

球面上の最大 2 距離集合の一意性

東北大学大学院情報科学研究科 野崎寛 (NOZAKI Hiroshi)
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

1 はじめに

本稿は 2010 年 12 月に京都大学で行われた研究集会「頂点作用素代数・有限群・組合せ論の研究」にて、上記タイトルで行った講演の報告集である。その講演では、 s 距離集合についての知られている結果などを紹介し、新しい結果として Larman-Rogers-Seidel の定理の一般化 [16] や、球面上の最大 3 距離集合における結果 [15]、題にあるように球面上の最大 2 距離集合の分類に関わる結果等を紹介した。しかし、講演後に球面最大 2 距離集合の一意性の証明に間違いを発見してしまい、その穴を埋めることに成功していない。本稿では、球面 S^7 と S^{21} の最大 3 距離集合の元の個数が、それぞれ 120, 2025 であることの証明の概要、 S^6 上の最大 2 距離集合の分類における部分的な結果を紹介することにする。

s 距離集合の定義と、それを考える動機について少し記述したい。ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の 2 点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_d), y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ に対して、ユークリッド距離は

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2}$$

で定義される。 $\mathbb{R}^d$ 上の有限集合 X に対して、

$$A(X) := \{d(x, y) \mid x, y \in X, x \neq y\}$$

と定義する。 $|A(X)| = s$ のとき、 X は s 距離集合 (s -distance set) と呼ばれる。例えば、正方形の頂点集合

$$\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

を考えよう。このとき、 $A(X) = \{1, \sqrt{2}\}$ であることが分かり、正方形の頂点集合は $\mathbb{R}^2$ 上の 2 距離集合であると言える。距離の個数 s と次元 d を固定した時に、出来るだけ多くの元を持った s 距離集合を構成したい。元の個数が最大な距離集合を最大距離集合と呼び、最大距離集合の構成、分類は距離集合における基本的な問題の一つである。二つの距離集合がアフィン変換で写りあうとき、その距離集合たちは同型であるという。

球面上の距離集合は代数的組合せ論における様々な概念と密接に関係している。特に関係が深い、 (d, N, u) 球面コード、球面 t デザインの概念と、その距離集合との関係性を、線形計画法 [7, 8] の視点から述べたい。まず、その線形計画法で重要な役割を演じるゲーゲンバウワース多項式 (Gegenbauer polynomial) を紹介する。 d 次元ゲーゲンバウワース多項式 $\{G_k^{(d)}\}$ は以下で定義される多項式である。

$$xG_k^{(d)}(x) = \lambda_{k+1}G_{k+1}^{(d)}(x) + (1 - \lambda_{k-1})G_{k-1}^{(d)}(x).$$

ここで $\lambda_k = k/(d+2k-2)$, $G_0(x) \equiv 1$, $G_1(x) = dx$ と定義される. 任意の有限集合 $X \subset S^{d-1}$ に対して,

$$\sum_{x,y \in X} G_k^{(d)}(\langle x, y \rangle) \geq 0 \quad (1.1)$$

が任意の k で成り立っている. ここで $\langle x, y \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ 上の標準的な内積を意味している.

有限集合が球面 (d, N, u) コード (spherical (d, N, u) -code) であると呼ばれるのは, 球面 S^{d-1} 上の N 点部分集合で, その異なる 2 点間の内積の値が u 以下であるときを言う. 特に, 球面 (d, N, u) コードでその頂点数が最大のものを最適 (optimal) であると言う. 最適な球面 $(d, N, 1/2)$ コードを決定することは, d 次元接吻数 (kissing number) を決定することと同義である. 最適な (d, N, u) 球面コードを決定するのに特に重要であるのは, 以下の線形計画法による上界である. ここでは, ゲーゲンバウワー多項式の正定値性 (1.1) を用いた証明を紹介したい.

Theorem 1.1 ([8]). 以下の性質を満たす多項式 $F(x)$ が存在したとする:

- (1) 任意の $-1 \leq x \leq u$ に対して, $F(x) \leq 0$ が成り立つ.
- (2) ゲーゲンバウワー多項式展開 $F(x) = \sum_{i=0}^k f_i G_i^{(d)}(x)$ の係数 $f_i \in \mathbb{R}$ について, $f_0 > 0$, $f_i \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, k$) が成り立つ.

そのとき, 任意の球面 (d, N, u) コードに対して, $N \leq F(1)/f_0$ が成り立つ.

Proof. 集合 X を球面 (d, N, u) コードとする. そのとき,

$$NF(1) \geq \sum_{x,y \in X} F(\langle x, y \rangle) \geq \sum_{i=0}^k f_i \sum_{x,y \in X} G_i^{(d)}(\langle x, y \rangle) \geq N^2 f_0$$

が成り立ち, これは上界 $|X| \leq F(1)/f_0$ を意味する. □

ここで, Theorem 1.1 の上界を達成する集合 X が存在するとき, 異なる全ての $x, y \in X$ に対して, $F(\langle x, y \rangle) = 0$ となることに注意されたい. これは, $|A(X)| \leq k$ であることを意味しており, X が高々 k 距離集合であることを意味する.

球面 S^{d-1} 上の有限集合 X が球面 t デザインであると呼ばれるのは,

$$\frac{1}{|S^{d-1}|} \int_{S^{d-1}} f(x) d\sigma(x) = \frac{1}{|X|} \sum_{x,y \in X} f(x)$$

が任意の t 次以下の多項式 $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$ で成り立つときである. 任意の $1 \leq i \leq t$ について, $\sum_{x,y \in X} G_i^{(d)}(\langle x, y \rangle) = 0$ が成立することは, X が球面 t デザインであることと同値である. 強さ t と次元 d を固定した時に, なるべく少ない個数の点で球面 t デザインを構成することが球面デザインの問題である. 球面デザインにおける, 線形計画法による下界を紹介する.

Theorem 1.2 ([8]). 以下の性質を満たす多項式 $F(x)$ が存在したとする:

- (1) 任意の $-1 \leq x \leq 1$ に対して, $F(x) \geq 0$ が成り立つ.
- (2) ゲーゲンバウワー多項式展開 $F(x) = \sum_{i=0}^k f_i G_i^{(d)}(x)$ の係数 $f_i \in \mathbb{R}$ について, $f_0 > 0$, $f_i \leq 0$ ($i = t+1, t+2, \dots, k$) が成り立つ.

そのとき, 任意の球面 t デザイン X に対して, $|X| \geq F(1)/f_0$ が成り立つ.

Proof. 集合 X を球面 t デザインとする。そのとき、

$$|X|F(1) \leq \sum_{x,y \in X} F(\langle x, y \rangle) \leq |X|^2 f_0 + \sum_{i=t+1}^k f_i \sum_{x,y \in X} G_i^{(d)}(\langle x, y \rangle) \leq |X|^2 f_0$$

が成り立ち、これは下界 $|X| \geq F(1)/f_0$ を意味する。 $\square$

ここでも Theorem 1.2 を達成する球面デザインは、高々 k 距離集合となる。球面コード、球面デザイン双方において、線形計画法による上界・下界を達成する様な、特に良い有限集合は距離集合としても良い集合 (s, d に対して元の個数が大きい) となる場合が多い。距離集合の概念は2点間の距離のみに注目した単純なものであり、良い距離集合を構成することは良い球面コードや、球面デザインを構成することより易しいだろう。具体的には距離行列 (distance matrix) $(d(x, y)^2)_{x,y \in X}$ を与えることで構成が可能である [18, 9]。最大距離集合を分類することは、それ自体興味深い問題であるが、それが球面コード、球面デザインにおいても良い集合になっている可能性は十分にある。

2 知られている結果

$M_d(s)$ (resp. $M_d^*(s)$) を $\mathbb{R}^d$ (resp. S^{d-1}) 上の最大 s 距離集合の元の個数とする。決定されている最大距離集合の頂点数は次の表の通りである ([13, 14, 21] 等を参照)。

d	2	3	4	5	6	7	8		s	2	3	4	5	
$M_d(2)$	5	6	10	16	27	29	45		$M_2(s)$	5	7	9	12	$M_3(3) = 12(\# = 1)$
#	1	6	1	1	1	1	≥ 1		#	1	2	4	1	

d	2	3	4	5	6	7	8...21	22	24...39	
$M_d^*(2)$	5	6	10	16	27	28	$\frac{d(d+1)}{2}$	275	$\frac{d(d+1)}{2}$	$M_2^*(s) = 2s + 1(\# = 1)$
#	1	6	1	1	1	many	≥ 1	1	≥ 1	

知られている最大距離集合は非常に少なく、その決定は極めて難しいものである。最大距離集合の決定は、良い具体例と、良い上界を与えることで行われる。特別に良い散在的な具体例を除いて、一般の次元については以下の距離集合が最大であると思われる。

Example 2.1. $X := \{(x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_i \in \{0, 1\}, |\{i \mid x_i = 1\}| = s\}$ と定義する。 X の任意の元 x と、 $j = (1, 1, \dots, 1)$ に対して、 $\langle x, j \rangle = s$ であることに注意すると、 X は d 次元超平面上に存在することが分かる。ゆえに、 $d+1 \geq 2s$ のとき、 X は $\mathbb{R}^d$ 上の s 距離集合と見なすことができ、その元の個数は $\binom{d+1}{s}$ である。

上の具体例は、ジョンソンスキーム $J(d+1, s)$ の球面への埋め込みから得られることに注意されたい。頂点数 $\binom{d+1}{s}$ 以上の s 距離集合は極めて興味深い対象である。次に知られている上界を紹介する。

Theorem 2.2 ([1, 2, 8]). (1) X を $\mathbb{R}^d$ 上の s 距離集合とする。そのとき、 $|X| \leq \binom{d+s}{s}$ が成り立つ。

(2) X を S^{d-1} 上の s 距離集合とする。そのとき、 $|X| \leq \binom{d+s-1}{s} + \binom{d+s-2}{s-1}$ が成り立つ。

内積集合 $B(X) := \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in X, x \neq y\}$ が与えられたとき、球面上の s 距離集合に対しては、線形計画法による上界が有効である。

Theorem 2.3. B を区間 $[-1, 1)$ の部分集合とし、以下の性質を満たす多項式 $F(x)$ が存在したとする：

- (1) 任意の $\alpha \in B$ に対して、 $F(x) \leq 0$ が成り立つ。
- (2) ゲーゲンバウワー多項式展開 $F(x) = \sum_{i=0}^k f_i G_i^{(d)}(x)$ の係数 $f_i \in \mathbb{R}$ について、 $f_0 > 0$, $f_i \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, k$) が成り立つ。

そのとき、 $B(X) \subset B$ となる有限集合 X に対して、 $|X| \leq F(1)/f_0$ が成り立つ。

Proof. Theorem 1.1 の証明と同様。 □

内積集合 $B(X)$ が与えられたとき、Theorem 2.3 の条件を満たす多項式 $F(x)$ を探しだすことが問題であるが、ある種の $B(X)$ については以下のように自然にその多項式が与えられる。

Corollary 2.4. X を s 距離集合とする。ゲーゲンバウワー多項式展開 $\prod_{\alpha \in B(X)} (t - \alpha) = \sum_{i=0}^k f_i G_i^{(d)}(x)$ の係数 f_i について、 $f_0 > 0$, $f_i \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, k$) であるとき、 $|X| \leq F(1)/f_0$ が成り立つ。

この系で与えられる上界が良い評価を常に与えるという訳ではないことに注意されたい。Theorem 2.3 は $B(X)$ に依るために、ある $B(X)$ については、良い評価を与える多項式が存在しない。次に、Theorem 2.3 と Theorem 2.2 (2) の上界と相性のよい上界を紹介する。 $h_i := \binom{d+s-1}{s} - \binom{d+s-3}{s-2}$ とする。また、ゲーゲンバウワー多項式展開 $\prod_{\alpha \in B(X)} (t - \alpha) = \sum_{i=0}^k f_i G_i^{(d)}(x)$ の係数 $f_i \in \mathbb{R}$ について、 $\mathcal{I}(X) = \{i \mid f_i > 0\}$ と定義する。

Theorem 2.5 ([17]). $X \subset S^{d-1}$ を s 距離集合とする。そのとき、 $|X| \leq \sum_{i \in \mathcal{I}(X)} h_i$ が成り立つ。

$\mathcal{I}(X) = \{1, 2, \dots, s\}$ のとき、 $\sum_{i \in \mathcal{I}(X)} h_i = \binom{d+s-1}{s} + \binom{d+s-2}{s-1}$ となるため、 $\mathcal{I}(X) \subsetneq \{1, 2, \dots, s\}$ のとき、Theorem 2.5 の上界は、Theorem 2.3 の上界を真に改善している。また、 $\mathcal{I}(X) = \{1, 2, \dots, s\}$ のとき、その s 距離集合 X に対しては Corollary 2.4 が適応できるため、Corollary 2.4 と Theorem 2.5 の上界を組み合わせることで、既存の上界である Theorem 2.2 の上界を改善できる可能性は高いと言える。

次に Larman-Rogers-Seidel の定理を紹介する。

Theorem 2.6 ([12]). $X \subset \mathbb{R}^d$ を 2 距離集合とし、 $A(X) = \{a_1, a_2\}$ ($a_1 > a_2$) とする。 $|X| \geq 2d + 4$ のとき、ある正整数 k ($2 \leq k \leq 1/2 + \sqrt{d/2}$) が存在して、 $a_2^2/a_1^2 = (k-1)/k$ となる。

ここでの条件 $|X| \geq 2d + 4$ は Neumaier[18] により $|X| \geq 2d + 2$ に改善された。 $2d + 1$ 点 2 距離集合については、Conference graph の球面の埋め込みから、 a_2^2/a_1^2 の値が整数比にならないものの存在が知られている [18]。Larman-Rogers-Seidel の定理は [16] により次の様に一般化された。

Theorem 2.7. $X \subset \mathbb{R}^d$ (resp. $X \subset S^{d-1}$) を s 距離集合とし、 $A(X) = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ とする。 $N := \binom{d+s-1}{s-1} + \binom{d+s-2}{s-2}$ (resp. $N := \binom{d+s-2}{s-1} + \binom{d+s-3}{s-2}$) とおく。 $|X| \geq 2N$ のとき、それぞれの $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ について、

$$\prod_{j=1,2,\dots,s, j \neq i} \frac{a_j^2}{a_j^2 - a_i^2}$$

が整数 K_i となる。さらに、 $|K_i| \leq \left\lfloor 1/2 + \sqrt{N^2/(2N-2) + 1/4} \right\rfloor$ が成り立つ。

条件 $|X| \geq 2N$ については、 S^{d-1} の 2 距離集合については $|X| \geq 2N = 2d + 2$ と最適なものを与えているが、 $\mathbb{R}^d$ 上の 2 距離集合については $|X| \geq 2N = 2d + 4$ と最適でなく、条件の改善が望まれる。

3 主結果

Musin [14] は球面上の 2 距離集合について, Theorem 2.2 を改善する一般的なアルゴリズムを与えた. その手法では Theorem 2.3 と Theorem 2.5, そして Larman-Rogers-Seidel の定理が重要な役割を演じている. この手法を Larman-Rogers-Seidel の定理の一般化を用いて任意の s について拡張することに成功した [15]. そのアルゴリズムについては次の節で触れたい. その手法により, 球面上の最大 3 距離集合に対して次の結果を得た.

Theorem 3.1 ([15]).

$$M_8^*(3) = 120, \quad M_{22}^*(3) = 2025.$$

球面 S^7 上の最大 3 距離集合は E_8 ルート系 240 点の部分集合として得られる. E_8 ルート系の元のノルムを 1 に正規化すれば, $B(E_8) = \{\pm 1/2, 0, -1\}$ となり, それは S^7 上の 4 距離集合である. 特に, 全ての $x \in E_8$ について, $-x \in X$ (極対的) となることに注意する. $Y = \{\{x, -x\} \mid x \in E_8\}$ とすれば, $|Y| = 120$ であることが分かる. それぞれの $\{x, -x\} \in Y$ から, 勝手に一点 x (または $-x$) を選ぶことで 120 点部分集合 $Z \subset E_8$ を構成できる ($Z \cup (-Z) = E_8$). そのとき, $A(Z) = \{\pm 1/2, 0\}$ となり Z は 120 点 3 距離集合となる. その様な Z は同型を除いても沢山構成できる. 8 次元球面最大 3 距離集合の分類は未解決である. 球面 S^{22} の最大 3 距離集合は Leech 格子の最小ノルムの格子点の集合の 22 次元超平面の部分集合としてとってこれる. この部分集合は Q 多項式アソシエーションスキームの構造を持つことが知られており, 最大 3 距離集合として一意的であると思われるが未解決である.

論文 [14] で, $7 \leq d \leq 39$ ($d \neq 22, 23$) について, $M_2^*(d) = d(d+1)/2$ であることが示されている. その最大 2 距離集合は $8 \leq d \leq 39$ ($d \neq 22, 23$) については, Example 2.1 で与えられるのものと一致する. S^6 については, 堅い球面 5 デザイン (tight spherical 5-design) の部分集合として, 沢山の具体例が知られている. その部分集合の二つの内積の和は零であり, 次のように分類できる.

Proposition 3.2. 球面 S^6 上の最大 2 距離集合で二つの内積の和が零のものは, 同型を除いてちょうど 467 個存在する.

S^6 の最大 2 距離集合において内積の和が零でないものは存在しないと思われるが, 未解決である.

4 証明の概略

4.1 Theorem 3.1

Theorem 3.1 の証明の概略を紹介したい. まず, Larman-Rogers-Seidel の定理の一般化を用いる. Theorem 2.7 内の式を内積 $\beta_i = 1 - \alpha_i^2/2$ を使って書きなおす.

$$K_i := \prod_{j=1,2,\dots,s, j \neq i} \frac{1 - \beta_j}{\beta_i - \beta_j}.$$

球面版の $2N(d, s)$ の値は, $2N(8, 3) = 88$, $2N(22, 3) = 550$ であることに注意しよう. 具体例から, $M_8^*(3) \geq 120$, $M_{22}^*(3) \geq 2025$ であるから, 最大 3 距離集合から得られる K_i は不等式 $|K_i| \leq \left\lfloor 1/2 + \sqrt{N^2/(2N-2) + 1/4} \right\rfloor$ を満たす整数である. 内積に $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < 1$ と大小関係をつけてやれば, β_1 と β_2 は K_i たちと β_3 を用いて次のように書きあらわせることが分かる.

$$\beta_1 = \frac{K_1 - \beta_3 K_1 K_3 - (\beta_3 - 1)\sqrt{-K_1 K_2 K_3}}{K_1(K_1 + K_2)},$$

$$\beta_2 = \frac{K_2 - \beta_3 K_2 K_3 + (\beta_3 - 1)\sqrt{-K_1 K_2 K_3}}{K_2(K_1 + K_2)}.$$

$\mathbb{R}^d$ 上の有限集合 X の互いに異なる 2 点間の内積の値が全て 0 以下になるとき, $|X| \leq 2d$ であることが知られている (Rankin bound [19], [10, page 16]). このことから, $0 < \beta_3 < 1$ としてよい. 数値計算により上界を計算するため, この $0 < \beta_3 < 1$ を十分に細かい区間に分割する. ここで得られた有限の β_3 , そして整数 K_i たちについて, 線形計画法による上界 $L(\beta_3, \{K_i\})$ (Theorem 2.3) を計算し, また Theorem 2.5 における上界 $H(\beta_3, \{K_i\})$ も計算する. そのとき,

$$M_d^*(3) \leq \max_{\beta_3, \{K_i\}} \min\{L(\beta_3, \{K_i\}), H(\beta_3, \{K_i\})\}$$

が新しい上界となる. ここで計算された上界が, $M_8^*(3) \leq 120$, $M_{22}^*(3) \leq 2025$ となるために, その上界を達成する具体例の存在から, $M_8^*(3) = 120$, $M_{22}^*(3) = 2025$ と決定される.

S^7 , S^{21} 上の最大 3 距離集合の分類については, まだ多くの問題を残している. 分類を行うにあたって, 内積集合の決定が必要だが, その決定も未解決のままである.

4.2 Proposition 3.2

ここでは Proposition 3.2 の証明の概略を与える. まず S^6 上の二つの内積の和が零である最大 2 距離集合は, $f_1 = 0$ となり, Theorem 2.5 の上界 $|X| = \binom{d+1}{2} = 28$ を達成する. その上界は equiangular lines としての上界とも一致しており, その内積集合は $\{\pm 1/3\}$ と決定できる. その内積集合を持つ 28 点最大 2 距離集合 X について, $X \cap (-X) = \emptyset$ であるから, $Y = X \cup (-X)$ は 56 点の極対的な 3 距離集合となる ($B(Y) = \{-1, \pm 1/3\}$). 56 点の極対的な 3 距離集合は堅い球面 5 デザイン (tight spherical 5-design) であることが知られており, その一意性も示されている [24, 20]. また, 自己同型群 $\text{Aut}(Y)$ は E_7 ルート系の鏡映群 $W(E_7)$ と同型で, $|\text{Aut}(Y)| = 2903040$ である [24]. 知られている一意的な堅い球面 5 デザイン Y を極対的な 28 個のペアの和集合 $Y = \bigcup_{i=1}^{28} \{x_i, -x_i\}$ と書く. そのとき, 最大 2 距離集合 X は次の集合族の元である:

$$\mathfrak{X} = \{X \subset Y \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, 28\}, |X \cap \{x_i, -x_i\}| = 1 \text{ and } |X| = 28\}.$$

$|\mathfrak{X}| = 2^{28}$ となることに注意されたい. $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}$ が同型であるとする, ある $g \in O(7, \mathbb{R})$ が存在して,

$$X^g = X_1^g \cup (-X_1^g) = X_2 \cup (-X_2) = Y$$

となるために, $g \in \text{Aut}(Y)$ であることが分かる. $X, X' \in \mathfrak{X}$ に対して同値関係を

$$X \sim X' \Leftrightarrow \exists g \in \text{Aut}(Y), X^g = X'$$

と与えたとき, $\mathfrak{X}/\sim$ の完全代表系が, 内積非負の最大 2 距離集合の分類を与えている.

$X \in \mathfrak{X}$ とし, $x \in X$ に対して $\varphi_x(X) = (X \setminus \{x\}) \cup \{-x\}$ と定義する. $[X_1], [X_2] \in \mathfrak{X}/\sim$ に辺集合

$$\mathcal{E} = \{ \{[X_1], [X_2]\} \mid \exists X_1 \in [X_1], \exists X_2 \in [X_2], \exists x \in X_1, \varphi_x(X_1) = X_2 \}$$

を与えてグラフの構造を入れる. ここで重要なことは, グラフ $(\mathfrak{X}/\sim, \mathcal{E})$ が連結であることである.

コンピューター (Magma [3]) を用いて, $\mathfrak{X}/\sim$ の完全代表系を与えた. そのアルゴリズムを紹介する. 初期設定として, $X \in \mathfrak{X}$ をひとつ固定し $M = \{X\}$, $t = |W(E_7)|/|\text{Aut}(X)|$ とする. 自己同型群の計算は Magma の組み込み関数を用いる.

- (1) 勝手に選んだ $x \in X$ について, $\varphi_x(X)$ が M の元全てと同型でなければ, M に $\varphi_x(X)$ を加え, $t = t + |W(E_7)|/|\text{Aut}(\varphi_x(X))|$ とする. (同型判定は Magma の組み込み関数を用いる)
- (2) $t = 2^{28}$ ならば終了. そうでなければ, 新たな $x \in X$ について, (1) を実行. 新たな $x \in X$ が存在しない場合は, 新たな $X \in M$ をとり (1) を実行.

ここで作られた M が $\mathfrak{X}/\sim$ の完全代表系を与えている. $|W(E_7)|/|\text{Aut}(\varphi_x(X))|$ の値は $|\{Z \in \mathfrak{X} \mid \varphi_x(X) \sim Z\}|$ と等しいことに注意する. グラフ $(\mathfrak{X}/\sim, \mathcal{E})$ は連結であることから, t は必ず 2^{28} に到達し, このプログラムは終了する. このアルゴリズムは 2^{28} 個のグラフを高々 $28 \times |\mathfrak{X}/\sim|$ のステップ (実際にはもっと少ないステップ) で分類を完了させることができ, 非常に効率の良いものとなっている. 実際の最大 2 距離集合の自己同型群の位数は次の表のようになっている.

order of automorphism	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	24
number of sets	8	81	111	5	53	2	45	2	31	2	5	30

32	36	48	60	64	72	96	120	128	144	192	240	360	384	432
4	1	28	1	3	10	3	2	1	4	7	8	1	3	2

720	1152	1440	1920	5040	40320	51840
4	3	1	2	1	1	2

ちなみに, 467 個の 28 点最大 2 距離集合の中には, $(28, 12, 6, 4)$ 強正則グラフの構造をもつものが 4 つあるが, その自己同型群の位数は, 96, 360, 384, 40320 である. $x \in Y$ を固定して,

$$X_+ = \{x\} \cup \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle = \frac{1}{3}\}$$

$$X_- = \{x\} \cup \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle = -\frac{1}{3}\}$$

とすると, この X_+ , X_- の自己同型群の位数が 51840 である. この自己同型群は x を固定している. $\{y \in Y \mid \langle x, y \rangle = \frac{1}{3}\}$ が $(27, 10, 1, 5)$ 強正則グラフの構造を持っていて, その自己同型群が X_+ の自己同型群と同型である. その群は E_6 ルート系の鏡映群 $W(E_6)$ と同型であることが知られている.

References

- [1] E. Bannai, E. Bannai, and D. Stanton, An upper bound for the cardinality of an s -distance subset in real Euclidean space, II, *Combinatorica* 3 (1983), 147–152.
- [2] A. Blokhuis, A new upper bound for the cardinality of 2-distance sets in Euclidean space, Convexity and graph theory (Jerusalem, 1981), 65–66, *North-Holland Math. Stud.*, 87, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [3] W. Bosma and J. Cannon, Handbook of Magma Functions, Department of Mathematics, University of Sydney, Available online at <http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/>.
- [4] A.E. Brouwer, A.M. Cohen and A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, 1989.

- [5] L.C. Chang, Association schemes of partially balanced designs with parameters $v = 28$, $n_1 = 12$, $n_2 = 15$ and $p_{11}^2 = 4$, *Sci. Record (N.S.)* 4 (1960), 12–18.
- [6] W.S. Connor, The uniqueness of the triangular association scheme, *Ann. Math. Statist.* 29 (1958), 262–266.
- [7] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, *Philips Res. Rep. Suppl.* No. 10 (1973).
- [8] P. Delsarte, J.M. Goethals, and J.J. Seidel, Spherical codes and designs, *Geom. Dedicata*, 6 (1977), 363–388.
- [9] S.J. Einhorn and I.J. Schoenberg, On Euclidean sets having only two distances between points I, II, *Indag. Math.*, 28 (1966), 479–488, 489–504. (Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A69)
- [10] T. Ericson and V. Zinoviev, *Codes on Euclidean spheres*, North-Holland Mathematical Library, 63. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2001.
- [11] A.J. Hoffman, On the uniqueness of the triangular association scheme, *Ann. Math. Statist.* 31 (1960), 492–497.
- [12] D.G. Larman, C.A. Rogers, and J.J. Seidel, On two-distance sets in Euclidean space, *Bull. London Math. Soc.* 9 (1977), 261–267.
- [13] P. Lisoněk, New maximal two-distance sets, *J. Combin. Theory, Ser. A* 77 (1997), 318–338.
- [14] O.R. Musin, Spherical two-distance sets, *J. Combin. Theory Ser. A* 116 (4) (2009), 988–995.
- [15] O.R. Musin and H. Nozaki, Bounds on three- and higher-distance sets, to appear in *European J. Combin.*
- [16] H. Nozaki, A generalization of Larman-Rogers-Seidel’s theorem, to appear in *Discrete math.*
- [17] H. Nozaki and M. Shinohara, On a generalization of distance sets, *J. Combin. Theory, Ser. A*, 117 (2010), no. 7, 810–826.
- [18] A. Neumaier, Distance matrices, dimension, and conference graphs, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* 43 (1981), 385–391.
- [19] R.A. Rankin, On the closest packing of spheres in n dimensions, *Ann. of Math.* (2) 48, (1947), 1062–1081.
- [20] J.J. Seidel, Strongly regular graphs with $(-1, 1, 0)$ adjacency matrix having eigenvalue 3. *Linear Algebra and Appl.* 1 (1968), 281–298.
- [21] M. Shinohara, Uniqueness of maximum three-distance sets in the three-dimensional Euclidean Space, preprint.

- [22] S.S. Shrikhande, On a characterization of the triangular association scheme, *Ann. Math. Statist.* 30 (1959), 39–47.
- [23] E. Spence, Two-graphs, in: *The CRC Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition* (eds.: Colbourn and Dinitz), 875–882, CRC Press, 2006.
- [24] D.E. Taylor, Regular 2-graphs. *Proc. London Math. Soc.* (3) 35 (1977), no. 2, 257–274.