^2 - m_1 m_2}{X_1(X_2^2 - m_2)}, \quad \frac{X_2(X_1^2 - m_1)}{X_1(X_2^2 - m_2)}$$

で生成される.

この補題から

$$\mathbb{Q}(y_1, y_2, y_3)^{(\alpha^2)} = \mathbb{Q}(s_1, s_2, s_3),$$

ただし

$$s_1 := y_3, \quad s_2 := \frac{y_1^2 y_2^2 + y_3^2}{y_2(y_1^2 - y_3)}, \quad s_3 := \frac{y_1(y_2^2 + y_3)}{y_2(y_1^2 - y_3)},$$

となっていることがわかる.

4.2 $\langle \alpha^2, \beta \alpha^2 \beta \rangle$ -固定体

$\beta \alpha^2 \beta$ の $\mathbb{Q}(s_1, s_2, s_3)$ への作用は

$$\beta \alpha^2 \beta : (s_1, s_2, s_3) \mapsto (1/s_1, -(1 + s_3^2)/s_2, s_3)$$

となっている. 従って, 補題 4.1 から

$$\mathbb{Q}(y_1, y_2, y_3)^{(\alpha^2, \beta \alpha^2 \beta)} = \mathbb{Q}(t'_1, t'_2, t'_3),$$

ただし

$$t'_1 := \frac{s_1^2 s_2^2 + 1 + s_3^2}{s_2(s_1^2 - 1)}, \quad t'_2 := \frac{s_1(s_2^2 + 1 + s_3^2)}{s_2(s_1^2 - 1)}, \quad t'_3 := s_3,$$

となっている.

4.3 $\langle \alpha^2, \alpha \beta \rangle$ -固定体

$\alpha \beta$ の $\mathbb{Q}(t'_1, t'_2, t'_3)$ への作用は

$$\begin{cases} t'_1 \mapsto (1 + 3t'_2{}^2 - 2t'_1{}^2 t'_2{}^2 + t'_1{}^4 t'_2{}^2 + 3t'_2{}^4 - 2t'_1{}^2 t'_2{}^4 + t'_2{}^6 + 3t'_3{}^2 + t'_1{}^2 t'_3{}^2 - 2t'_1{}^3 t'_2 t'_3{}^2 \\ \quad + 6t'_2{}^2 t'_3{}^2 - t'_1{}^2 t'_2{}^2 t'_3{}^2 + 3t'_2{}^4 t'_3{}^2 + 3t'_3{}^4 + t'_1{}^2 t'_3{}^4 + 3t'_2{}^2 t'_3{}^4 + t'_3{}^6) \\ \quad / t'_1{}^2 t'_3(-1 + t'_1 t'_2 - t'_2{}^2 - t'_3{}^2) \\ t'_2 \mapsto t'_1 t'_2 / t'_3(-1 + t'_1 t'_2 - t'_2{}^2 - t'_3{}^2) \\ t'_3 \mapsto (1 + t'_1 t'_2 + t'_2{}^2 + t'_3{}^2) / t'_1 t'_3 \end{cases}$$

という複雑な表示を持つ。しかし,

$$\begin{cases} t_1 := (1 + t'_3)/(-1 + t'_3) \\ t_2 := (1 + t'_1 t'_2 + t'^2_2 + t'_1 t'_3 + t'^2_3)/(1 + t'_1 t'_2 + t'^2_2 - t'_1 t'_3 + t'^2_3) \\ t_3 := (-1 + t'_1 + t'_1 t'_2 - t'^2_2 - t'^2_3)/(1 + t'_1 - t'_1 t'_2 + t'^2_2 + t'^2_3) \end{cases}$$

とおくと, これは $\mathbb{Q}$ 上の双有理変換, つまり $\mathbb{Q}(t'_1, t'_2, t'_3) = \mathbb{Q}(t_1, t_2, t_3)$ であって, $\alpha\beta$ の作用が

$$\alpha\beta : t_1 \mapsto t_2 \mapsto t_3 \mapsto t_1$$

と簡単になる。

補題 4.2 (Masuda-Kuniyoshi, 1955 (cf. [16, 12])). 体 K 上の 3 変数有理関数体 $K(X_1, X_2, X_3)$ への位数 3 の作用 $X_1 \mapsto X_2 \mapsto X_3 \mapsto X_1$ による固定体は, K 上

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3, & \frac{X_1^2 X_2 + X_2^2 X_3 + X_3^2 X_1 - 3X_1 X_2 X_3}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - (X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_3 X_1)}, \\ \frac{X_1 X_2^2 + X_2 X_3^2 + X_3 X_1^2 - 3X_1 X_2 X_3}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - (X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_3 X_1)} \end{cases}$$

によって生成される。

この補題によって

$$\mathbb{Q}(y_1, y_2, y_3)^{\langle \alpha^2, \alpha\beta \rangle} = \mathbb{Q}(u_1, u_2, u_3),$$

ただし

$$\begin{cases} u_1 := t_1 + t_2 + t_3 \\ u_2 := \frac{t_1^2 t_2 + t_2^2 t_3 + t_3^2 t_1 - 3t_1 t_2 t_3}{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)} \\ u_3 := \frac{t_1 t_2^2 + t_2 t_3^2 + t_3 t_1^2 - 3t_1 t_2 t_3}{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)} \end{cases}$$

となることがわかる。

4.4 $\langle \alpha, \beta \rangle$ -固定体

α の $\mathbb{Q}(u_1, u_2, u_3)$ への作用は

$$\alpha : (u_1, u_2, u_3) \mapsto (-u_1, -u_3, -u_2)$$

と計算される。この作用による $\mathbb{Q}(u_1, u_2, u_3)$ の固定体は $\mathbb{Q}(u_1^2, u_1(u_2 + u_3), u_2 - u_3)$ となることは容易にわかる。従って次の結果を得る。

命題 4.3. $\mathbb{Q}(y_1, y_2, y_3)$ の $\langle \alpha, \beta \rangle$ の作用による固定体は

$$\mathbb{Q}(u_1^2, u_1(u_2 + u_3), u_2 - u_3)$$

である.

以上と補題 2.3 から, $(\mathbb{Q}, G)$ 及び $(\mathbb{Q}, H)$ に対する LinearNP の肯定解が具体的に得られた.

定理 4.4. $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_4)^G$ は $\mathbb{Q}$ -有理的であり, $\mathbb{Q}$ 上

$$u_1^2, u_1(u_2 + u_3), u_2 - u_3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

によって生成される.

定理 4.5. $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_4)^H$ は $\mathbb{Q}$ -有理的であり, $\mathbb{Q}$ 上

$$u_1, u_2, u_3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

によって生成される.

従って, 補題 2.1 から主結果が導かれる.

定理 4.6 (Rikuna 2003, [20]). $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ 及び $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ に対する $\mathbb{Q}$ 上の PermNP は肯定的である.

これらの結果から 4 個のパラメーターを持つ $\mathbb{Q}$ -生成的多項式が具体的に計算できるが, 複雑すぎてここに表示することができない.

参考文献

- [1] H. Ahmad, M. Hajja, and M. Kang, *Rationality of some projective linear actions*, J. Algebra **228** (2000), no. 2, 643–658.
- [2] G. Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, Math. Ann. **44** (1894), 125–155.
- [3] F. R. DeMeyer, *Generic polynomials*, J. Algebra **84** (1983), no. 2, 441–448.
- [4] M. Hajja and M. Kang, *Three-dimensional purely monomial group actions*, J. Algebra **170** (1994), no. 3, 805–860.
- [5] K. Hashimoto, A. Hoshi, and Y. Rikuna, *Noether's problem and $\mathbb{Q}$ -generic polynomials for the affine transformation groups over $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ and its subgroups of exponent 8*, preprint.

- [6] D. Hilbert, *Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten*, J. Reine Angew. Math. **110** (1892), 104–129.
- [7] C. Jensen, A. Ledet, and N. Yui, *Generic polynomials, constructive aspects of the inverse Galois problem*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Cambridge, 2003.
- [8] M. Kang, *The rationality problem of finite group actions*, First International Congress of Chinese Mathematicians (Beijing, 1998), AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 20, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 211–218.
- [9] G. Kemper, *A constructive approach to Noether's problem*, Manuscripta Math. **90** (1996), no. 3, 343–363.
- [10] G. Kemper, *Generic polynomials are descent-generic*, Manuscripta Math. **105** (2001), no. 1, 139–141.
- [11] G. Kemper and E. Mattig, *Generic polynomials with few parameters*, Algorithmic methods in Galois theory, J. Symbolic Comput. **30** (2000), no. 6, 843–857.
- [12] H. Kuniyoshi, *On a problem of Chevalley*, Nagoya Math. J. **8** (1955), 65–67.
- [13] W. Kuyk, *On a theorem of E. Noether*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **67** = Indag. Math. **26** (1964), 32–39.
- [14] F. Lalande, *Réalisation de produits en couronne comme groupe de Galois de polynômes réciproques et construction de polynômes génériques*, With an appendix by J. Oesterlé, Acta Arith. **103** (2002), no. 1, 9–20.
- [15] H. W. Lenstra, *Rational functions invariant under a finite abelian group*, Invent. Math. **25** (1974), 299–325.
- [16] K. Masuda, *On a problem of Chevalley*, Nagoya Math. J. **8** (1955), 59–63.
- [17] T. Miyata, *Invariants of certain groups I*, Nagoya Math. J. **41** (1971), 69–73.
- [18] E. Noether, *Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe*, Math. Ann. **78** (1916), 221–229.
- [19] M. Oura and Y. Rikuna, *On three-dimensional linear Noether's problem*, preprint.
- [20] Y. Rikuna, *Noether's problem for $SL_2(\mathbb{F}_3)$* , preprint.

- [21] J. -P. Serre, *Cohomological invariants, Witt invariants, and trace forms*, Notes by S. Garibaldi, Univ. Lecture Ser., 28, Cohomological invariants in Galois cohomology, 1–100, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [22] R. G. Swan, *Invariant rational functions and a problem of Steenrod*, Invent. Math. 7 (1969), 148–158.
- [23] O. Zariski, *On Castelnuovo's criterion of rationality $p_a = P_2 = 0$ of an algebraic surface*, Illinois J. Math. 2 (1958), 303–315.

陸名 雄一

日本学術振興会特別研究員 PD

東京都立大学大学院理学研究科数学教室

192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1

E-mail: rikuna@math.metro-u.ac.jp

Yūichi RIKUNA

Postdoctoral Fellow of JSPS

Department of Mathematics

Tokyo Metropolitan University

1-1, Minami-Ohsawa, Hachioji-shi

Tokyo, 192-0397 Japan