

理想磁気流体力学の方程式系の初期境界値問題

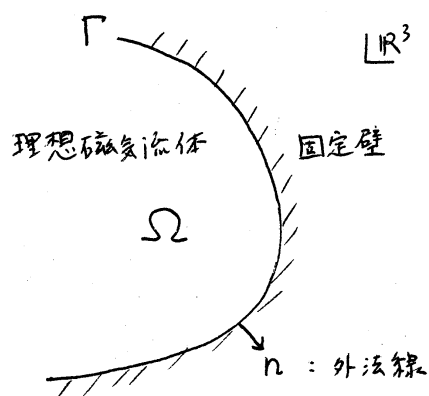
(境界が完全導体壁の場合)

奈良々大理 柳沢 卓 (Taku Yanagisawa)

金沢大理 松村 昭彦 (Akitaka Matsumura)

理想磁気流体力学の方程式系は特にプラズマの運動を記述するものとして多くの考察がなされている。しかしながら数学的に初期境界値問題として捉えたとき、種々に物理的に課せられる境界値関係式に対する整合性やそれらの下での初期境界値問題の適切性について、この厳密な考察は少ないように思われる。以下境界が完全導体壁の場合に物理的にも数学的にも妥当と思われる境界条件のうちのひとつを提起しその下で得られている結果とその周辺を紹介する。

§1. 基礎方程式系



いま理想磁気流体が $\mathbb{R}^3$ 内の領域 Ω を満たしており、 Ω は固定境界壁 Γ で囲まれているとしよう。説明及び方程式系の^簡単化の為、運動は等エントロピー的とある。

無論、数学的にはエントロピーを含む方程式系に対して以下の議論はまったく平行に成立する。このとき基礎方程式系は

$$(0) \quad \begin{cases} \rho \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u = 0, \\ \rho \frac{Du}{Dt} + \nabla p + \mu H \times (\nabla \times H) = 0, \\ \mu H_t + \nabla \times E = 0, \quad E = -\mu u \times H, \\ \nabla \cdot H = 0, \end{cases} \quad (t, x) \in [0, T] \times \Omega.$$

== 1 = $p = p(t, x)$: 圧力、 $u = {}^t(u_1, u_2, u_3)(t, x)$: 流速、

$H = {}^t(H_1, H_2, H_3)$: 磁場、 $E = {}^t(E_1, E_2, E_3)$: 電場、

$\rho = \rho(p)$: 密度 ($\rho_p = \partial \rho / \partial p > 0$ for $p > 0$)、 μ : 透磁率

(正定数)、 $D/Dt = \partial_t + u \cdot \nabla$ 、 $\nabla = {}^t(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ 。

いま未知関数を

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\rho} \\ u \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \frac{1}{2} |H|^2 \\ u \\ H \end{pmatrix}.$$

と置くと (0) は次の対称双曲型方程式系に同等となる。

$$(1) \quad A_0(U) U_t + \sum_{j=1}^3 A_j(U) U_{x_j} = 0,$$

$$A_0(U) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha {}^t H \\ 0 & \rho I_3 & 0 \\ -\alpha H & 0 & I_3 + \alpha H \otimes H \end{pmatrix},$$

$$A_j(U) = \begin{pmatrix} \alpha u_j & {}^t e_j & -\alpha {}^t H u_j \\ e_j & u_j & -I_3 H_j \\ -\alpha H u_j & -I_3 H_j & (I_3 + \alpha H \otimes H) u_j \end{pmatrix},$$

$I_3 = 3 \times 3$ 単位行列, $\alpha = \rho_p / \rho > 0$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ...

ここで $\nabla \cdot H = 0$ は初期時刻で成立すれば $t \geq 0$ で成立することから、
 命題から初期値への条件として方程式系からは省略した。

初期境界値問題として方程式系(1)を

$$(2) \quad U(0, x) = U_0(x) \quad (\text{初期条件}),$$

$$(3) \quad M(x) U = 0 \quad \text{on} \quad [0, T] \times \Gamma \quad (\text{境界条件}),$$

の下で考察する。ここには $M: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ の 2×7 行列、

線形非線形を問わずに一般論に於いては、Boundary

Matrix $A(m) = \sum_{j=1}^3 m_j A_j$ が境界条件 $MU = 0$ の集合において

本質的役割を果たしている。以下では完全導体壁の仮定から導かれる境界条件や Boundary Matrix の既存の一般論との整合性を調べることにする。

§2. 完全導体壁に対する境界条件

流速に対する境界条件は

$$(4) \quad u \cdot n = 0 \quad \text{on} \quad [0, T] \times \Gamma$$

が自然なものである。電磁場に対する境界での関係式は

(導出は例えば [12])

$$(5) \quad \begin{cases} [n \times E] = 0, \\ [n \cdot B] = 0, \\ [n \times H] = J_P, \\ [n \cdot D] = \gamma_P, \end{cases}$$

==1- $B = \mu H$, $D = \varepsilon E$, ε : 誘電率 (正定数),

J_P : 表面電流密度, γ_P : 表面電荷密度,

$$[A] = A|_{P_+} - A|_{P_-},$$

P_+ : P の外側, P_- : P の内側,

が知られている。又外部固定壁内では完全導体であること

から、つまり P 上では $E=0$, $H=H_e(x)$ (t に依らない) (これは

[12] 参照) であることに注意して、以下では

$$(6) \quad n \times E = 0 \quad \text{on} \quad [0, T] \times P$$

を課すべき境界条件と見做し、解が得られた後 (5) により $H_e(x)$,

γ_P , J_P が決定されると考えよう。条件 (6) に $E = -\mu u \times H$

を代入し (4) に注意すると境界条件 (4), (6) は次に同等

$$(7) \quad \begin{cases} (H \cdot n) u = 0, \\ u \cdot n = 0. \end{cases} \quad \text{on} \quad [0, T] \times P$$

より磁場の方程式に $n \cdot \varepsilon$ 作用させ $\nabla \cdot H = 0$ と $u \cdot n|_P = 0$ に

注意すれば P 上で

$$(8) \quad (H \cdot n)_t + (u \cdot \nabla)(H \cdot n) + \lambda(\nabla u)(H \cdot n) = 0,$$

が成立することが分る。($\equiv$ に $\lambda(\nabla u)$ は ∇u に ∇ の ∇ 依存するスカラー関数) . Γ 上のベクトル場 u に對する特性曲線上で $(H \cdot n)$ を与えることにより、条件 (7) は Γ 上に次に同等であることが分る。

$$(9) \quad \begin{cases} u \cdot n = 0 & \text{on } [0, T] \times \Gamma_0, \\ u = 0 & \text{on } [0, T] \times \Gamma_1, \end{cases}$$

$\equiv$ に

$$\Gamma_0 = \{ x \in \Gamma ; H_0 \cdot n|_{\Gamma} = 0 \},$$

$$\Gamma_1 = \{ x \in \Gamma ; H_0 \cdot n|_{\Gamma} \neq 0 \},$$

H_0 : H の初期値.

こゝに $\equiv$ のとき $\forall t \geq 0$ に對し Γ_0 上では $H \cdot n = 0$, Γ_1 上では $H \cdot n \neq 0$ が成立することに注意する。以下完全導体壁に對する境界条件を (9) としよう。次に条件 (9) の下での Boundary Matrix $A(m)$ について述べる。簡単の爲に Ω は半空間 $\mathbb{R}_+^3 = \{ x \in \mathbb{R}^3 ; x_1 > 0 \}$ とする。このとき Boundary Matrix $A(m)$ は

$$A(m) = -A_1 = - \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha u_1 & 1 & 0 & 0 & -\alpha u_1^t H & \\ \hline 1 & & & & & \\ 0 & u_1 I_3 & & & -H_1 I_3 & \\ 0 & & & & & \\ \hline -\alpha u_1 H & -H_1 I_3 & & & u_1 (I_3 + H \otimes H) & \end{array} \right),$$

故に (9) より $u_1|_{\Gamma} = 0$ を与えると

$$(10) \quad A(m)|_{\Gamma} = - \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & -H_1 I_3 & \\ 0 & & & & & \\ \hline 0 & -H_1 I_3 & & & 0 & \end{array} \right).$$

一般論では Γ 上で $A(m)$ が $MU=0$ に對し Maximally Nonnegative であることが重要である。

定義 $A(m)$ が $MU=0$ に對し Γ 上 Maximally Nonnegative
 $\Leftrightarrow$
 $\forall x \in \Gamma$ に對し
 i) $\text{Ker } M$ 上 $A(m)$: nonnegative,
 ii) $\text{rank } M = \#\{\lambda; A(m) \text{ の負の固有値}\}$.

境界条件(9)に對し $A(m)$ が Maximally Nonnegative であることを見よう。

$\bar{U} = {}^t(\bar{u}, \bar{u}, \bar{H}) \in \mathbb{R}^7$ とすれば (10) より

$$(11) \quad {}^t \bar{U} A(m) |_{\Gamma} \bar{U} = 2H_1 (\bar{u}_1 \bar{H}_1 + \bar{u}_2 \bar{H}_2 + \bar{u}_3 \bar{H}_3),$$

故に (9) $M\bar{U}=0$ とすれば

$$x \in \Gamma_0 \quad \longrightarrow \quad (H \cdot \eta) = H_1 = 0,$$

$$x \in \Gamma_1 \quad \longrightarrow \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0,$$

が従う。為し (11) より ${}^t \bar{U} A(m) |_{\Gamma} \bar{U} = 0$ 、つまり i) が示された。

次に $x \in \Gamma_0$ なる $H_1=0$ より $A(m)|_{\Gamma}$ の固有値は $\lambda = \pm 1$, $\lambda = 0$ (6重根) であり負の固有値は一つ、一方境界条件(9)は $u_1=0$ の一つ、従って ii) が成立する。

$x \in \Gamma_1$ なる $H_1 \neq 0$ より $A(m)|_{\Gamma}$ の固有値は $\lambda = 0$, $\lambda = \pm |H_1|$ (各々2重根), $\lambda = \pm \sqrt{1+H_1^2}$

であり負の固有値は三つ、一方条件(9)は $u = 0$ が三つ、故にこの場合も ii) が成立することが分る。以上により境界条件

(9) は数学的にも非常によい整合性を持つことが分る。

§3. 主要定理

ここでは簡単の爲 $\Omega = \mathbb{R}_+^3$ としよう。初期境界値問題 (1), (2), (3) の解を構成する場合、通常線形化問題を考えその逐次近似を用いて構成する。このとき上述の $A(m)$ の Maximally Nonnegative があれば線形化方程式に対する基本 L^2 -energy 不等式や解の一意性が成立し、さらに $A(m)$ が P 上 rank-定を仮定すれば弱解の存在も示めされる。しかしながら特に非線形の解を作る為にはそれ以上に解の regularity 特に境界近傍の法線方向導関数の評価が必要となる。この為の一着単純な仮定は

$$(12) \quad A(m) \Big|_{\substack{x \in P \\ U=U_0}} \text{ が正則}$$

であり、この仮定の下に問題 (1), (2), (3) の時間局所解がソボレフ空間 $H^m(m \geq 3)$ で構成出来る。(Rauch & Massy [6], Schochet [7], Ikawa [1] ... 等参照)。次に $A(m)/P$ が正則であるか rank-定の時は、線形化方程式については Rauch [5], Tsuji [9], 非線形問題については $A(m)/P$ が正則である部分に対応する成分の法線方向導関数の評価が接線方向と同じ order で回復出来ることを方程式の特殊性を利用したりそれを保証する様々な条件を仮定することによって局所解の存在が示めされる (Schochet [7], Yanagisawa [10], Ohkubo [4], Kawashima & Yanagisawa & Shigata [2], Majda & Osher [3] 等)。 $A(m)/P$ が正則である

rank も一定でないときは程形問題についての弱解の存在すら Open Problem である。我々の場合を見てみよう。 $A(n)$ は Γ_0 上で $\text{rank} = 2$, Γ_1 上 $\text{rank} = 6$ であることが容易に分る。それ故 Γ_0 も Γ_1 も空でない場合は全く未解決である。そこで $\Gamma = \Gamma_0$ 或 $\Gamma = \Gamma_1$ の場合を考えよう。

$\Gamma = \Gamma_1$ の場合:

Γ 上で $A(n)$ は $\text{rank} = 6$ であり、 H_1 -成分に当る行が一つ degenerate してゐるが、方程式の性質を用ゐ、 $\nabla \cdot H$ を別途評価することによって既存の Shochet [7], Yanagisawa [10] 等の議論が全く平行に適用され、通常 Sobolev 空間 H^m ($m \geq 3$) での時間局所解の存在が示される。

定理 1. $m \geq 3$ (整数), $\bar{U} = (\bar{P}, 0, 0)$ ($\bar{P}$: 与えられた正定数)

とし次を仮定:

$$U_0 - \bar{U} \in H^m(\Omega), \quad \inf_{\Omega} P_0 > 0,$$

$$\nabla \cdot H_0 = 0 \text{ in } \Omega, \quad \inf_{\Gamma} |H_0 \cdot n| > 0,$$

及び $m-1$ 次の compatibility 条件

$$\partial_t^k u(0) = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (0 \leq k \leq m-1).$$

このとき $\exists T > 0$ s.t. 問題 (1), (2), (3) は唯一の解

$$U - \bar{U} \in \bigcap_{j=0}^m C^j(0, T; H^{m-j}(\Omega))$$

を持つ。

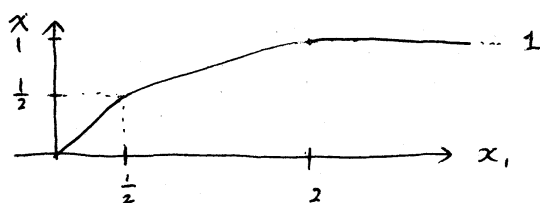
$\Gamma = \Gamma_0$ の場合 :

Γ 上で $A(m)$ は $\text{rank} = 2$ と縮退の度合いが強く、又 Euler 方程式系や $\Gamma = \Gamma_1$ の場合のような法線方向の評価を巧く回復させる方程式の構造を深可二とも今の所成巧してない。この為法線接線方向共に同じ order までの評価を必要とする既存の議論が全く適用出来ない。そこで解空間自体を粗く云、2 方線方向導関数の order を接線方向のそれの半分とする空間に変更することで解の構成に成巧した (Yanagisawa & Matsumura [1])。後にはこの方向での非線形の議論は ^(Chen) Shuxing [8] に既にあることが分ったがこの方程式も条件が強く単純には我々の場合に適用出来ない。 $m > 0$ (整数) とし解空間 $X^m(0, T)$ を次で定義する。

$$X^m(0, T) = \{ \partial^{\alpha} \partial_{x_1}^k u \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)), |\alpha| + 2k \leq m \},$$

$$\partial = \{ x(x_1) \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}, \partial_t \},$$

ここに $x(x_1)$ は次を満たすもの :



$$x \in C^{\infty}(\bar{R}_+^1),$$

$$x' \geq 0$$

$$x = \begin{cases} x_1, & 0 \leq x_1 \leq 1/2 \\ 1, & x_1 \geq 2. \end{cases}$$

定理 2 $m \geq 8$ (整数), $\bar{U} = (\bar{p}, 0, 0)$ ($\bar{p}$: 正定数)

に 1 次を仮定する :

$$U_0 - \bar{U} \in H^m(\Omega), \quad \inf_{\Omega} P_0 > 0,$$

$$\nabla \cdot H_0 = 0 \text{ in } \Omega, \quad H_0 \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma$$

及び $m-1$ 次の compatibility condition

$$\partial_t^k U_0 = 0 \text{ on } \Gamma \quad (0 \leq k \leq m-1).$$

このとき $\exists T > 0$ s.t. 問題 (1), (2), (3) は唯一の解

$$U - \bar{U} \in X^m(0, T)$$

を持つ。

注1) Ω が有界集合の内部や外部領域についても

定理 1.2 に対応する結果が成立する。

注2) 本文でも述べたように Γ 上で Boundary Matrix

の rank が変る場合を考察することは線形理論

としても非常に興味ある問題である。

§4. 定理2の略証

基本的には Schochet [7], Rauch [5], Tsuji [9] の議論の応用でなされる。いま

$$\tilde{U} - \bar{U} = (\tilde{U} - \bar{U}, \tilde{u}, \tilde{H}) \in X^m(0, T), \quad \tilde{u} \cdot n|_{\Gamma} = 0, \quad \tilde{H} \cdot n|_{\Gamma} = 0$$

としたとき線形問題

$$(13) \quad \begin{cases} L_{\tilde{U}}(U) \equiv A_0(\tilde{U})U_t + \sum_{j=1}^3 A_j(\tilde{U})U_{x_j} = 0 \\ U(0) = U_0(x), \quad U \cdot n|_{\Gamma} = 0, \end{cases}$$

を考え、(13) の解 $\tilde{U}$ が存在し再び $U - \bar{U} \in X^m(0, T)$,

$u \cdot n|_p = 0$ を満たし、しかも Energy 不等式が成立すれば、通常 of 逐次近似法で解が構成される。ここで線形化方程式について ~~も~~、 $H_0 \cdot n|_p = 0$ より $u \cdot n|_p = 0$ ($\forall t \geq 0$) が従うことは自明でないことに注意する。半空間の場合は比較的容易に確かめられるが、 Ω -一般の時は線形化に工夫が必要となる(この部分は白田平々の idea による)。今 U_0 は簡単のため十分滑らかとし、以下証明の手順を粗く示そう。既存の結果に u を $\tilde{u}$ として $\tilde{u}$ は初期条件と境界条件を保つとする。

$$U_\delta - \tilde{u} \in \bigcap_{i=1}^{m+1} C^i(0, T; H^{m+1-i}),$$

$$U_\delta - \tilde{u} \rightarrow 0 \quad \text{as } \delta \rightarrow 0 \quad \text{in } X^m(0, T),$$

と平滑化する。次に Schochet の idea を用い、問題を非特異化する。つまり $\varepsilon > 0$ とし (B) を次に変形する:

$$(14) \quad \begin{cases} A_0(\tilde{u}_\delta) U_t + \sum_{j=1}^3 A_j(\tilde{u}_\delta) U_{x_j} + \varepsilon U_{x_1} = \varepsilon \hat{U}_{x_1}, \\ U(0) = U_0, \quad u \cdot n|_p = 0. \end{cases}$$

ここには $\hat{U}$ は compatibility 条件を保つための補正項であり

$$\begin{cases} \hat{U} - \tilde{u} \in \bigcap_{i=1}^{m+2} C^i(0, T; H^{m+2-i}), \\ \partial_t^k \hat{U}(0) = \partial_t^k U(0) \quad k = 0, \dots, m-1, \end{cases}$$

を満すものとして構成する。問題(4)は境界条件 $u \cdot n|_P = 0$ に対し Boundary Matrix $A(n)$ が Maximally Nonnegative であり、 $\varepsilon > 0$ より $A(n)$ が P 上 Nonsingular となり、既存の結果から(14)には

$$\bigcup_{\varepsilon, \delta} \bar{U} \in \bigcap_{i=1}^{m+1} C^i(0, T; H^{m+1-i})$$

なる解が存在する。それ故あとは(14)に対する ε, δ に依存しない $X^m(0, T)$ でのア priori 評価を出せばよいことになる。これは(13)において、必要なだけ滑らかな解に対してのア priori 評価と結果的に同等である。また

$$\int_0^t \langle U, L\tilde{U}(U) \rangle_{L^2(\Omega)} dz = 0$$

を計算する通常の L^2 -energy 評価法により $A(n)$ が Maximally Nonnegative に注意すれば $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ の評価は容易に従う。いま

$$A_j(\tilde{U}) = \begin{pmatrix} \overset{2}{P_j} & \overset{5}{Q_j} \\ \overset{1}{Q_j} & \overset{5}{R_j} \end{pmatrix} \Big\{ \overset{2}{2} \overset{5}{5} \Big\} \quad (0 \leq j \leq 3)$$

$$U = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} z - \bar{P} \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ H \end{pmatrix},$$

とおく。 $z = z$

$$(15) \quad \begin{cases} P_1|_P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{nonsingular} \\ Q_1|_P = R_1|_P = 0 \end{cases}$$

であることに注意する。

接線方向導関数の評価は $|d| \leq m$ とし

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle \partial^\alpha U, \partial^\alpha L_{\tilde{v}}(U) \rangle dz \\ &= \int_0^t \langle \partial^\alpha U, L_{\tilde{v}}(\partial^\alpha U) \rangle dz + \int_0^t \langle \partial^\alpha U, [\partial^\alpha, L_{\tilde{v}}]U \rangle dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

にっ、2行う。ここでは交換子 $[\partial^\alpha, L_{\tilde{v}}]U$ の評価のうち項

$$(16) \quad \begin{pmatrix} \partial P_1 & \partial Q_1 \\ \partial^t Q_1 & \partial R_1 \end{pmatrix} \partial^{\alpha-1} \partial_{x_1} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$$

の境界近傍での振りが本質的となるが、Rauch [5], Tsuji [9] の議論を用い (15) に注意すれば、

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \partial_{x_1} V &= -P_1^{-1} \left\{ P_0 V_t + Q W_t + \sum_{j=2}^3 (P_j V_{x_j} + Q_j W_{x_j}) \right\} \\ &\quad + Q_1 W_{x_1}, \\ Q_1 W_{x_1} &= \int_0^1 (\partial_{x_1} Q_1)(t, \theta x_1, x_2, x_3) d\theta \cdot (x_1 \partial_{x_1}) W_1, \\ \partial Q_1 \partial^{\alpha-1} \partial_{x_1} W &= \int_0^1 (\partial_{x_1} \partial Q_1)(t, \theta x_1, x_2, x_3) d\theta \cdot (x_1 \partial_{x_1}) \partial^{\alpha-1} W, \\ &\dots \text{etc}, \end{aligned} \right.$$

より (16) は全2接線方向微分と見做すことが出来る。^法 接線方向微分にっ、2は V にっ、は (17) の第一式を用い評価し、
 W にっ、2は

$$(18) \quad R_0 W_t + \sum_{j=1}^3 R_j W_{x_j} = - ({}^t Q_0 V_t + \sum_{j=1}^3 {}^t Q_j V_{x_j})$$

にっ"て $R_1|_D = 0$ を用い評価を行う。より詳しく議論
にっ"ては Yanagisawa & Matsumura [11]、及びこの準備中の本
稿を参照して頂きたい。

参考文献

- [1] M. Ikawa : Mixed problem for a hyperbolic system of the
first order, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 7 (1971/72),
427-454.
- [2] S. Kawashima, T. Yanagisawa and Y. Shizuta : Mixed problems
for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, Proc. Japan
Acad. 63 Ser. A (1987), 243-246.
- [3] A. Majda and S. Osher : Initial-boundary value problems for
hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary,
Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 607-675.
- [4] T. Ohkubo : Well posedness for quasi-linear hyperbolic mixed
problems with characteristic boundary, to appear in Hokkaido
Math. J.
- [5] J. Rauch : Symmetric positive systems with boundary
characteristic of constant multiplicity, Trans. Amer. Math.

- Soc. 291 (1985), 167-187.
- [6] J. Rauch and F. Massey : Differentiability of solutions to hyperbolic initial-boundary value problems, *Trans. of the A.M.S.*, vol. 189 (1974), 303-318.
- [7] S. Schochet : The compressible Euler equations in a bounded domain : Existence of solutions and the incompressible limit, *Comm. Math. Phys.* 104 (1986), 49-75.
- [8] Chen Shuxing : On the initial-boundary value problems for quasilinear symmetric hyperbolic system with characteristic boundary (in chinese), *Chinese Ann. of Math.* 3 (1982), 223-232.
- [9] M. Taji : Regularity of solutions of hyperbolic mixed problems with characteristic boundary, *Proc. Japan Acad.*, 48 (1972), 719-724.
- [10] T. Yanagisawa : The initial boundary value problem for the equations of ideal magneto-hydro-dynamics, *Hokkaido Math. J.* 16 (1987), 295-314.
- [11] T. Yanagisawa and A. Matsumura : Initial boundary value problem for the ideal magneto-hydro-dynamics with perfectly conducting wall condition, *Proc. Japan Acad.* 64 A (1988), 191-194.
- [12] 電磁気学Ⅱ、現代電気工学講座、オーム社。