

2010 FIFA World Cup の数理解析について

日本大学 文理学部, 古市 茂 (Shigeru Furuichi)
College of Humanities and Sciences, Nihon University,
早稲田大学理工学術院, 日野 英逸 (Hideitsu Hino)
Faculty of Science and Engineering, Waseda University

1 はじめに

対戦結果に基づくスポーツチームの順位付けは、多くのスポーツファンの関心事である。例えば、日本の伝統文化的スポーツである大相撲に関する数学的順位付け問題を解析した論文が最近、出版されたりもしている [1]。南アフリカで開催された 2010 FIFA World Cup サッカーはスペインの初優勝で幕を閉じた。日本もグループリーグを突破し、ベスト 8 をかけた試合では惜しくも PK 戦の末、敗れたものの多くのメディアの報道も手伝ってサッカーファンならずとも多くの国民の関心を得ることとなった。

2010 FIFA World Cup は予選リーグを通過したチームによる決勝トーナメント方式を採用しているため、上位 4 位までのチームの順位は明らかになるが、5 位以下のチームの順位（ランキング）は不明である。World Cup の対戦データとして、出場国 32 チームそれぞれが対戦したチームから何点取得したかという対戦表が得られる。しかし、予選リーグ、決勝トーナメントをあわせてもごく一部のチーム同士の対戦（本稿における解析手法で用いるのは 3 位決定戦を除く 63 戦）しか行われていないため、利用出来る対戦表は非常に疎な行列である。このような不完全な観測データに基づくチームのランキング問題は例えば [3, 4] で研究されており、さまざまな問題に適用されている [5, 6, 7, 8]。また、ランキングの問題は統計学の観点からも盛んに研究が行われており [9]、特に Bradley-Terry モデル [10, 11] が代表的な順位付け問題の確率モデルの一つである。Bradley-Terry モデルは、個々のチームに強さのパラメータを与え、観測した対戦結果をパラメータに基づく確率モデルで説明するものである。しかし、確率モデルのパラメータを観測した対戦データから推定するため、各チーム同士が十分な数の対戦を行っていない場合には安定した推定は期待できない。そこで我々は、Keener [3] が提案したペロン・フロベニウスの定理を基礎とした順位付け法を用いて、参加 32 チームの順位（パフォーマンス）を決定し、英国 BBC ニュースが World Cup の対戦成績を考慮して発表した順位（パフォーマンス）と比較し、シンプルな数学的手法による順位付けの妥当性を検証する [2]。（もちろん BBC ニュースによる見解を万人が認めるものとは言えないが、本稿では 1 つの参考値として採用する。）

第 4 節において、重み付き関数を導入することで、ランキングの際に勝敗を重視するか得点を重視するかを連続的に変化させ、実際に FIFA World Cup の参加チームに対して BBC ニュースが付けたランキングの特徴付けを行う。第 5 節では、Shannon エントロピー、von Neumann エントロピー及び min-max distance を用いて予選グループ内での接戦の度合いを定量的に解析する手法も合わせて考察する。最終節において、Bradley-Terry モデルを用いた順位付けを 2 つの場合（ウェイトの有無）で行い、これらと BBC ニュースの見解とを比較し、議論する。

2 Keener のランキング法

チーム同士の対戦結果が得られているときに、それを元にしたランキング行列を作成し、ペロン・フロベニウスの定理を用いてチームの強さを順位付けする手法が Keener により提案されている [3]。

まず, Keener の手法の基礎となるペロン・フロベニウスの定理を記す。

ペロン・フロベニウスの定理 ([3, 12, 13, 14]): 実正方行列 A の全ての要素が非負の時, 全ての要素が非負である固有ベクトルが存在し, その固有値は正である。さらに, 行列 A が既約の場合, そのような固有ベクトルは一意に定まり, 対応する固有値は行列 A の最大の固有値に一致する。

本研究では, チームの対戦結果に基づき生成した, 全成分が非負で既約 [15] な行列をランキング行列と呼び, ランキング行列の固有ベクトルで全ての成分が正であるようなベクトルをランキングベクトルと呼ぶ。次に, ランキング行列の構成方法を述べる。チーム i がチーム j との対戦で獲得した点数を S_{ij} とする。なお, この得点 S_{ij} には PK 戦による得点は含めない。この得点 S_{ij} を用いて, ランキング行列 $R = (r_{ij})$ を次式で定義する:

$$r_{ij} = \frac{S_{ij} + 1}{S_{ij} + S_{ji} + 2}. \quad (1)$$

ただし, 自分自身との対戦は不可能なので $r_{ii} = 0$ とする。単純ではあるが, $r_{ij} = \frac{S_{ij}}{S_{ij} + S_{ji}}$ のような定義では, 無得点ドローの場合に分母がゼロになり r_{ij} は定義されなくなる。次に, PK 戦による得点も考慮するため, 次式のように定義を修正する:

$$r_{ij} = \frac{S_{ij} + 1 + pP_{ij}}{S_{ij} + S_{ji} + 2 + p(P_{ij} + P_{ji})}. \quad (2)$$

ランキング行列の成分 r_{ij} の定義 (2) において, 分母と分子にそれぞれ 1, 2 を加えたのは, 無得点ドローの場合を考慮するためである。また, P_{ij} は, トーナメントにおいて勝敗を決定するために行われた PK 戦における得点であり, 小さい正数 p (本研究における実験では $p = 0.1$ または $p = 0.01$) を乗じてランキング行列に反映させている。付録 B に示す World Cup の対戦結果に基づき, 上記の方法でランキング行列 R を作成した。得られたランキング行列は以下の形である:

$$R = \begin{pmatrix} A & AB & AC & AD & AE & AF & AG & AH \\ BA & B & BC & BD & BE & BF & BG & BH \\ CA & CB & C & CD & CE & CF & CG & CH \\ DA & DB & DC & D & DE & DF & DG & DH \\ EA & EB & EC & ED & E & EF & EG & EH \\ FA & FB & FC & FD & FE & F & FG & FH \\ GA & GB & GC & GD & GE & GF & G & GH \\ HA & HB & HC & HD & HE & HF & HG & H \end{pmatrix}.$$

行列 R のブロック $A, AB, \dots, H$ の具体的な数値は Appendix A に示す。なお, 対戦が一度も行われなかったチーム間に対応する r_{ij} には, 小さい正の数 h を与えた。以下の命題から, $h > 0$ が R が既約であるための十分条件であることが分かる:

命題 1 (page 361 in [15]): 全ての成分が非負である $n \times n$ 行列 A が既約であるための必要十分条件は, 行列 $(I + A)^{n-1}$ の全ての成分が正であることである。

本稿では $h = 0.1$ とした。なお, World Cup の対戦結果に基づくランキング行列においては, h は決勝トーナメントに進出出来なかったチームにペナルティを与えることに相当する。また, 既約であるための必要十分条件は他にもグラフが強連結であるなど幾つの特徴付けがされている。本論からは離れるが, 最近の関連する話題として, 検索サイト Google が用いている検索アルゴリズムの pagerank に関する研究があり [16], この pagerank ベクトルとランキングベクトルが一致することがスライド [17] で取り上げられていることを報告しておく。

ランキング行列 R を基に, 以下の手順でランキングベクトルを計算する。ランキング行列 R の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_{32}$ とする。ただし $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_{32}|$ とする。任意の初期ベクトル $x_0 \neq 0$ に対して, $x_k = Rx_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$), によってベクトル x_k を更新し, 収束したベクトルが, 最大固有値

λ_1 に対応する固有ベクトル, すなわちランキングベクトル x となる (べき乗法: [13]). ペロン・フロベニウスの定理により λ_1 は正であることと, x の全成分が非負であること及びその一意性が保証されている. こうして, World Cup の対戦結果に基づくランキング行列 R から, 32 次元の非負成分を持つランキングベクトル x が得られる. Keener は, このランキングベクトルの各要素が, 各チームの “強さ” に対応すると主張している.

3 解析結果とその解釈

2010 FIFA World Cup の対戦結果を基に構成したランキング行列のランキングベクトルを表 1 に示す. 表 1 の左の列は, BBC が公表した World Cup 参加チームの順位 (パフォーマンス) である [18]. 中央の列は, 我々の解析による結果であり, 各チームに対応するランキングベクトルの値と共に示してある. 右の列は, 各予選グループリーグ内での対戦結果を基に同様の手法で計算したランキングとランキングベクトルの値と, グループリーグ内の順位で並べたチーム名である. このランキングベクトルの値は, World Cup における各チームのパフォーマンスを数値化したものと考えることが出来る. BBC によるランキングは, 次のようにして定められていると考えられる. まず, 上位 4 チームは World Cup の結果から一意に定まる. 5 位以下のチームについては, FIFA が公式に発表している World Cup 直前の世界ランキングを勘案しつつ, 決勝トーナメントに進出したか否か, グループリーグ内でどの程度の得点差で勝利したかなどに基づき参加 32 チームの順序がつけられたと考えられる. 以下, 我々が得たランキングベクトルの値と BBC による順位 (パフォーマンス) について議論を行う:

- (i) 両方のランキングで, 1 位から 4 位までは実際の試合によって定まった順位と一致しており, 両ランキングともに上位 4 チームは妥当な順位付けが行われていると考えられる.
- (ii) 両ランキングにおいて, 5 位と 6 位のチームの順序が入れ替わっている. アルゼンチンは準々決勝においてドイツに 0-4 で敗北しており, 同じく準々決勝で 1-2 でオランダに敗北したブラジルのほうが (我々の結果にあるように) 上位にランクされることは不自然ではない.
- (iii) 9 位と 10 位のチームに注目する. 我々の順位付けでは, ポルトガルが日本より上位にランクされている. ポルトガルは優勝国スペインに 0-1 という僅差で敗北したのに対し, 日本は予選リーグにおいて 2 位のオランダに同じく 0-1 で敗北している. このため, より上位のチームと接戦を繰り広げたポルトガルが上位にランクされているという解釈ができる. つまり, 我々のランキングでは, 上位チームとの対戦成績を自然に考慮することが出来ていると考えられる.
- (iv) 実際の対戦結果の上ではスイスは決勝トーナメントに進出できず, ベスト 16 には含まれていない. しかし, 我々の順位付けにおいては 16 位になっている. これは, 予選グループリーグにおいてスイスは優勝国スペインに 1-0 で唯一勝利していることから妥当な順位であろう.
- (v) 最後に, BBC による順位 (パフォーマンス) とどの程度整合した結果が得られたかを評価する. 評価の尺度としては, ランキングのような順序データ同士に定義される順序相関の一つである, Kendall の τ を用いる [19]. n 個の項目 $i_1, i_2, \dots, i_n$ からなる 2 つの順序データ o_1, o_2 があり, 二つの項目の大小関係が o_1, o_2 において一致するものの数を P とするとき, Kendall の τ は

$$\tau(o_1, o_2) = \frac{4P}{n(n-1)} - 1 \quad (3)$$

で定義され, o_1 と o_2 に含まれる項目の順序が完全に一致するときに 1 を, 完全に逆順の場合には -1 を取る. なお, 順序相関としてよく利用されるものには, Kendall の τ の他に Spearman の順位相関係数 ρ がある [20]:

$$\rho(o_1, o_2) = 1 - \frac{6 \sum D^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (4)$$

表 1: FIFA 2010 World Cup standings by BBC and our estimated rankings

Standings by BBC		Ranking vector ($p = h = 0.1$)			Separated groups		
1	Spain	1.000000	Spain	H	0.84565	Uruguay	A
2	Netherlands	0.934204	Netherlands	E	0.642791	Mexico	A
3	Germany	0.892656	Germany	D	0.571103	South Africa	A
4	Uruguay	0.84565	Uruguay	A	0.566844	France	A
5	Argentina	0.777298	Brazil	G	0.751968	Argentina	B
6	Brazil	0.751733	Argentina	B	0.643342	South Korea	B
7	Ghana	0.737478	Ghana	D	0.543423	Greece	B
8	Paraguay	0.736237	Paraguay	F	0.565094	Nigeria	B
9	Japan	0.687767	Portugal	G	0.656321	United States	C
10	Chile	0.675398	Japan	E	0.646535	England	C
11	Portugal	0.660551	Chile	H	0.592683	Slovenia	C
12	United States	0.655683	United States	C	0.555554	Algeria	C
13	England	0.646202	England	C	0.893764	Germany	D
14	Mexico	0.643384	South Korea	B	0.737478	Ghana	D
15	South Korea	0.642834	Mexico	A	0.579806	Australia	D
16	Slovakia	0.637414	Switzerland	H	0.618878	Serbia	D
17	Ivory Coast	0.631075	Slovakia	F	0.93465	Netherlands	E
18	Slovenia	0.618225	Serbia	D	0.675398	Japan	E
19	Switzerland	0.609342	Ivory Coast	G	0.562358	Denmark	E
20	South Africa	0.604381	New Zealand	F	0.567591	Cameroon	E
21	Australia	0.595709	Italy	F	0.736237	Paraguay	F
22	New Zealand	0.5924	Slovenia	C	0.631142	Slovakia	F
23	Serbia	0.579039	Australia	D	0.604243	New Zealand	F
24	Denmark	0.571035	South Africa	A	0.59557	Italy	F
25	Greece	0.567118	Cameroon	E	1.000000	Spain	H
26	Italy	0.56703	France	A	0.660789	Chile	H
27	Nigeria	0.564888	Nigeria	B	0.637625	Switzerland	H
28	Algeria	0.561879	Denmark	E	0.557468	Honduras	H
29	France	0.557254	Honduras	H	0.777611	Brazil	G
30	Honduras	0.555296	Algeria	C	0.688029	Portugal	G
31	Cameroon	0.54321	Greece	B	0.609593	Ivory Coast	G
32	North Korea	0.503622	North Korea	G	0.503834	North Korea	G

ここで D は順序データ o_1, o_2 内の 2 つの項目の順位の差であり、和は全ての 2 つの項目の取り方について考える。Kendall の τ と同様に Spearman の相関係数も算出したが、Kendall の τ と同様の傾向を示したため、本稿では τ の値のみを示す。

BBC による順位付けと我々の順位付けのとの間で、Kendall の τ は 0.8548387 であった。これは両者が相当な度合いで類似していることを意味しており、ランキング行列とペロン・フロベニウスの定理に基づく順位付け手法の妥当性を支持するものである。なお、上記の考察のように、BBC によるランキングには反映されていない上位チームとの対戦成績が我々の順位付けには反映されていることがあるため、必ずしも BBC によるランキングと一致していることが“正しい”順位付けであるとは言えないことに注意する必要がある。

次に、表 1 の右の列に注目する。グループ B, D, E において、実際の勝敗によって決まった 3 位と 4 位のチームのランキングベクトルの対応する成分の大きさが逆転していることが分かる。我々の順位付けにおいては、ランキング行列の列の総和が大きいチームに大きなスコアを与える傾向がある。この傾向により、グループ B と D における 3, 4 位の逆転は説明できる。しかし、グループ E における順位の逆転はこの傾向によっては説明がつかない。この現象は以下のような理由によるものであると考えられる。グループ E において 3 位であったデンマークは、グループ E で 1 位のオランダに 0-2 で敗北したのに対し、カメルーンは 1-2 でオランダに敗北している。従って、上述の (iii) で述べたように、我々の順位付けにおいては上位チームと接戦であったチームにより大きなポイントが与えられるという性質によってグループ E における 3, 4 位の順位の逆転は説明可能である。

4 連続的重み付け関数によるランキング傾向の解析

前節で得られた結果は、対戦結果として勝敗と獲得点数の両方に依存している。本節では、一つのパラメータを導入することで、勝敗と獲得点数の重視の度合いを連続的に変化させたランキングベクトルの生成方法を提案する。例として、予選グループ E を考える。Appendix A に、行列 $E = (e_{ij})$ が示してある。非負パラメータ $w > 0$ を用いて、重み付きランキング行列 W を、

$$W = (w_{ij}), w_{ij} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \left(e_{ij} - \frac{1}{2} \right) |2e_{ij} - 1|^{\frac{1}{w}} \quad (5)$$

で定義する。このパラメータ $w > 0$ は以下のような意味を持っている。パラメータの範囲が $0 < w \leq 1$ のとき、式 (5) で定義される重み関数は、格差縮小関数 (reducing difference function) と呼ばれ、この場合獲得点数をより重視してランキングを考えることになる。一方、 $w \geq 1$ のときは式 (5) の重み関数は格差拡大関数 (expanding difference function) と呼ばれ、この場合は獲得点数よりも勝敗を重視してランキングを考えることになる [2, 5]。

パラメータ w がランキング行列 W に与える影響についてより詳しい説明をする。図 1 (左) は、重みが付けられた要素 w_{ij} と、元の要素 e_{ij} の対応を $w = 1, 0.5, 0.2, w = 0.1$ の時にそれぞれ表したものである。まず、チーム j にチーム i が勝利したとき、式 (1) 及び (2) より、それぞれのチーム i, j には $e_{ij} > 0.5$, $e_{ji} = 1 - e_{ij} < 0.5$ を満たすポイントが与えられることが分かる (当然、引き分けの場合には $e_{ij} = e_{ji} = 0.5$ である)。図 1 より、 e_{ij} と e_{ji} の差は w が小さくなるに従って小さくなるが見て取れる。同様に、図 1 より、 e_{ij} と e_{ji} の差は w が大きくなるに従って大きくなるが分かる。表 2 に、重み付きのランキング行列 W の要素の例を示す。この表から、2 つのチームに与えられたポイントの差はパラメータ w に対応して単調増加することが分かる。つまり、 $w = 0.1$ のときは、両者の差は非常に小さいが、 $w = 10$ のときには両者の差は非常に大きくなる。(なお、 $w = 1$ のときは、両チームに与えられるポイントは式 (1) によって計算されるオリジナルのポイントと一致し、重みを考慮しないランキング行列 E の値は 0.75, 0.25 となっている。)

重み付き関数の持つ意味をより深く理解するために、次のような 2 つの極端な状況を考える。

- (i) チーム i とチーム j が対戦し、スコアが 10 vs 9 のとき。
- (ii) チーム i とチーム j が対戦し、スコアが 10 vs 1 のとき。

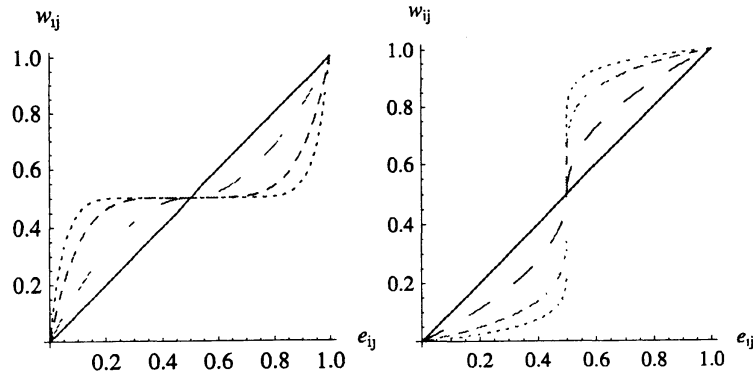


図 1: Left: The weighted function for $w = 1$ (solid curve), $w = 0.5$ (long dashed curve), $w = 0.2$ (dashed curve) and $w = 0.1$ (dotted curve). Right: The weighted function for $w = 1$ (solid curve), $w = 2$ (long dashed curve), $w = 5$ (dashed curve) and $w = 10$ (dotted curve).

表 2: 重み関数の例 (1)

	$w = 0.1$	$w = 0.2$	$w = 0.5$	$w = 1$	$w = 2$	$w = 5$	$w = 10$
Netherlands	0.500488	0.515625	0.625	0.75	0.853553	0.935275	0.966516
Denmark	0.499512	0.484375	0.375	0.25	0.146447	0.064725	0.033484

どちらの場合でも、勝利したチームは i であるが、(i) の場合には接戦であったのに対し、(ii) の場合は大差の対戦となっている。

表 3: 重み関数の例 (2)

	$w = 0.2$	$w = 0.5$	$w = 1$	$w = 2$	$w = 5$	$w = 10$
(w_{ij}, w_{ji}) in (i)	(0.5, 0.5)	(0.501, 0.499)	(0.52, 0.48)	(0.61, 0.39)	(0.77, 0.23)	(0.87, 0.13)
(w_{ij}, w_{ji}) in (ii)	(0.58, 0.42)	(0.74, 0.26)	(0.85, 0.15)	(0.92, 0.08)	(0.96, 0.04)	(0.98, 0.02)

表 3 に、二つの定義 (1) と (5) に従って計算した (w_{ij}, w_{ji}) を示した ($w = 1$ の時には $w_{ij} = e_{ij}$ かつ $w_{ji} = e_{ji}$ である)。(i) と (ii) のいずれの場合においても、 w_{ij} と w_{ji} の差は w が大きくなるにつれて大きくなることが分かる。これは、負けたチームに与えられる点数が低くなっていくためである。数字上のスコアの差は (i) の場合には $10 - 9 = 1$ であり $w_{ij} = 0.52$ と $w_{ji} = 0.48$ との差は小さいが、 $w = 10$ の時には w_{ij} と w_{ji} との差は非常に大きくなっていることがわかる。これは、 w が大きい時には、例えば接戦であった場合でも負けたチームへの評価が低くなっているためである。(i) と (ii) の場合を更に比較する。表 3 より、 $w = 1$ の時のポイントの差は、(i) の場合には $\Delta \equiv w_{ij} - w_{ji} = 0.04$ であり、(ii) の場合には $\Delta = 0.85 - 0.15 = 0.7$ であることが分かる。一方、 $w = 10$ の時には (i) の場合に $\Delta = 0.87 - 0.13 = 0.74$ 、(ii) の場合に $\Delta = 0.98 - 0.02 = 0.96$ である。 $w = 1$ の場合には 0.04 と 0.7 で 10 倍以上の大きな違いが生じるが、 $w = 10$ の場合には 0.74 と 0.96 であり大きな違いは生じない。従って、獲得した得点ではなく勝敗のみを重視したい場合には、パラメータを $w \geq 1$ とすれば良いことが分かる。 w を大きくすると、勝利したチームと敗北したチームの差異は明瞭になる。一方、 $w = 0.2$ のとき、(i) の場合には $\Delta \simeq 0$ であり (ii) の場合には $\Delta = 0.16$ である。これは、重みパラメータ w が小さい時には、得点差の小さい 2 チームに与えられるポイントの差は小さくなることを意味している。また、(ii) のように大きな点差がついている場

合には, w が小さくても w_{ij}, w_{ji} には大きな差がつく. 従って, 獲得点数を重視したい場合には, パラメータは $0 < w \leq 1$ のように小さく設定すべきであることが分かる.

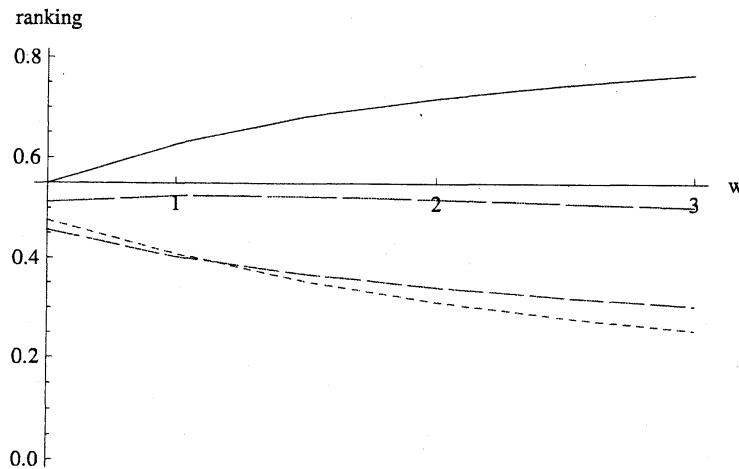


図 2: 提案する重み付け関数を用いた時の, グループ E の各チームのランキング. オランダ (solid curve), 日本 (long dashed curve), デンマーク (dashed curve), カメルーン (dotted curve).

図 2 は, グループ E に属する 4 チームのランキングベクトルを, パラメータが $0 < w \leq 3$ の場合に示したものである. パラメータが $0 < w \leq 1$ の時のランキングベクトルは, 勝敗よりも獲得点数を重視した順位付けに対応している. 一方, $w \geq 1$ の時のランキングベクトルは, 獲得点数よりも勝敗そのものを重視した順位付けに対応している. 図 2 より, 我々の提案するランキング法は, $w \geq 1.2$ としたときに BBC によるランキングと良く合致することが分かる. この連続的な重みパラメータの導入により, 所与のランキング行列がどのような傾向 (勝敗重視あるいは獲得点数重視など) をもって作られたものなのかを判断することが可能となる.

5 エントロピーを用いた接戦度合いの解析

FIFA 2010 World Cup では, 4 チームから成るグループでまず予選を行い, その上位 2 チームが決勝トーナメントに進出するというシステムを採用している. 本節では, Shannon エントロピーを用いることで, 各予選グループ内がどの程度接戦だったのかを解析する方法を提案する. まず, Appendix A にある行列 $A, B, \dots, H$ それぞれに対してランキングベクトルを計算し, そのベクトルを総和が 1 になるように正規化して確率ベクトルを得る. 次に, 確率ベクトルに対して Shannon エントロピー [21] を計算する. Shannon エントロピーは, 確率分布 (ベクトル) $\{p_1, \dots, p_n\}$ に対して

$$H(p_1, \dots, p_n) \equiv - \sum_{j=1}^n p_j \log_2 p_j, \quad (6)$$

で定義される量である. Shannon エントロピーは常に非負であり, 不等式

$$H(p_1, \dots, p_n) \leq \log_2 n \quad (7)$$

が成立する. 等号は $p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ の時に, かつその時に限り成立する. 各グループリーグには 4 チームが存在するため, $S(p_1, \dots, p_4) \leq 2.0$ である. Shannon エントロピーが高いほど, そのグループに含まれるチームの強さは拮抗していることになり, そのグループでは接戦が繰り広げられたと考えられる.

表 4: エントロピーと、ランキングベクトルの最大値と最小値の差

	Shannon entropy	Distance Min-Max	von Neumann entropy
Group A	1.982399582	0.319891	1.78619
Group B	1.970466490	0.410982	1.73621
Group C	1.992161311	0.235491	1.79132
Group D	1.992224302	0.252678	1.83202
Group E	1.975109755	0.356906	1.74232
Group F	1.995540363	0.195682	1.80061
Group G	1.952120346	0.503972	1.71461
Group H	1.987297868	0.295993	1.79791

表 4 にエントロピーの値と、ランキングベクトルの最大値と最小値の差を示した。この表の結果と先に述べた Shannon エントロピーの性質を考えれば、グループ *F* がもっとも接戦であったことが容易に分かる。また、グループ *D* と *C* も比較的接戦であったことが分かる。一方、Shannon エントロピーの値が低く、ランキングベクトルの最大と最小値の差も大きいことから、グループ *G* は構成チーム同士の強さに大きな差があったと考えられる。これは、実際に北朝鮮がこのグループ *G* 内で全敗しており、最大で 11 点の点を取られていることから、実際の状況を反映した結果が得られたと言える。

また、接戦の度合いを表す量として適切か否かは別として von Neumann エントロピー [22] を計算した。各グループの行列（例えばグループ *A* ならば行列 *A*）から密度行列を $\rho_A \equiv \frac{|A|}{\text{Tr}[A]}$ (但し、 $|A| \equiv (A^*A)^{1/2}$) で定め、

$$S(\rho_A) \equiv -\text{Tr}[\rho_A \log_2 \rho_A]$$

によって計算した。(von Neumann エントロピーの $\log$ の底は通常 e であるが、ここでは Shannon エントロピーとの統一性を重視して 2 にした。) Singular value や正規化の与え方によって、ここでの von Neumann エントロピーは色々定義できるが、計算をした結果どれも同様の傾向を示したので、上記の定義によるもののみを示す。表から、von Neumann エントロピー: $S(\rho_J) \leq H(P_J)$: Shannon エントロピー (但し、 P_J は 4×4 のランキング行列 $J = A, B, C, D, E, F, G, H$ に対して、ランキングベクトルの成分を l_1 -ノルムで正規化したものを確率分布と見做した記号とする。) という関係がわかるが、本節における von Neumann エントロピーの示す意味は Shannon エントロピーほど明確なものではない。しかしながら、全体として、von Neumann エントロピーが高い値 (上位 3 位) と Shannon エントロピーが高いグループ (上位 3 位) に対応していることが分かる。また、ランキングベクトルの最大値と最小値の差の下位 3 のグループも 2 つのエントロピーの上位 3 グループに一致していることが分かり、大まかな指標にはなり得ることを示唆していると言えよう。

本節で行った Shannon エントロピーによる接戦度合いの解析は、各グループリーグにおける対戦結果を全体のランキング行列に反映させる方法に組み込む際に利用することが出来ると考えられる。例えば、Shannon エントロピーが高いグループリーグを勝ち残ったチームに対しては、そのチームが獲得した得点に何らかの正の補正を行うことは合理的であると考えられる。

6 おわりに

本稿では、多数のスポーツチームの対戦結果から、対戦が行われていないチームを含めた全チームに順位付けを行う手法として Keener によって提案されたランキング行列とペロン・フロベニウスの定理を用いる手法を利用し、2010 FIFA World Cup の出場国の順位付けを検討した。得られた順位を詳細に調べたところ、単純な代数的操作のみに基づいて合理的な順位付けが行えていることが確認できた。特に、例えばポルトガル対日本のように直接の対戦が行われていないチーム同士に

も順序関係を導入することが出来ている。これは、ポルトガルはスペインと対戦しており、日本はオランダと対戦しており、スペインとオランダが対戦を行っているという関係から類推される日本とポルトガルの順位が数学的道具立てによって自動的に定められているという点で興味深い結果である。（厳密には、チームの実力に対する順位付けではなく、この大会での各チームのパフォーマンスの順位付けを行ったことになる。）

また、パラメータ $h > 0$ を変更する（より小さい値を選ぶ）ことによって決勝リーグに進めなかったチームへの負の効果を与えることが可能になる。つまり、4節で述べたウエイト $w > 0$ の他にも明確な意味を持ったパラメータを使うことにより別の視点からの解析が可能となるのである。このような取り組みに関しては、例えば、論文 [6] では、学生の試験結果の順位付けに応用している。

さらに、重み付き関数の利用により、得点重視か勝敗重視かといった、順位付けを主観的に行うことが可能となる。より得点結果を重視するには、重み付き関数のパラメータを $0 < w < 1$ （格差縮小関数）で選べばよい。このような手法はスポーツの順位付け以外にも応用可能と思われる。筆者らはこの重み付き関数は経済モデル或いは数理経済における諸問題に応用可能であると考えているところである。

最後に、冒頭に述べたように、確率モデルによるランキング解析手法の研究も盛んに行われているが、今回解析の対象とした World Cup の順位付けにおいては、従来のランキングの確率モデルとして代表的な Bradley-Terry では満足する結果を得られなかった。Bradley-Terry モデルを用いた解析では、以下の 2 通りの方法でランキングを生成した。

- (i) World Cup の勝ち点方式に習い、勝利したチームには 3 点、敗北したチームには 0 点、引き分けの場合には両者に 1 点を与え、これをランキング行列の計算に用いる S_{ij} とした。
- (ii) 予選グループの段階では、上述の (i) と同じ方法でポイントを与えた。トーナメントにおいては、ベスト 16 を決める対戦での勝利チームには $3 \times 2!$ 点を、ベスト 8 を決める対戦の勝利チームには $3 \times 3!$ を、準決勝での勝利チームには $3 \times 4!$ 点を、そして優勝チームには $3 \times 5!$ 点を与えた。

Bradley-Terry モデルにより求められたランキングは Appendix C に示した。方法 (i) によるランキング行列に基づき得たランキングは、BBC によるランク付けと比較したときの Kendall の τ の値が比較的高かったが ($\tau = 0.8064516$)、上位 4 チームの順序が実際の順序と入れ替わってしまっていた。また、(ii) の方法によるランキング行列に基づき得たランキングは、上位 4 チームは実際の順序通りであったが、BBC による順位付けとの Kendall の τ の値は低かった ($\tau = 0.7741935$)。これは、World Cup の対戦結果が非常に小規模であり、確率モデルのパラメータを推定するのに十分な数ではないことが原因と考えられる。こうしたデータに基づき確率モデルのパラメータ推定を介してランキングを決定するためには、何らかの事前知識を用いて強い正則化を行う必要があると考えられる。一方、ペロン・フロベニウスの定理に基づくランキング手法によれば、少ない対戦結果から合理的な順位付けが行えることがわかった。BBC による順位付けが FIFA による評価を十分良く反映していると考えられるならば、本稿で考えるような疎なデータに基づく World Cup 参加チームの順位付けには、Keener の手法の方が向いていると考えられる。

謝辞 本研究の一部は、科学研究費(若手研究(B), No.20740067)及び、早稲田大学特定課題研究助成費(No.2010A-882)の支援を受けて行われた。

参考文献

- [1] 本田 真望, 大島 邦夫, 大相撲番付の数理的解析, 日本応用数理学会論文誌, Vol.18(2008), pp. 243-256.
- [2] S.Furuichi and H.Hino, Mathematical analyses of 2010 FIFA world cup, Applied Mathematics and Information Science, Vol.5, No.2(2011), pp.205-219.

- [3] J.P.Keener, The Perron-Frobenius theorem and the ranking of football, SIAM Review, Vol.35(1993), pp.80-93.
- [4] T.Jech, The ranking of incomplete tournaments: A mathematician's guide to popular sports, Amer.Math.Monthly, Vol.90(1983), pp.246-266.
- [5] S.Furuichi, K.Oshima and I.Hofuku, An improved ranking procedure applying a continuous weighted functions, Int. J. Appl. Math., Vol.2,(2000), pp.553-558.
- [6] I.Hofuku and K.Oshima, A total ranking based on exam scores for a small number of subjects, INFORMATION, Vol.5, No.4(2002), pp.417-423.
- [7] I.Hofuku and K.Oshima, A controlled absolute ranking method applied to an exam of multiplex choice form, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.47, No.1(2008), pp.267-280.
- [8] I.Hofuku and K.Oshima, A mathematical structure of processes for generating rankings through the use of non-negative irreducible matrices, Applied Mathematics and Information Sciences, Vol.4, No.1,(2009), pp. 125-139.
- [9] J.I.Marden, Analyzing and modeling rank data, Chapman & Hall, 1995.
- [10] R.A.Bradley and M.E.Terry, The ranking analysis of incomplete block designs. I. The method of paired comparisons, Biometrika, Vol.39(1952), pp.324-345.
- [11] 東京大学教養学部統計学教室 (編集), 自然科学の統計学, 東京大学出版会, 1992.
- [12] A.Berman and R.J.Plemmons, Nonnegative Mathematical Science, Academic Press, 1979.
- [13] J.M.Ortega, Numerical Analysis, A Second Course, SIAM, 1990.
- [14] 齋藤 正彦, 線型代数入門, 東京大学出版会, 1995.
- [15] R.A.Horn and C.R.Johnson, Matrix Analysis, Cambridge Univ. Press, 1985.
- [16] K. Bryan and T. Leise, The \$25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google, SIAM Review, Vol.48(2006), pp. 569-581.
- [17] J. M. Prystowsky and L. Gill, Calculating Web Page Authority Using the PageRank Algorithm, (2005), <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.145.5171>.
- [18] See web-site at BBC Sports,
http://news.bbc.co.uk/sport2/hi/football/world_cup_2010/8814195.stm.
or
http://megalodon.jp/2010-0910-1347-56/news.bbc.co.uk/sport2/hi/football/world_cup_2010/8814195.stm.
- [19] M.Kendall, A new measure of rank correlation, Biometrika, Vol.30(1938), pp. 81-89.
- [20] C.Spearman, The proof and measurement of association between two things, Amer. J. Psychol., Vol.15 (1904), pp. 72-101.
- [21] C.E.Shannon, A mathematical theory of communication, Bell Syst.Tech.J., Vol.27(1948), pp.379-423 and pp.623-656.
- [22] J. von Neumann, Thermodynamik quantummechanischer Gesamtheiten, Göttinger Nachrichten, Vol.1(1927), pp.273-291.

Appendix A: ランキング行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 4/5 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 3/4 \\ 1/5 & 1/2 & 0 & 3/5 \\ 1/2 & 1/4 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5/7 & 3/4 & 2/3 \\ 2/7 & 0 & 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 3/5 \\ 1/3 & 1/2 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 2/3 \\ 1/6 & 1/2 & 0 & 3/5 \\ 2/3 & 1/3 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 3/4 & 3/5 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 3/5 \\ 2/5 & 1/3 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 4/7 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 3/7 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 2/3 & 3/5 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 8/9 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 4/5 \\ 2/5 & 1/9 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & 1/3 & 3/4 \\ 2/5 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} h & 3/5 & h & h \\ 1/3 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix},$$

$$AD = \begin{pmatrix} h & 7/13 & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}, AE = \begin{pmatrix} 3/7 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} h & 2/3 & h & h \\ 2/5 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix},$$

$$BD = \begin{pmatrix} 1/6 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}, CD = \begin{pmatrix} h & 2/5 & h & h \\ 2/7 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}, DA = \begin{pmatrix} h & h & h & h \\ 6/13 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix},$$

$$DB = \begin{pmatrix} 5/6 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}, DC = \begin{pmatrix} h & 5/7 & h & h \\ 3/5 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}, DH = \begin{pmatrix} 1/3 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix},$$

$$EA = \begin{pmatrix} 4/7 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}, EF = \begin{pmatrix} h & 3/5 & h & h \\ 13/28 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}, EH = \begin{pmatrix} 1/3 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix},$$

$$EG = \begin{pmatrix} 3/5 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}, FE = \begin{pmatrix} h & 15/28 & h & h \\ 2/5 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}, FH = \begin{pmatrix} 1/3 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix},$$

$$HD = \begin{pmatrix} 2/3 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}, HE = \begin{pmatrix} 2/3 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}, HF = \begin{pmatrix} 2/3 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix},$$

$$HG = \begin{pmatrix} h & 2/3 & h & h \\ 1/5 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}, GE = \begin{pmatrix} 2/5 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}, GH = \begin{pmatrix} h & 4/5 & h & h \\ 1/3 & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix}.$$

Appendix B:全対戦結果

2010 FIFA World Cup における全試合の対戦結果を以下に示す.

表 5: The results of all matches in 2010 FIFA World Cup

Group A					Group B				
	Uruguay	Mexico	South Africa	France		Argentina	South Korea	Greece	Nigeria
Uruguay		1-0	3-0	0-0	Argentina		4-1	2-0	1-0
Mexico	0-1		1-1	2-0	South Korea	1-4		2-0	2-2
South Africa	0-3	1-1		2-1	Greece	0-2	0-2		2-1
France	0-0	0-3	1-2		Nigeria	0-1	2-2	1-2	

Group C					Group D				
	United States	England	Slovenia	Algeria		Germany	Ghana	Australia	Serbia
United States		1-1	2-2	1-0	Germany		1-0	4-0	0-1
England	1-1		1-0	0-0	Ghana	0-1		1-1	1-0
Slovenia	2-2	0-1		1-0	Australia	0-4	1-1		2-1
Algeria	0-1	0-0	0-1		Serbia	1-0	0-1	1-2	

Group E					Group F				
	Netherlands	Japan	Denmark	Cameroon		Paraguay	Slovakia	New Zealand	Italy
Netherlands		1-0	2-0	2-1	Paraguay		2-0	0-0	1-1
Japan	0-1		3-1	1-0	Slovakia	0-2		1-1	3-2
Denmark	0-2	1-3		2-1	New Zealand	0-0	1-1		1-1
Cameroon	1-2	0-1	1-2		Italy	1-1	2-3	1-1	

Group G					Group H				
	Brazil	Portugal	Ivory Coast	North Korea		Spain	Chile	Switzerland	Honduras
Brazil		0-0	3-1	2-1	Spain		2-1	0-1	2-0
Portugal	0-0		0-0	7-0	Chile	1-2		1-0	1-0
Ivory Coast	1-3	0-0		3-0	Switzerland	1-0	0-1		0-0
North Korea	1-2	0-7	0-3		Honduras	0-2	0-1	0-0	

Round of 16			Quarter-finals		
Uruguay	2-1	South Korea	Netherlands	2-1	Brazil
USA	1-2	Ghana	Uruguay	1-1	Ghana
Germany	4-1	England		PK4-2	
Argentina	3-1	Mexico	Argentina	0-4	Germany
Netherlands	2-1	Slovakia	Paraguay	0-1	Spain
Brazil	3-0	Chile			
Paraguay	0-0	Japan			
	PK5-3				
Spain	1-0	Portugal			

Semi-finals			Match for third place		
Uruguay	2-3	Netherlands	Uruguay	2-3	Germany
Germany	0-1	Spain			

Final		
Netherlands	0-1	Spain

Appendix C:Bradley-Terry モデルによるランキング結果

参考の為に、2通りのパターン（重みの有無）で、Bradley-Terry モデルを用いて生成したランキング結果を示す。

表 6: The rankings by Bradley-Terry model

unweighted Teams	$\tau = 0.8064516$ BT Parameter	weighted (n!) Teams	$\tau = 0.7741935$ BT parameter
Netherlands	0.0785696	Spain	0.09004876
Germany	0.06199517	Netherlands	0.08157827
Spain	0.05430948	Germany	0.06769848
Uruguay	0.0489373	Uruguay	0.04443869
Brazil	0.04584088	Brazil	0.04093729
Argentina	0.0432712	Portugal	0.03885925
Japan	0.03750989	Japan	0.03685436
Portugal	0.03731276	Argentina	0.03468679
Paraguay	0.03363823	Ghana	0.03189228
Ghana	0.03216234	Paraguay	0.03137611
United States	0.03196856	Australia	0.0301546
England	0.03160605	England	0.02997656
Australia	0.03049108	United States	0.02996679
Chile	0.03040081	Chile	0.02829329
Ivory Coast	0.02899632	Ivory Coast	0.02805113
South Africa	0.02858492	New Zealand	0.02738536
New Zealand	0.02844685	South Africa	0.02733383
Slovenia	0.02762225	Slovenia	0.02667925
Mexico	0.02618416	Switzerland	0.02390486
Slovakia	0.02519541	Denmark	0.02366336
Switzerland	0.0242085	Mexico	0.02340646
Denmark	0.02415991	Slovakia	0.02322214
South Korea	0.02357287	Italy	0.02136651
Italy	0.02227126	South Korea	0.02055562
Greece	0.0216447	Greece	0.0201977
Serbia	0.01964293	Serbia	0.01922685
Honduras	0.01871237	Honduras	0.01896782
France	0.01776596	Algeria	0.01696716
Algeria	0.01761953	France	0.01693236
Nigeria	0.01720105	Nigeria	0.01607847
Cameroon	0.01523751	Cameroon	0.01487298
North Korea	0.01492014	North Korea	0.01442664