

60

Closed Partitions of Maximal Ideal Spaces

山形大 理 富 山 淳

§ 1. 序

A を compact Hausdorff 空間 X 上の function algebra とし M_A を A の maximal ideal の空間とする。 M_A に (高々) 可算個の開集合の covering $\{F_j\}$ が与えられたとき、 A の構造と、 A の各開集合 F_j 上への制限 $A|_{F_j}$ のうちとの同様の関係について、最近 Gamelin と Wilken によって得られた結果 (T. W. Gamelin & D. R. Wilken; closed partitions of maximal ideal space) に筆著と石川弘氏 (琉球大学) によって得られた結果をつけ加えたものが本稿である。 尚後者の部分は R. Chalice によって同様のことが (もっと強い条件下で) Amer. Math. Society の Notices (vol. 15 (1968),) に予告されておられ、和田淳蔵氏もほぼ同じ結果を独立に得られている。

以下 A の Šilov boundary を ∂A , Choquet boundary を $B(A)$ とかき、 X を A の表現空間と呼ぶことにする。

3.2. Essential set と closed partition

一般に, A を X 上の function algebra としたとき, A に関する $C(X)$ の最大 ideal の null とする X の閉集合を A の essential set とする. A の essential set は定義より, 表現空間 X に関係して定まるが, この形付けのよりに非常にみずう形で決定される. (以下の結果については富山 [9] を参照).

$$\text{今 } M_A = P \cup K_\alpha \cup K_\beta \cup \dots$$

を M_A の (A に関する) maximal antisymmetric sets への分解とする. 但しここで P は一足だけからなる antisymmetric set (maximal) 全体の集合で $K_\alpha, K_\beta, \dots$ はその他の maximal antisymmetric set (以下 m. a. s. と略記する) である. 勿論このような分解の型は表現空間に関係しただけで定まる. 即ち A の任意の表現空間 X に対して, $X \in M_A$ の部分空間と見たとき,

$$X = P \cup (K_\alpha \cap X) \cup (K_\beta \cap X) \cup \dots$$

は又 X の A による m. a. s. への分解になっている. ここで X に共通に含まれる P の内核 $\text{int } P \in M_A$ であるとき, これは又各 X 内での P の内接の集合と一致し, X での A の essential set E_X は

$$E_X = X \sim \text{int } P = (\text{int } P)^c$$

と与えられる. 従って E_X は

$$E_X = \overline{\bigcup_{\alpha} (K_{\alpha} \cap X)}$$

という風に表わされる。ここで $K_{\alpha} \cap X$ は X でも一定だけである m. a. s. になっていることはよく知られている。

$\text{int } P$ を次の形で characterize することもある。(Mullins [6] の一般の場合への拡張)。

定理 1. (石川-富山-和田) $M_A = \text{int } P$ であることは同値である。(1) $x \in \text{int } P$

(2) x のある近傍が存在して $A|_{\overline{U(x)}} = C(\overline{U(x)})$

補題 I. $x \in B(A)$ で且つ定理 1 の (2) の性質が成立すれば $x \in \text{int } P$ である。

証明. x は Choquet boundary の点だから $U(x)$ に含まれる x の近傍 V と A の函数 f が存在して

$$f(x) = \|f\| = 1$$

且つ $M_A \sim V$ 上では $|f| < 1$ と出来る。 $M_A \sim V$ は compact だから定数 r があって $M_A \sim V$ 上では

$$|f| \leq r < 1.$$

次に $r < s < 1$ とする s をとり

$$U_s = \{ y \in M_A \mid \text{Re } f(y) \geq s \}$$

とおくと U_s は x の近傍で V に含まれる。以下は Mergeljan

の定理を利用すれば $f(\overline{U_0}) \cup f(M_A \sim V)$ 上一族収束する多項式列 $\{p_n\}$ で

$$f(\overline{U_0}) \text{ 上 } p_n(z) \longrightarrow 1$$

$$f(M_A \sim V) \text{ 上 } p_n(z) \longrightarrow 0$$

とすることが存在する。一方 $A|_{\overline{U(x)}} = C(\overline{U(x)})$ より A の中に函数 g が存在して

$$g(x) = 1 \quad \text{且つ} \quad g(V \sim U_0) = 0$$

と出来る。ここで $g(p_n \circ f)$ を f とするとつくり方からこれは M_A 上一族収束で極限函数を h とすると $h \in A$,

$$h(x) = 1 \quad \text{且つ} \quad U_0 \text{ の外で } h \equiv 0.$$

A は $\overline{U(x)}$ 上では連続函数全体と一致するから、これから容易に x と他々の点を区別する A の real 奇函数が構成出来る。即ち $x \in \text{int } P$.

$E \in M_A$ の essential set とする。 A の E 上への制限 $A|_E$ は $C(E)$ で closed であることが知られており、これは E 上の function algebra と考えることが出来る。こゝとて

補題 2. $P_i \in A|_E$ の一列よりなる m.a.s. の全体とすると、 $\text{int } P_i = \emptyset$.

証明は $P_i = E \cap P$ とするところ及び前出の E の構造定

理より証明される。

定理 1 の証明 (1) $\Rightarrow$ (2) は Bishop - glicksberg の与えた m. a. s. への分解定理の結果 ([2], [4]) より容易に導かれるから (2) $\Rightarrow$ (1) を示す。今 $x \notin \partial A$ とすると、 x の近傍 U で $U(x)$ に含まれ且つ $U \cap \partial A = \emptyset$ とするものが存在する。このとき local maximum modulus principle ([1]) より

$$\partial A|_{\overline{U}} \subset \partial U$$

$$\text{しかるに } \partial(A|_{\overline{U}}) = \partial A|_{\overline{U}} = \partial C(\overline{U}) = \overline{U}$$

であるから矛盾である。よって $x \in \partial A$ 。次に $U(x)$ に含まれる任意の x の近傍 V をとると、 V は $B(A)$ の点を含み、 $A|_{\overline{V}} = C(\overline{V})$ 。よって補題 1 より V の点はすべて P の内点である。従って $x \in \overline{\text{int } P}$ 。今 $x \in E$ とすると、 x は E 内で (2) の条件を満たし、且つ $M_{A|E} = E$ 。よって前の議論で

$$x \in \overline{\text{int } P_1}$$

これは補題 2 に矛盾する。

Q. E. D.

さて M_A に閉集合の可算列 $\{F_j\}$ が与えられたとする。今各 $A|_{F_j}$ は $C(F_j)$ で closed とすると function algebra $A|_{F_j}$ の F_j での essential set E_j が与えられるが E は $\{F_j\}$ によって決まらる。

定理2 (石川-富山) $E = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j}$

証明. essential set の定義から E_j が E に含まれることは容易にわかる. よって $E \supset \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j}$

今 $U = E \setminus \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} \neq \emptyset$ とすると U は E の開集合で

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} (U \cap F_j)$$

よって category theorem からある番号 k が存在して $U \cap F_k$ は内点をもつ. これを x とすると $x \in F_k \setminus E_k = P_k$ の内核.

(但し P_k は $A|F_k$ の σ -内点よりなる m. a. s. の全体 の 集合).

そこで x の近傍 $V \subset \overline{U} \subset U \cap F_k$ とすると Bishop-Glicksberg の分解定理より $A|V = C(\overline{V})$. これは定理1の結果に矛盾する.

系 (Gamelin, Wilken, 石川, 富山, 和田)

$A \in X$ 上の function algebra, $\{F_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X$ の閉集合の cover とする. 今 $A|F_j = C(F_j)$ ($j=1, 2, \dots$) ならば $A = C(X)$ である.

このことは $X = M_A$ とするから定理2より容易に結論が得られる.

る M_A の閉集合の cover から決定される函数と A との同様の関係。

$A \in X$ 上の function algebra, $E \in X$ の閉集合としたとき, E の A -convex hull $\hat{E}$ は

$\hat{E} = \{ \varphi \in M_A \mid \text{任意の } f \in A \text{ に対して } |\varphi(f)| \leq \|f\|_E \}$ と定義する。 $\hat{E}$ は $\overline{A\hat{E}}$ の maximal ideal space である。

補題3. $\mathcal{U} \in \partial A$ の閉集合とする。今 $f \in A$ が $\mathcal{U}$ 上で 0 になる f は M_A の閉集合

$$\mathcal{V} = M_A \sim (\widehat{\partial A \sim \mathcal{U}})$$

上で 0 になる。又 $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ は $\mathcal{U}$ で dense である。

証明は Glicksberg [5] を参照

Function algebra $A \in M_A$ 上で考えたとき A と $A|_{\mathcal{U}}$ (local) による $C(M_A)$ の函数 f によって生成された function algebra $[A, f]$ の maximal ideal は M_A と一致する $\mathcal{U}$ ことが知られているが (Stolzenberg [8]) これは $\mathcal{U}$ と一般に次のことが言える

定理3 (Gamelin-Wilkens) $\{F_j\}$ は M_A の閉集合の covering とし $f \in C(M_A)$ が $f|_{F_j} \in A|_{F_j}$ をみたすとする。このとき $\partial[A, f] = \partial A$ 且 $M_{[A, f]} = M_A$ である。

証明. $\partial[A, f] \neq \partial A$ とする. (category theorem)

$\partial[A, f] \sim \partial A$ には開集合 U が存在して, ある番号 k に対して

$U \subset F_k$. F_k 上で f と一致する函数 f_k をとると U 上で $f - f_k$ は 0, よって補題 3 より $f - f_k$ は

$$V = M_{[A, f]} \sim (\partial[A, f] \sim U)$$

上で 0 とする. よって

$$\pi : M_{[A, f]} \longrightarrow M_A$$

を自然に導びかした projection map とすると, $[A, f] \mid V \subset \overline{A \mid V}$ であるから $\pi \mid V$ は 1対1 である. さて

$$\partial[A, f] \cap (V \sim \partial A) \neq \emptyset$$

とする. $x_0 \in \partial[A, f] \cap (V \sim \partial A)$ とし, 閉区間 $U_0 \subset V \sim \partial A$ に入るようにする. このとき π は U_0 上で 1対1 連続になるから homeomorph である. よって $U_0 \in M_{[A, f]}, M_A$ の両方の中で

$$\partial([A, f] \mid U_0) \subseteq \partial(\overline{A \mid U_0}) \subseteq (U_0 \cap \partial A) \cup \partial U_0 = \partial U_0.$$

(最後の $\subseteq$ は Rossi [7] の local maximum modulus principle による) これは

$$x_0 \in \partial[A, f] \cap \text{int}(U_0) \subseteq \partial([A, f] \mid U_0)$$

に矛盾する. よって $\partial[A, f] \cap (V \sim \partial A) = \emptyset$. しかしこれは補題 3 の最後の部分に矛盾する. 従って $\partial[A, f] = \partial A$.

次に $g \in [A, f]$ の Gelfand 表現函数とすると, 任意の $g \in A$ は

$\hat{g} = g \circ \pi$ とかける. $\gamma \in \pi^{-1}(F_j)$ として $f \circ \pi$ を考えたと

$$f \circ \pi|_{\pi^{-1}(F_j)} \in [A, \hat{f}]|_{\pi^{-1}(F_j)} \quad (j=1, 2, \dots).$$

今 $M_{[A, \hat{f}]}$ 上で $[A, \hat{f}]$, $[A, \hat{f}, f \circ \pi]$ と $\dots$ function algebra 12
前のことを適用すると

$$\partial[A, \hat{f}, f \circ \pi] = \partial[A, \hat{f}] = \partial A.$$

よって $\hat{f} - f \circ \pi$ は $\partial[A, \hat{f}, f \circ \pi]$ 上で 0. 従って $M_{[A, \hat{f}, f \circ \pi]}$
上で $\hat{f} \equiv f \circ \pi$. よって $\hat{f}$ は各 fibre $\pi^{-1}(x)$ 上で定数となり
 π は 1 対 1 写像であることがわかる. 即ち $M_{[A, \hat{f}]} = M_A$.

上の定理の仮定を $f|_{F_j} \in \overline{A|_{F_j}}$ とやるものとすれば, covering
が 2 つの閉集合でつくることができ

定理 4. $\{F_1, F_2\} \in M_A$ の閉集合の cover. 今 $f \in C(M_A)$
が $f|_{F_j} \in \overline{A|_{F_j}}$ で与えられた表現空間 X 上で A の関数 g と等しい
とすると, M_A 上でも $f \equiv g$ である. i.e. $f \in A$.

証明. $X = \partial A$, $f|_{\partial A} = 0$ として一般性を失わない.
更に $E = M_A \sim \text{int}(f^{-1}(0))$, $B = \overline{A|_E}$ とおくと, local
maximum modulus principle から

$$\partial B \subseteq \partial A \cup \partial \hat{E}.$$

しかるに $f|_{\partial \hat{E}} = 0$ だから $f|_{\partial B} = 0$. $\gamma \in A \cap B$, $F_j \in$
 $F_j \cap E$ であるから $f|_{\hat{E}} = 0$ が言えるわけだから.

$$M_A = A - \text{convex hull of } \{f \neq 0\}$$

としてよい。次に $\partial A \cap \text{int } F_2 \subseteq \partial \overline{A|F_2} \subseteq (F_2 \cap \partial A) \cup \partial F_2$

より $f|_{\partial A \cap \text{int } F_2} = 0$ 。よって補題より f は

$$V = \widehat{F_2} \sim (\overline{\partial A|F_2} \sim (\partial A \cap \text{int } F_2))$$

上で 0 となる。こゝで

$$\partial \overline{A|F_2} \sim (\partial A \cap \text{int } F_2) \subseteq \partial F_2$$

であるから $f|_{\widehat{F_2} \sim \partial F_2} = 0$ 。 $\partial F_2 \subset \widehat{F_1}$ であるから

$$f|_{\widehat{F_2} \sim \partial F_2} = 0, \text{ よって } f|_{F_2 \sim \widehat{F_1}} = 0.$$

従って f の support は $\widehat{F_1}$ に含まれ、 $M_A = \widehat{F_1}$ となる。これか

ら $\partial A \subseteq F_1$ 。よって $\{f_n\} \subset A$ を F_1 上 f に一様収束する

ようにとると、 ∂A 上で $f|_{\partial A} = 0$ に一様収束、よって $\{f_n\}$ は

M_A 上で 0 に一様収束する。従って結局 $f|_{F_1} = 0$, よって

$f \equiv 0$ となる。

定理 5. $\{F_1, F_2\} \in M_A$ の closed cover, $f \in C(M_A)$ は $f|_{F_j} \in \overline{A|F_j}$ とする函数とする。こゝとき $M_{[A, f]} = M_A$ である。

証明. 定理 3 の証明の後半の方とて

$$\pi : M_{[A, f]} \rightarrow M_A$$

と前と同様にすると、 $f \circ \pi$ は $\pi^{-1}(F_j)$ 上 $[A, f]$ の函数で一様

近似出来る。しかも $M_A (\supset \partial(A, f))$ 上では $\hat{f} = f \circ \pi$ 。従

つて前定理から $M[A, f]$ 上で $\hat{f} \equiv f \circ \pi$ が言え、 π が 1 対 1 になることから $M[A, f] = M_A$ を得る。

gamelin - Wilken の論文にはこのあと定理 5 では必ずしも $\partial(A, f) = \partial A$ とは言えないこと及び定理 4 と 5 は 3 つの開集合の cover に拡張出来ることの例が disk algebra を使っているが詳細は略する。

文献

- [1] H. S. Bear, Complex function algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 90 (1959), 383-392.
- [2] E. Bishop, A generalization of the Stone-Weierstraß Theorem, Pacific J. Math., 11 (1961), 777-783.
- [3] R. Chalice, On the essential set of function algebras, Notices of Amer. Math. Soc. 15 (1968), abstract.
- [4] I. Glicksberg, Measures orthogonal to algebras of continuous functions, Trans. Amer. Math. Soc., 105 (1962), 415-435.
- [5] ———, Maximal algebras and a theorem of Rado, Pacific J. Math., 14 (1964), 919-941.
- [6] R. Mullins, The essential set of function algebras

- Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 271-273.
- [7] H. Rossi, The local maximum modulus principle,
Ann. of Math., 72 (1960), 1-11
- [8] G. Stolzenberg, The maximal ideal space of the
functions locally in a function algebra, Proc. Amer.
Math. Soc., 14 (1963), 342-345
- [9] J. Tomiyama, Some remarks on antisymmetric
decompositions of function algebras, Tohoku Math.
J. v 16 (1964), 340-344.
- [10] D. Wilken, Maximal ideal spaces and A -convex-
ity, Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966), 1357-1362.