

非支配的な場合の "non-regularity" について

東京水産大 山田作太郎 (Sakutarō Yamada)

§1. 序

同じパラメーター空間 Θ をもつ2つの実験を $E = (X, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta; \theta \in \Theta\})$, $F = (Y, \mathcal{B}, \mathcal{Q} = \{Q_\theta; \theta \in \Theta\})$ とする。

定義1 (Blackwell [1]).

F が E に対して十分

$\Leftrightarrow (Y, \mathcal{B})$ から $(X, \mathcal{A})$ への Markov 核 $T(y, A)$ が存在して

$$P_\theta(A) = \int T(y, A) Q_\theta(dy)$$

が任意の A , θ に対して成り立つ。

今, $Y = X$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, $Q_\theta = P_\theta|_{\mathcal{B}}$ (P_θ の $\mathcal{B}$ への制限) とし, $\mathcal{B}$ は E に対して通常の意味で十分とし, $A \in \mathcal{A}$ の $\mathcal{B}$ を与えたときの, $P_\theta \in \mathcal{P}$ に共通な条件つき確率を $E(I_A | \mathcal{B})$ で表わすと

$$P_\theta(A) = \int E(I_A | \mathcal{B})(x) P_\theta|_{\mathcal{B}}(dx) \quad (*)$$

が任意の $A \in \mathcal{A}$, $\theta \in \Theta$ に対して成り立つ。ここでもし, $E(I_A | \mathcal{B})(x)$ が任意の $x \in X$ に対して, $\mathcal{A}$ 上の確率測度なら

$\bar{\mu} \equiv E(B)$ は E に対して定義1の意味で十分であるが、そのような正則な条件つき確率は必ずしも存在しない ([4])。

Le Cam ([5]) は、この困難をさけるため Markov 核をそのまま扱わないで、 T から生成される、有界符号測度の空間の間の作用素

$$T: M^b(Y, B) \longrightarrow M^b(X, A)$$

$$(T\mu)(A) = \int T(y, A) \mu(dy)$$

のもつ性質

(a) linear

(b) positive ($\mu \geq 0 \Rightarrow T\mu \geq 0$)

(c) positively isometric ($\mu \geq 0 \Rightarrow \|\mu\| = \|T\mu\|$)

を抽出して *transition* と名づけた。ここに $M^b(X, A)$ は (X, A) 上の有界符号測度の全体で、(c) のノルムは全変動のそれとする。 $M^b(X, A)$ は抽象 L -空間で、Dedekind 完備であり、従って、Riesz の分解定理 (Schaefer [9]) より、

$$M^b(X, A) = \{P \text{ より生成される } M^b(X, A) \text{ の band} \} \oplus P^\perp$$

が成り立つ。従って、 P の各元と直交する $\mu \in M^b(X, A)$ は考える必要はないだろうから、 $M^b(X, A)$ 全体を考える必要はなく、 P から生成される $M^b(X, A)$ の band, $L(E)$ とするす、に制限してもよいだろう。 $L(E)$ を実験 E の L -空間という。

定義 2 (Le Cam [5]).

$L(F)$ から $L(E)$ への linear, positive, positively isometric な写像を実験 F から実験 E への transition という。

定義 3 ($Le\ Cam$ [5])

$$\delta(F, E) = \inf_T \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \|TQ - P\|$$

を F の E に対する deficiency という。ここに T は F から E への transition 全体を動く。

従って, $TQ = P$ が任意の $Q \in \mathcal{Q}$ に対して成り立つ transition T が存在すれば $\delta(F, E) = 0$ となる。そしてこのことは, “適当に制限された決定問題に対しては, 実験 E は忘れて実験 F のみを実行しても損失はない” ことと同値であることが知られている ([5])。そして $Le\ Cam$ ([5]) は有界可測関数を $L(E)$ の双対空間 $M(E)$ — 実験 E の M -空間という — の元とみなし, E の部分実験は $M(E)$ のいくつかの条件をみたす部分空間と定義された。この定義はむしろ, 必ずしも部分 σ -代数に対応する部分実験ばかりとは限らない。そして部分実験 F が E に対して十分であることの定義を射影によって与え, その十分性と $\delta(F, E) = 0$ の同等性を示した (この十分等の定義は省略する)。

§ 2. 目的と結果

ここでは, 非支配的な場合に, $Le\ Cam$ の transition を用

いて、部分σ-代数による部分実験のもと実験に対する deficiency が 0 になるための十分条件と、そのときに (4) と同じ式が $\mathcal{A}$ 空間の対応に現われる (transition の表現) ことを示す結果を紹介する。

これらの結果においては、実験の pivotal 測度が重要な役割を果たす。実は我々の研究も pivotal 測度の研究からスタートした。

必要な定義と定理をまず列挙しよう。

定義 4 ([3], [10]).

実験 $E = (X, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta; \theta \in \Theta\})$ が majorized であるとは、支配測度 μ が存在することをいう。すなわち、各 P_θ が μ に関して密度をもつことである。

定義 5 ([3]). $E = (X, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_\theta; \theta \in \Theta\})$ は実験とする。 $C_\theta \in \mathcal{A}$ は次の条件をみたすとき P_θ の (E に対する) carrier といわれる。

$$(a) \quad P_\theta(C_\theta) = 1$$

$$(b) \quad A \subset C_\theta, \quad P_\theta(A) = 0 \quad \text{ならば} \quad A \text{ は } \mathcal{P}\text{-零集合.}$$

$\mathcal{A}$ の部分σ-代数 $\mathcal{B}$ が、各 P_θ に対して P_θ の 1 つの carrier を含むとき carriers を含むという。

定理 1 ([2]).

実験 E に対して各 P_θ は carrier をもつとする。このとき E

に対する同値 (つまり μ と支配測度が同じ零集合をもつ) な支配測度が存在する。

定義6 ([8]).

E は *majorized* な実験とする。 E の同値な支配測度 μ が E に対する *pivotal* 測度である

$\Leftrightarrow$ 任意の $B \subset A$ に対して,

「 B が μ 十分 *carriers* を含む $\Leftrightarrow$ 任意の P_0 に対して, P_0 の μ に関する密度の *version* で B -可測なものが取れる」 が成り立つ。

定理2 ([8]).

E は *majorized* な実験とする。 E に対する *pivotal* 測度が存在する。

定義7 ([6]).

支配測度として局所化可能な測度がとれる実験は *weakly dominated* であるといわれる。ここに, (X, A) 上の測度 m が局所化可能であるとは, m -測度有限な A -可測集合の任意の族 $\mathcal{E}$ に対して, その上限 $\text{ess-sup}_m \mathcal{E} \in A$ が存在することという。

定理3 ([7]).

実験が *weakly dominated* ならば, 最小 σ -代数が存在する。

定理 4 ([3]).

実験 $E = (X, \mathcal{A}, \mathcal{P} = \{P_0 : 0 \in \mathcal{P}\})$ は *weakly dominated* とする。
 E に対する同値な支配測度 η が E に対して *pivotal* であるための必要十分条件は、任意の十分な部分 σ -代数 $\mathcal{B}$ と、任意の P_0 に対して、 P_0 の η に関する密度の version で $\mathcal{B}$ -可測なものが取れることである。

次の定理は *pivotal* 測度が、(*)と同じタイプの関係式を有して、実験の比較と強く結びついていることを示している。

定理 5 ([1]).

実験 E は *weakly dominated* とする。 $\mathcal{B}_0$ を最小十分 σ -代数とする。 η は E に対する同値な支配測度とする。このとき η が E に対して *pivotal* であるための必要十分条件は

$$\eta(A) = \int E(|I_A| | \mathcal{B}_0) d\eta|_{\mathcal{B}_0}, \quad A \in \mathcal{A},$$

が成り立つことである。

定理 6 ([1]).

E は *majonized* な実験とする。 $\mathcal{B}$ は対十分で *carriers* を含むとする。このとき $S(E(\mathcal{B}), E) = 0$ 。

この定理は次のようにして示される。 η を E に対する *pivotal* 測度としたとき、 η は E に対して、 $\eta|_{\mathcal{B}}$ は $E|_{\mathcal{B}}$ に対して同値な支配測度である。従って、次の補題より

$$T_n : L(E(\mathcal{B})) \longrightarrow L(E)$$

を $f \cdot \eta|_B \longrightarrow f \cdot \eta$, $f \in L^1(X, B, \eta|_B)$ で定義すると, T_η は transition であり, かつ $T_\eta P_0|_B = P_0$, $0 \in \oplus$ が成り立つことから従う。

補題 ([10]).

η は E に対する同値な支配測度とすると, $L(E) = \{f \cdot \eta; f \in L^1(X, A, \eta)\}$ が成り立つ。ここに $f \cdot \eta$ は η に関して密度 f をもつ符号測度を表わす。

この定理もは, 拡大された transition の性質 $T_\eta P|_B = P$ を示すのに, 十分核 $E(I\eta|_B)$ を当惑させる必要のないことを示す。Le Cam の実験の比較の定義が "弱い" ものであることを示している。そして, その時に pivotal 測度の果たす役割もその証明中に示されている。

しかし, 十分な部分 σ -代数に対しては, deficiency が 0 であるのみならず, deficiency を 0 にする transition T_η を pivotal 測度 η から定理 6 のようにしてつくと, これが L -空間の対応として, (*) と同じ表現をもつ (T_η の表現) ことになる。即ち

定理 7 ([11]).

$E = (X, A, \mathcal{P} = \{P_\alpha; \alpha \in \oplus\})$ は weakly dominated とし, B は十分 σ -代数とする。 η は E に対する pivotal 測度とし

$$T_\eta: L(E|_B) \longrightarrow L(E)$$

$$\& \quad f \cdot n|_B \longrightarrow f \cdot n, \quad f \in L^1(X, B, n|_B)$$

で定義すると、これは transition で、 $T_n P_0|_B = P_0$, $a \in \mathbb{R}$,

をみたし (従って $S(E(B), E) = 0$ で)、さらに

$$T_n(f \cdot n|_B)(A) = \int E(I_A|B)(x) (f \cdot n|_B)(dx), \quad A \in \mathcal{A} \quad \dots (**)$$

が成り立つ。

(*) で、 $f = dP_0|_B/dn|_B$ とおくと (*) に一致する。

なお、ここで B について正則な条件つき確率の存在を仮定していないことに注意する。つまり、Le Cam の transition は、この様に、我々が十分に期待していることに答えてくれるものであつて、その時に pivotal 測度が本質的な役割を果たすことをこの定理はのべている。定理 5 と (*) の証明には、pivotal 測度の又別の性質を利用しなければいけないのでここでは省略する。

参考文献

- [1] Blackwell, D. : Equivalent comparisonsof experiments, Ann. Math. Statist. 24(1953), 265-272.
- [2] Diepenbrock, F.R. : Charakterisierung einer allgemeineren Bedingung als Dominierttheit mit Hilfe von lokalisierten Massen, Thesis: University of Münster, 1971.
- [3] Ghosh J.K., H. Morimoto and S. Yamada: Neyman factorization and minimality of pairwise sufficient subfields, Ann. Statist. 9(1981), 514-530.
- [4] Halmos P.R. : Measure theory, van Nostrand, 1950.
- [5] Le Cam, L. : Sufficiency and approximate sufficiency, Ann. Math. Statist. 35(1964), 1419-1455.
- [6] Mussmann, D. : Vergleich von Experimenten in schwach diminierten Fall, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete. 24(1972), 295-308.
- [7] Pitcher, T.S. : A more general property than domination for sets of probability measures, Pacific J. Math. 15(1965), 597-611.
- [8] Ramamoorthi, R.V. and S. Yamada: Neyman factorization theorems for experiments admitting densities, Sankhya 45 (1983), Series A. 168-180.
- [9] Schaefer, H.H. : Banach Lattices and positive operators, Springer-Verlag, 1974.
- [10] Siebert, E.: Pairwise sufficiency, Z. Wahrscheinlichkeits- theorie und verw. Gebiete. 46(1979), 237-246.
- [11] Yamada, S. : A note ona representation of a transition by pivotal measures, in preparation.