

Eisenstein 級数 と Hecke 環の表現

立教大理 佐藤文広 (Fumihiko SATO)

信州大理 広中由美子 (Yumiko HIRONAKA)

§ 1. 導入

このノートでは、対称空間上のある種の関数空間の、Hecke環加群としての構造に関する若干の結果を述べたい。そのために、Eisenstein 級数を定義し、これが 'Euler積' を持つための条件などを考察し、いくつかの例について述べる。

考えている問題を明らかにするために、 $GL(n)$ の場合を説明する。

k を $\mathbb{F}$ 進体、 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ をその整数環、 $q = \#(\mathcal{O}_{\mathbb{F}}/\mathfrak{f})$ 、 $|\cdot|_{\mathbb{F}}$ を $k_{\mathbb{F}}$ のノルム、 $G_{\mathbb{F}} = GL(n, k_{\mathbb{F}})$ 、 $K_{\mathbb{F}} = GL(n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}})$ とする。Hecke環は

$$(1.1) \quad \mathcal{H}(G_{\mathbb{F}}, K_{\mathbb{F}}) = \{ f : G_{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \text{compactly supported} \\ \text{両側 - } K_{\mathbb{F}} \text{ 不変} \end{array} \}$$

で与えられる。この元 f と $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し

$$(1.2) \quad \hat{f}(\nu) = \int_{G_{\mathbb{F}}} \Phi_{\nu}(g) f(g) dg;$$

但し、 dg は $G_{\mathbb{F}}$ 上の Haar 測度で、 $G_{\mathbb{F}}$ の元 $g = k \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ ($k \in K_{\mathbb{F}}$) に対し、

$$\Phi_{\nu}(g) = \prod_{i=1}^n |a_i|_{\mathbb{F}}^{\nu_i - (n-2i+1)/2}$$

と定める。これにより、球Fourier変換 (佐武変換) が得られる:

$$(1.3) \quad \hat{\cdot} : (G, K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} [q^{\pm \nu_1}, \dots, q^{\pm \nu_n}] S_n.$$

ここで、右辺の対称群 S_n は $q^{\pm \nu_i}$ に、添数 i の置換として作用する。

特に、 f が $K_F \begin{pmatrix} \pi^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi^{\lambda_n} \end{pmatrix} K$ (π は k_F の素元、 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$) の特性関数のとき、

$$(1.4) \quad \hat{f}(\nu) = q^{\sum_{i=1}^n (n-2i+1)\nu_i/2} P_{\lambda}(q^{-\nu_1}, \dots, q^{-\nu_n}; q^{-1}),$$

$$P_{\lambda}(x_1, \dots, x_n; t) = \sum_{w \in S_n / S_n^{\lambda}} x_{w(1)}^{\lambda_1} \cdots x_{w(n)}^{\lambda_n} \cdot \prod_{\lambda_i > \lambda_j} \frac{x_{w(i)}^{-t} x_{w(j)}}{x_{w(i)} - x_{w(j)}}$$

で与えられる (cf. [2]C5, [3]§8)。

一方 $G = GL(n, \mathbb{Q})$, $\Gamma = GL(n, \mathbb{Z})$ とすると、Hecke環 $\mathcal{A}(G, \Gamma)$ は、
両側 Γ -剰余類の形式的有限一次結合 $\sum_{[g] \in \Gamma \backslash G / \Gamma} \mathbb{C}[g]$ に積を

$$(1.5) \quad [g][h] = \sum_{[x]} \# \{ (i, j) \mid g_i h_j \in [x] \} [x], \quad [g] = \bigcup_i g_i \Gamma, \quad [h] = \bigcup_j h_j \Gamma$$

によって入れた $\mathbb{C}$ -代数として定義される。両側剰余類の代表元の対応によって、局所的 Hecke環の制限 tensor 積 $\otimes_p' \mathcal{A}(G_p, K_p)$ (p は素数) に同型になる。従って、各 p 毎の球 Fourier 変換を合わせて

$$(1.6) \quad \mathcal{A}(G, \Gamma) \xrightarrow{\sim} \otimes_p' \mathbb{C}[p^{\pm \nu_1}, \dots, p^{\pm \nu_n}]^{S_n}$$

が得られる。この変換を Fourier-Eisenstein 変換 (大局的佐武変換) と呼ぶ。

以上のようなことを、群 $GL(n)$ を対称空間のひとつの例 $GL(n) \times GL(n) / \Delta(GL(n))$ とみなし、対称空間に拡張したい。そのとき、佐武変換の核関数として、局所的には帯球関数を、大局的には Eisenstein 級数を考えれば妥当なのではないかと思われる。

§ 2. 対称空間

G を $\mathbb{Q}$ 上定義された reductive 代数群、 θ を G の $\mathbb{Q}$ 上定義された位数 2 の自己同型とする。 θ による G の不変部分群 H も $\mathbb{Q}$ 上定義された

reductive 代数群で、等質空間 $X = G/H$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された affine 多様体となる。特に $\mathbb{C}$ 上では $GL(n)$ の直積による既約対称空間は次表の 4 種である。§6 でこれらについて詳しく扱う。

	G	θ	H	$X \simeq \phi$	G の ϕ への作用
1)	$GL(n) \times GL(n)$	$(g_1, g_2) \mapsto (g_2, g_1)$	$\Delta(GL(n))$	$GL(n)$	$(g_1, g_2) * x = g_1 x g_2^{-1}$
2)	$GL(n)$	$g \mapsto {}^t g^{-1}$	$O(n)$	$Sym(n)^{nd}$ (n 次非退化対称行列)	$g * x = g x {}^t g$
3)	$n=2m$ $GL(2m)$	$g \mapsto J_m {}^t g^{-1} J_m$ $J_m = \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ -1_m & 0 \end{pmatrix}$	$Sp(n)$	$Alt(n)^{nd}$ (n 次非退化交代行列)	$g * x = g x {}^t g$
4) _r	$GL(n)$ ($1 \leq 2r \leq n$)	$g \mapsto I_{n,r} g I_{n,r}$ $I_{n,r} = \begin{pmatrix} 1_{n-r} & 0 \\ 0 & -1_r \end{pmatrix}$	$GL(n-r) \times GL(r)$	$\{x \in GL(n) \mid \text{対角化可能固有値は } 1 \text{ が } n-r \text{ ケ } -1 \text{ が } r \text{ ケ}\}$	$g * x = g x g^{-1}$

§3. 完備化、関数空間

代数群 G 、部分群 H 、等質空間 $X = G/H$ 等の $\mathbb{Q}$ 有理点全体を $G = G(\mathbb{Q})$, $H = H(\mathbb{Q})$, $X = X(\mathbb{Q})$ 等で表す。

$$(3.1) \quad \mathcal{F} = \{\Gamma_N \mid N \in \mathbb{N}\}, \text{ 但し } \Gamma_N = \{g \in G(\mathbb{Z}) \mid g \equiv 1 \pmod{N}\}$$

とする。 G の部分群 H 、等質空間 X の $\mathcal{F}$ による完備化 $\tilde{H}$, $\tilde{X}$ を

$$\tilde{H} = \varprojlim_{\Gamma \in \mathcal{F}} \Gamma \cap H \setminus H, \quad \tilde{X} = \varprojlim_{\Gamma \in \mathcal{F}} \Gamma \setminus X$$

と定義すると次のことが分かる。

命題 1. i) G が reductive ならば、 $\tilde{G}$ は unimodular である。

ii) H の $\tilde{G}$ における閉包 $\bar{H}$ は $\tilde{H}$ と同型である。

命題 2. $X = G \backslash H$ とする。

i) G の X への作用は $\tilde{G}$ の $\tilde{X}$ への連続的作用に延長される。

ii) $\Gamma \in \mathcal{F}$ について、 $\bar{\Gamma}$ -軌道の代表点は X からとれ、 $\bar{\Gamma} * x$ は $\Gamma * x$ の $\tilde{X}$ における閉包 $\overline{\Gamma * x}$ に一致する。これにより $\tilde{\Gamma} \backslash \tilde{X}$ と $\Gamma \backslash X$ は一対一に対応する。

iii) 標準写像 $\tilde{G} \longrightarrow \tilde{X}$ により、同相 $\tilde{G} \backslash \tilde{H} \simeq \tilde{X}$ が導かれる。

A_f で $\mathbb{Q}$ の adèle 環の有限部分を表す。 $\mathcal{F}$ の定める G の位相は、 $G(A_f)$ の部分群としての相対位相と一致し、 G の $G(A_f)$ における閉包 $\bar{G}$ は $\tilde{G}$ と同型になる。命題 2-iii) より、標準写像 $\tilde{X} \longrightarrow X(A_f)$ が得られる。

以下、 G は reductive とする。 $\tilde{G}$ の Hecke 環は

$$\mathcal{A}(\tilde{G}) = \{f: \tilde{G} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{locally compact, compactly supported}\}$$

で、積は $\tilde{G}$ の Haar 測度 dg (cf. 命題 1-i) を用いて

$$(3.2) \quad (f_1 * f_2)(h) = \int_{\tilde{G}} f_1(g) f_2(g^{-1}h) dg, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{A}(\tilde{G}), h \in \tilde{G}$$

で定義される。 $\Gamma \in \mathcal{F}$ に対し、Hecke 環 $\mathcal{A}(\tilde{G}, \bar{\Gamma})$ を

$$\mathcal{A}(\tilde{G}, \bar{\Gamma}) = \{f \in \mathcal{A}(\tilde{G}) \mid f(\gamma_1 g \gamma_2) = f(g), \gamma_1, \gamma_2 \in \bar{\Gamma}, g \in \tilde{G}\}$$

と定めると、両側 $\bar{\Gamma}$ -剰余類の特性関数によって生成される。一方

$\mathcal{A}(G, \Gamma)$ は、両側 Γ -剰余類の形式的な一次結合 $\sum_{[g] \in \Gamma \backslash G / \Gamma} \mathbb{C} [g]$ に

(1.5) のように積を入れて定義される。両側 $\bar{\Gamma}$ -剰余類の代表元は G からとれるから、代表元の対応により $\mathcal{A}(\tilde{G}, \bar{\Gamma})$ は $\mathcal{A}(G, \Gamma)$ と同一視される。又、関数空間

$$\mathcal{A}(X) = \{f: X \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{ある } \Gamma\text{-軌道の特性関数の有限個の一次結合}\} \\ (\Gamma \in \mathcal{F})$$

$$\mathcal{A}(\Gamma \backslash X) = \{f: X \longrightarrow \mathbb{C} \mid \Gamma\text{-軌道の特性関数の有限個の一次結合}\}$$

$$\mathcal{A}(\tilde{X}) = \{f: \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{locally constant, compactly supported}\}$$

$$\mathcal{A}(\bar{\Gamma} \backslash \tilde{X}) = \{\Phi \in \mathcal{A}(\tilde{X}) \mid f(\gamma * x) = f(x), \gamma \in \bar{\Gamma}, x \in \tilde{X}\}$$

が定義され、命題 2-ii) によって、 $\mathcal{A}(\Gamma \backslash X)$ は $\mathcal{A}(\bar{\Gamma} \backslash \tilde{X})$ と同一視される。

$\mathcal{A}(\tilde{X})$ は

$$(3.3) \quad (f * \Phi)(x) = \int_{\tilde{G}} f(g) \Phi(g^{-1} * x) dg, \quad f \in \mathcal{A}(\tilde{G}), \Phi \in \mathcal{A}(\tilde{X}), x \in \tilde{X}$$

によって、 $\mathcal{A}(\tilde{G})$ -加群になり、 $\mathcal{A}(\Gamma \backslash X)$ は $\mathcal{A}(G, \Gamma)$ -加群となる。この構造を調べるのが目的の一つである。

§ 4. Eisenstein 級数

§ 2 の (G, θ, X) が与えられているとする。P を θ -anisotropic parabolic 部分群、即ち $L = P \cap \theta(P)$ が P と $\theta(P)$ の Levi 部分群となる parabolic 部分群とする。N = Ru(P) (unipotent 根基) とする。L の部分群 L_- で、 $N_L(L_-) \supset L \cap H$ 、 $L = (L \cap H)L_-$ をみたすものを取り、 $P_- = L_- \cdot N$ とおく。X の Zariski 開集合である P-軌道 Ω をとる。群 * の $\mathbb{Q}$ 上定義された有理指標の全体を $\mathcal{A}^*(\mathbb{Q})$ で表す。次の仮定をおく：

(A1) 任意の $x \in \Omega = \Omega(\mathbb{Q})$ について $\mathcal{A}(P_{-,x}^0)_{\mathbb{Q}} = \{1\}$ 。

但し、 $P_{-,x}^0$ は $P_{-,x} = \{p \in P_- \mid p * x = x\}$ の連結成分を表す。 P^+ を $P_-(\mathbb{R})$ の連結成分とする。 δ を P のある $\mathbb{Q}$ -有理指標で P^+ への制限が P^+ 上の左不変測度の module になるものとする。 Ω 上に $\delta^{-1}(p)$ を乗法因子とする有理微分形式 $w(x)$ が定まる： $w(p * x) = \delta^{-1}(p)w(x)$ 。

$$(4.1) \quad \Omega(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=1}^v \Omega^{(i)}$$

を P^+ -軌道分解とすると、 $|w|$ は各 $\Omega^{(i)}$ 上の $|\delta|$ を乗法因子とする P^+ -相対不変測度を定める。さて $x \in \Omega^{(i)} \cap \Omega$ について、 P_x^+ 上の

Haar測度 $d\mu_x$ を次のようにとる: 任意の $f \in L^1(P^+, dg)$ について

$$(4.2) \quad \int_{P^+} f(g) dg = \int_{\Omega} (i) |w(y)| \int_{P_x^+} f(gh) d\mu_x(h), \quad y = g * x.$$

$\Gamma \in \mathcal{F}$ について $\Gamma_{P_-} = \Gamma \cap P_-$ とおき、1つの $\Gamma_0 \in \mathcal{F}$ を定めて、

$$(4.3) \quad \mu(\Gamma_{P_-} * x) = \int_{\overline{\Gamma_{P_-} * x}} d_{\Omega}(y) = [\Gamma_{P_-} : \Gamma_{0, P_-}] \int_{P_x^+ / \Gamma_{P_-} * x} d\mu_x(h)$$

とすると、 $\tilde{\Omega}$ 上の $\tilde{P}_-$ -相対不変測度 $d_{\Omega}(y)$ が定まる ($\overline{\Gamma_{P_-}}$ は $G(A_f)$ における Γ_{P_-} の閉包)。

X 上の恒等的には 0 でない $\mathbb{Q}$ 上定義された有理関数 f が P -相対不変式であるとは、ある $\chi \in \mathcal{X}(P)_{\mathbb{Q}}$ について $f(p * x) = \chi(p)f(x)$ ($p \in P, x \in X$) が成立するときをいう。自由アーベル群 $\{\chi \in \mathcal{X}(P)_{\mathbb{Q}} \mid \chi \text{ は } X \text{ 上のある } P\text{-相対不変式に対応}\}$ の生成元を $\chi_1, \dots, \chi_{\ell}$ とし、対応する P -相対不変式を $f_1, \dots, f_{\ell}$ とする。

$x \in \tilde{\Omega}$ と $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{\ell}) \in \mathbb{C}^{\ell}$ に対し、標準写像 $\tilde{\Omega} \longrightarrow \tilde{X}$, $\tilde{X} \longrightarrow X(A_f)$ を通して

$$(4.4) \quad \|f(x)\|^{\nu} = \prod_{i=1}^{\ell} |f_i(x)|_{A_f}^{\nu_i}, \quad \|\chi(p)\|^{\nu} = \prod_{i=1}^{\ell} |\chi_i(p)|_{A_f}^{\nu_i}$$

と定義する。先の $\delta(p)$, $p \in \tilde{P}$ に対し、 $\mu \in \mathbb{Q}^{\ell}$ を次式で定めておく:

$$(4.5) \quad |\delta(p)| = \|\chi(p)\|^{\mu}.$$

$\Phi \in \mathcal{X}(\tilde{X})$, $s = (s_1, \dots, s_{\ell}) \in \mathbb{C}^{\ell}$, $1 \leq i \leq \nu$ (cf. (4.1)) に対し、

$$(4.6) \quad E_i(\Phi; s) = \int_{\Omega(i)} \|f(x)\|^{s+\mu} \Phi(x) d_{\Omega}(x)$$

とおく。次の仮定をおく:

(A2) $\mathbb{R}^{\ell}$ 内のある領域 $\mathcal{D}$ が存在し、 $\operatorname{Re}(s) \in \mathcal{D}$ ならば (4.6) の右辺は絶対収束する。

補題 1. Φ が $\bar{\Gamma} * x$ ($x \in X, \Gamma \in \mathcal{F}$) の特性関数 $\text{ch}_{\bar{\Gamma} * x}$ のとき、絶対収束する s の範囲で

$$(4.7) \quad E_i(\Phi; s) = \sum_{y \in \Gamma_{P_-} \setminus \Omega^{(i)} \cap \Gamma * x} \frac{\mu(\Gamma_{P_-} * y)}{\prod_{i=1}^l |f_i(x)|^{s_i}}$$

が成立する、但し $| \cdot |$ は絶対値を表す。

(注意) (4.7) の右辺が (A2) の $\mathcal{D}$ に関して絶対収束すると仮定すると (4.7) を定義式と思えば (4.7) が収束する範囲で (4.6) が成立する。 $\mathcal{A}(\tilde{X})$ の元は補題 1 の Φ 達の有限和だから、(4.6)、(4.7) のどちらを定義式と思っても同じである。

次の仮定をおく：

(A3) G のある数論的部分群 Γ_* について $N_G(\Gamma_0) \supset \Gamma_*$ かつ $G = \Gamma_* P$ 。

このとき、 $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} = \{ \mathbb{Q} \text{ 上定義された } P \text{ と共役な } G \text{ の部分群} \}$ とすると、任意の $P' \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ はある $\gamma_{P'} \in \Gamma_*$ によって

$$(4.8) \quad P' = \gamma_{P'} P \quad (= \gamma_{P'} P \gamma_{P'}^{-1})$$

と表され、

$$(4.9) \quad \|f(P'|x)\| = \|f(\gamma_{P'}^{-1} * x)\|, \quad x \in \Omega(A_F)$$

は $\gamma_{P'}$ のとり方によらず定義される。 P の代わりに P' を用いて前のように定義されるものを添字 P' をつけて表す。

$$(4.10) \quad \Omega_{P'} = \gamma_{P'} \Omega_P, \quad \Omega_{P'}^{(i)} = \gamma_{P'} \Omega_P^{(i)} \quad (1 \leq i \leq \nu)$$

としてよい。 $d_{\Omega_{P'}}(x)$ は $\Gamma_{0,P'} = \Gamma_0 \cap P'_-$ に基づいて正規化した測度とする。これらは (4.8) をみたす $\gamma_{P'}$ のとり方によらず定まる。

ここで $P' \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$, $\Phi \in \mathcal{A}(\tilde{X})$, $s \in \mathbb{C}^l$, $1 \leq i \leq \nu$ に対し

$$(4.11) \quad E_i(P'|\Phi:s) = \int_{\Omega_{P'}} (i) \quad \|f(P'|x)\|^{s+\mu} \Phi(x) d_{\Omega_{P'}}(x)$$

と定義する。特に、 $P' = P$ のときが (4.6) である。次の補題によって、(A2) の $\mathcal{D}$ に関して (4.11) の右辺が絶対収束することが分かる。

補題 2. $\Phi \in \mathcal{A}(\tilde{X})$, $\gamma \in \Gamma_*$ について、

$$E_i(\gamma P|\Phi:s) = E_i(P|\gamma^{-1}\Phi:s),$$

が成立する。但し、 $\gamma^{-1}\Phi(x) = \Phi(\gamma * x)$, $x \in \tilde{X}$ とする。

以下では、記号の繁雑さを避けるために、 $\mathcal{P}_Q$ の任意の元を P と表し、§4 の初めに定めた P は P_0 と表す。特に $P_0 = P_0(Q)$ である。一般に $\mathcal{A}(\tilde{X})$ への G の作用を

$$(4.12) \quad {}^g\Phi(x) = \Phi(g^{-1} * x), \quad \Phi \in \mathcal{A}(\tilde{X}), \quad g \in G, \quad x \in \tilde{X}$$

と定める。又、 $g \in G$, $P \in \mathcal{P}_Q$ に対し

$$(4.13) \quad \|\chi_{\Gamma_*}(g;P)\| = \|\chi(p(g)\gamma_P)\|$$

は γ_P のとり方に依らず定義される。但し、 $g \in G$ について $p(g)$ は $p(g)^{-1}g \in \Gamma_*$ となる P_0 の元を表す (cf. (A3))。 E_i への G の作用の寄与について次のことが分かる。

命題 3. $\Phi \in \mathcal{A}(\tilde{X})$, $g \in G$ について

$$E_i(P|{}^g\Phi:s) = \|\chi_{\Gamma_*}(g^{-1};P)\|^{-s_i} E_i(g^{-1}P|\Phi:s)$$

が成立する。

系. ある $\Gamma \in \mathcal{F}$ について $\Phi \in \mathcal{A}(\bar{\Gamma} \setminus \tilde{X})$ ならば、任意の $\gamma \in \Gamma$ について

$$E_i(\gamma P|\Phi:s) = E_i(P|\Phi:s)$$

が成立する。

(予想) $E_i(P|\Phi:s)$ は $\mathbb{C}^l$ 上の meromorphic 関数に解析接続され、Weyl 群の作用について Langlands の Eisenstein 級数と類似の関数等式をみたす。(cf. [4], [5])

§5. Hecke 環の作用

$\bar{\Gamma}_*$ は compact 群であるから、 $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{G}/\tilde{P}_0 = \bar{\Gamma}_*/\bar{\Gamma}_* \cap \tilde{P}_0$ 上に $\bar{\Gamma}$ -不変測度 dP が存在する。

$$\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{P}}) = C^\infty(\tilde{\mathcal{P}}) = \{\Psi: \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{locally constant}\}$$

と定義すると、これは次の作用で $\mathcal{A}(\tilde{G})$ -加群となる:

$$(5.1) \quad (\Psi * f)(P) = \int_{\tilde{G}} \Psi(\tilde{g}P) \|\chi_{\Gamma_*}(g; P)\|^{s+\mu} f(g) dg,$$

ここで、 $\Psi \in \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{P}})$, $f \in \mathcal{A}(\tilde{G})$, $P \in \tilde{\mathcal{P}}$, $s \in \mathbb{C}^l$ で、 μ は (4.5) で与えた $\mathbb{Q}^l$ の元。 $\Phi \in \mathcal{A}(\tilde{X})$, $\Psi \in \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{P}})$, $s \in \mathbb{C}^l$, $1 \leq i \leq \nu$ について

$$(5.2) \quad \mathcal{E}_i(\Psi|\Phi:s) = \int_{\tilde{\mathcal{P}}} E_i(P|\Phi:s) \Psi(P) dP$$

は $E_i(P|\Phi:s)$ が絶対収束する s の範囲で pairing

$$\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{P}}) \times \mathcal{A}(\tilde{X}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を与える。 $\mathcal{A}(\tilde{G})$ の作用の pairing への寄与について次のことがわかる。

命題 4. $f \in \mathcal{A}(\tilde{G})$, $\Psi \in \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{P}})$, $\Phi \in \mathcal{A}(\tilde{X})$ について、

$$\mathcal{E}_i(\Psi|f*\Phi:s) = \mathcal{E}_i(\Psi *_s f|\Phi:s)$$

が成立する。

$\Gamma \in \mathcal{F}$ をとり、 $\tilde{\mathcal{P}}$ の $\bar{\Gamma}$ -軌道の代表 $P_1, \dots, P_t$ を決めておく。

$1 \leq i \leq \nu$ について、Fourier-Eisenstein 変換を

$$(5.3) \quad \begin{aligned} E_i : \mathcal{A}(\Gamma \backslash X) &\longrightarrow \{\text{Direchlet series}\}^t \\ \Phi &\longmapsto E_i(\Phi : S) = \begin{bmatrix} E_i(P_1 | \Phi : s) \\ \vdots \\ E_i(P_t | \Phi : s) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

によって定義する (cf. (4.6), (4.11), $1 \leq i \leq \nu$). 命題 4 を用いて Eisenstein 級数への Hecke 環の作用について次の定理を得る。

定理. $\mathbb{C}$ -代数としての準同型

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(G, \Gamma) &\longrightarrow M_t(\mathbb{C}(p^{s_1}, \dots, p^{s_\ell} \mid p \text{ は素数})) \\ f &\longmapsto A(f : s) \end{aligned}$$

が存在して、 $\Phi \in \mathcal{A}(\Gamma \backslash X)$ について、

$$E_i(f * \Phi : s) = A(f : s) E_i(\Phi : s)$$

が成立する。特に $t = 1$ のとき、 $E_i(\Phi : s)$ は $\mathcal{A}(G, \Gamma)$ -同時固有関数で

$$A(f : s) = \int_{\tilde{G}} \|\chi(p(g))\|^{s+\mu} f(g) dg$$

となる。ここで $g \in \tilde{G}$ に対し $p(g) \in \tilde{P}_0$ は $p(g)^{-1}g \in \bar{\Gamma}_*$ によって定める (cf. (A3))。

(注意) 定理は E_i が $\mathcal{A}(G, \Gamma)$ -準同型とみなせることを主張している。

§6. Eisenstein 級数の Euler 積分

$\Phi \in \mathcal{A}(\tilde{X})$, $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$, $s \in \mathbb{C}^{\ell}$ について

$$(6.1) \quad E(\Phi : s) = \sum_{i=1}^{\nu} E_i(P_0 | \Phi : s)$$

と定義する (cf. (4.11))。§4, 5 の結果は添字 i を省いた形でそのまま成立している。

$G(A_f)$ の compact 開部分群 $K = \prod_p K_p$, $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ をとっておく。 $\phi_p \in \mathcal{A}(X(\mathbb{Q}_p))$, $s \in \mathbb{C}^l$ について

$$(6.4) \quad E_p(\phi_p; s) = \int_{\Omega(\mathbb{Q}_p)} \prod_{i=1}^l |f_i(x)|_p^{s_i} \phi_p(x) \lambda_p^{-1} |w(x)|_p$$

と定義する。但し、 $\{\lambda_p\}$ は $\Omega(A_f)$ の収束因子。 $|w(x)|_p$ は $P_0(\mathbb{Q}_p)$ -相対不変測度で乗法因子は $|\delta(p)^{-1}|_p = \prod_{i=1}^l |x_i(p)|_p^{-\mu_i}$ (cf. (4.5)) であるから、(6.4) の右辺は $\operatorname{Re}(s_i) > \mu_i$ で絶対収束し、 $\mathbb{C}^l$ まで $p^{s_1}, \dots, p^{s_l}$ の有理関数として解析接続される。

定理. $P_{0,-}$ が次の条件 (A4) をみたすとする:

(A4) i) 任意の $\mathbb{Q}$ の拡大体 k について、 $\Omega(k)$ は $P_{0,-}(k)$ -軌道をなす。

ii) 任意の $x \in \Omega$ について、 $P_{0,-,x}$ は強近似定理をみたす。

iii) $K \cap P_{0,-}(A_f)$ の閉部分群 K_- で $P_{0,-}$ を正規化し、 $P_{0,-}(A_f) = K_- \cdot P_{0,-}$ となるものが存在する。

このとき、 $\Phi = \prod_p \phi_p \in \mathcal{A}(K \backslash X(A_f)) (= \bigotimes'_p \mathcal{A}(K_p \backslash X(\mathbb{Q}_p)))$ について、

$$(6.5) \quad E(\Phi; s) = c \cdot \prod_p E_p(\phi_p; s)$$

が成立する。ここで、 c は正の定数で Φ に依らない。測度を適当に正規化すれば $c = 1$ にできる。

(注意) $P_{0,-}$ が (A4) をみたしているときは $\Gamma = K \cap G$ について

$$\mathcal{A}(\Gamma \backslash X)_{\text{gen}} = \operatorname{Im}(\mathcal{A}(K \backslash X(A_f)) \longrightarrow \mathcal{A}(\Gamma \backslash X))$$

とおくと、

$$E : \mathcal{A}(\Gamma \backslash X)_{\text{gen}} \longrightarrow \left\{ \bigotimes'_p \mathbb{C}(p^{s_1}, \dots, p^{s_l}) \right\} \times E(\Phi_0; s)$$

となる。但し、 Φ_0 は適当な基点 x_0 に対し $K \times x_0$ の特性関数 $\text{ch}_{K \times x_0}$ とする。この変換の考察は局所論に帰着する。又、(6.5) の左辺の収束が分かれば逆に (A2) が保証される。§7 で扱う例では、 $\mathcal{A}(\Gamma \backslash X)_{\text{gen}} = \mathcal{A}(\Gamma \backslash X)$ である。

§7. $\text{GL}(n)$ の対称空間

§2 の例を思い出す。1) は Euler 積を持たない (cf. [6]) が、残りの3種の $\mathbb{Q}$ -split form は Euler 積を持つことが分かる。ここではその結果をまとめておく。

Case 2)

$$P = B \times \bar{B}, \quad P_- = B \times \bar{N}$$

とする。但し、 $B = \{g \in \text{GL}(n) \mid g_{ij} = 0 \ (1 \leq i < j \leq n)\}$, $N = \{b \in B \mid b_{ii} = 1 \ (1 \leq i \leq n)\}$ で、 $-$ は転値を表す。 i 次小行列式 $d_i(x)$, $1 \leq i \leq n$ が X 上の P -相対不変式の基をなす。

$$\Omega = \{x \in \text{GL}(n) \mid \prod_{i=1}^n d_i(x) \neq 0\},$$

$$\Gamma_* = \Gamma_0 = \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \times \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \quad (= \Gamma \text{ とおく}),$$

$$K = \prod_p \text{GL}_n(\mathbb{Z}_p) \times \prod_p \text{GL}_n(\mathbb{Z}), \quad K_- = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_n \end{pmatrix}, 1 \in K \right\}$$

とする。 $\Phi = \prod_p \phi_p \in \bigotimes_p \mathcal{A}(K \backslash X(A_f))$ について、(6.5) の右辺は $\text{Re}(s_i) > 2$, $1 \leq i \leq n-1$ ならば絶対収束するので ($\mu = (2, \dots, 2, 1-n)$)、A1 ~ A4 をみताす。 $t = v = 1$ であり、 $\mathcal{A}(K \backslash X(A_f))$ と $\mathcal{A}(\Gamma \backslash X) = \mathcal{A}(\text{GL}_n(\mathbb{Q}), \text{GL}_n(\mathbb{Z}))$ は自然に同一視され、本質的には §1 の場合となる。

変数変換

$$\begin{cases} s_i = -z_i + z_{i+1} - 1, & 1 \leq i \leq n-1 \\ s_n = -z_n + (n-1)/2 \end{cases}$$

を行うと、次のようにまとめられる。

定理. i) $\Phi = \prod_p \phi_p \in \mathcal{X}(K \backslash X(A_f))$ について

$$E(\Phi; z) = c \cdot \prod_p \hat{\phi}_p(-z) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\xi(z_j - z_i)}{\xi(z_j - z_i + 1)},$$

が成立する。ここで c は Φ に依らない正の定数、 $\hat{\phi}_p(-z)$ は (1.2) で定義され、 $\xi(\cdot)$ は Riemann zeta 関数である。

ii) $\Phi \in \mathcal{X}(\Gamma \backslash X)$ について $\tilde{E}(\Phi; z) = E(\Phi; z)/E(\text{ch}_T; z)$ とおくと、

$$\tilde{E} : \mathcal{X}(\Gamma \backslash X) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_p \mathbb{C}[p^{\pm z_1}, \dots, p^{\pm z_n}]^{S_n}$$

は §1 の大域的佐武変換 (1.6) に他ならない。

(注意) i) の計算については、[4] §3 を参照されたい。以上のように見ると、大域的佐武変換が Eisenstein 級数を核関数とする変換として直接大域的に定義される。

Case 3), $n = 2m$ (cf. [1])

$$P = P_- = \{g = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} \in GL(2m) \mid g_{ij} = 0 \ (1 \leq i < j \leq m)\}$$

とする。 $x \in X$ について $\text{Pf}_i(x)$ で x の左上 $2i$ 次の小行列の Pfaffian を表すと、 $\text{Pf}_i(x)$, $1 \leq i \leq m$ が X 上の P -相対不変式の基をなす。

$$\Omega = \{x \in X \mid \prod_{i=1}^m \text{Pf}_i(x) \neq 0\},$$

$$\Gamma = \Gamma_0 = GL_n(\mathbb{Z}) \quad (= \Gamma \text{ とおく}),$$

$$K = \prod_p GL_n(\mathbb{Z}_p), \quad K_- = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_m \end{pmatrix} \in K \right\}$$

とする。 $\Phi = \prod_p \phi_p \in \mathcal{X}(K \backslash X(A_f))$ について (6.5) の右辺が $\text{Re}(s_i) > 4$, $1 \leq i \leq m-1$ ならば絶対収束するので ($\mu = (4, \dots, 4, 2(1-m))$), $A_1 \sim A_4$ を

みたす。 $t = v = 1$ であり、 $\mathcal{A}(K \setminus X(A_f))$ と $\mathcal{A}(K \setminus X)$ は自然に同一視され、局所論に帰着する。

変数変換

$$\begin{cases} s_i = -z_i + z_{i+1} - 2, & 1 \leq i \leq m-1 \\ s_i = -z_m + m - 1 \end{cases}$$

を行うと、次のようにまとめられる。

定理. i) $\Phi = \prod_p \phi_p \in \mathcal{A}(K \setminus X(A_f))$ について

$$E(\Phi; z) = c \cdot \prod_p \hat{\phi}_p(-z) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq m} \frac{\zeta(z_j - z_i - 1)}{\zeta(z_j - z_i + 1)}$$

が成立する。ここで c は Φ に依らない正の定数、 $\zeta(\cdot)$ は Riemann zeta 関数であり、 $\hat{\phi}_p(-z)$ は

$$\hat{\phi}_p(-z) = \int_{X(\mathbb{Q}_p)} \phi_p(x) \Psi_z^{(p)}(x) |dx|_p$$

で定義され、この $\Psi_z^{(p)}(x)$ ($\in \mathcal{C}^\infty(\Gamma \setminus X(\mathbb{Q}_p))$) は $X(\mathbb{Q}_p)$ 上の球関数で具体的に計算されている (cf. [1] Th.3)。

ii) $\Phi \in \mathcal{A}(\Gamma \setminus X)$ について $\tilde{E}(\Phi; z) = E(\Phi; z) / E(\text{ch}_{\Gamma * J_m}; z)$ とおくと、

$$\tilde{E} : \mathcal{A}(\Gamma \setminus X) \xrightarrow{\sim} \otimes_p' \mathbb{C}[p^{\pm z_1}, \dots, p^{\pm z_m}]^{S_m}$$

なる $\mathcal{A}(G, \Gamma)$ -同型が得られる。特に $\Phi = \prod_p \phi_p \in \mathcal{A}(\Gamma \setminus X)$, $f = \prod_p f_p \in \mathcal{A}(G, \Gamma) = \otimes_p' \mathcal{A}(G(\mathbb{Q}_p), K_p)$ については

$$\tilde{E}(f * \Phi; z) = \prod_p \tilde{f}_p(-z) \cdot \hat{\phi}_p(-z)$$

が成立する。ここで

$$\tilde{f}_p(-z) = \hat{f}_p(-z_1 + \frac{1}{2}, -z_1 - \frac{1}{2}, \dots, -z_m + \frac{1}{2}, -z_m - \frac{1}{2}) \quad (\text{右辺は (1.2)})$$

である。

Case 4) r , $1 \leq 2r \leq n$

$$P = \left(\begin{array}{c|c} \text{shaded } r \times r & \text{shaded } r \times r \\ \hline \text{circle } r & \text{shaded } r \times r \end{array} \right) \in G, \quad P_- = \left(\begin{array}{c|c} \text{shaded } r \times r & \text{shaded } r \times r \\ \hline \text{circle } r & \text{shaded } r \times r \end{array} \right) \in P,$$

とする。 $x \in X$ に対し x の左下の i 次小行列式を $d_i(x)$ とおくと、
 $d_i(x)$, $1 \leq i \leq r$ が X 上の P -相対不変式の基をなし、対応する指標 χ_i は

$$p = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ \hline & & & T & & \\ \hline & & & & b_r & \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & b_1 \end{array} \right) \quad \text{に対し} \quad \chi_i(p) = (a_1 \cdots a_r)^{-1} (b_1 \cdots b_r) \quad \text{で与え}$$

られる。

$$\Omega = \{ x \in X \mid \prod_{i=1}^r d_i(x) \neq 0 \},$$

$$\Gamma_0 = \Gamma_* = G(\mathbb{Z}) \quad (= \Gamma \text{ とおく}),$$

$$K = \prod_p G(\mathbb{Z}_p), \quad K_- = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} u_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & u_r & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ \hline & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & 1 \end{array} \right) \in K \right\}$$

とする。 $\Phi = \prod_p \phi_p \in \mathcal{A}(K \backslash X(A_f))$ について (6.5) の右辺が $\text{Re}(s_i) > \mu_i$, $1 \leq i \leq r$ ($\mu = (2, \dots, 2, n-2r+1)$) ならば絶対収束するので、 $A1 \sim A4$ がみたされている。 $t = v = 1$ である。 $\Gamma \backslash X$ の代表系は

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ \hline & & & & -1 & \\ & 2a_r^{-1} & & & & \\ & & \text{circle} & & & \\ \hline 2a_1^{-1} & & & & & -1 \end{array} \right)_{n-r}, \quad \left\{ \begin{array}{l} a_i \in \mathbb{N} \\ a_r | a_{r-1} \cdots a_2 | a_1 \end{array} \right.$$

$K_p \setminus X(\mathbb{Q}_p)$ の代表系は

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 2p^{-e_1} & & & & \\ & 2p^{-e_r} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{matrix} \end{array} \right] \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \begin{matrix} n-r \\ r \end{matrix}, \begin{cases} e_i \in \mathbb{Z} \\ e_1 \geq \dots \geq e_r \geq 0 \end{cases}$$

の形にとれるので、 $\mathcal{A}(\Gamma \backslash X)$ と $\mathcal{A}(K \backslash X(A_f)) \simeq \bigotimes_p' \mathcal{A}(K_p \backslash X(\mathbb{Q}_p))$ は自然に同一視され、全ては局所論に帰着する。

簡単のために以下 $G_p = G(\mathbb{Q}_p)$, $\Omega_p = \Omega(\mathbb{Q}_p)$, $X_p = X(\mathbb{Q}_p)$ と書く。

$$x \in \Omega_p, \quad s = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r \quad \text{について}$$

$$\xi_p(x:s) = \int_{K_p} \prod_{i=1}^r |d_i(x)|_p^{s_i} dk,$$

と定義する。但し、 dk は K_p 上の Haar 測度で $\int_{K_p} dk = 1$ 、 $K'_p = \{k \in K_p \mid k * x \in \Omega_p\}$ 、とする。これは $\operatorname{Re}(s_i) \geq 0$ で絶対収束し、全 s 平面に s_i の有理関数として解析接続され、 $C^\infty(K_p \setminus X_p)$ の元とみなせる。

$\mathcal{H}(K_p \setminus X_p)$ への $\mathcal{H}(G_p, K_p)$ の作用をいつものように

$$(f * \psi)(x) = \int_{G_p} f(x) \psi(g * x) dg, \quad f \in \mathcal{A}(G_p, K_p), \psi \in \mathcal{A}(K_p \backslash X_p), x \in X_p$$

と定める。変数変換

$$\begin{cases} s_i = -z_i + z_{i+1}^{-1}, & 1 \leq i \leq r-1 \\ s_r = -z_r + (n-2r+1)/2 \end{cases}$$

をすると、 $\xi_p(x:z)$ は $\mathcal{A}(G_p, K_p)$ -同時固有関数になっていることが分かる、i.e.

$$(7.1) \quad (f * \xi_p(\cdot; z))(x) = \tilde{f}(z) \cdot \xi_p(x; z), \quad f \in \mathcal{A}(G_p, K_p)$$

$$\tilde{f}(z) = \hat{f}(-z_1, \dots, -z_r; \frac{n-2j+1}{2}, r+1 \leq j \leq n-r; z_r, \dots, z_1)$$

(右辺は (1.2))

が成立する。更に $\mathcal{A}(K_p \backslash X_p)$ 上の球 Fourier 変換 F_p を次のように定める:

$$F_p : \mathcal{A}(K_p \backslash X_p) \longrightarrow \mathbb{C}(p^{z_1}, \dots, p^{z_r})$$

$$\phi \longmapsto F_p(\phi)(z) = \int_{X_p} \phi(x) \cdot \Psi_p(x^{-1}; z) |dx|_p$$

但し、 $\Psi_p(x; z) = \xi_p(x; z) / \xi_p(x_0; z)$ 、 $x_0 = \left(\underbrace{\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & \cdots & \cdots & 0 \end{smallmatrix}}_{n-r} \mid \underbrace{\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 & \cdots & -1 \end{smallmatrix}}_r \right)_r$ 、

$|dx|_p$ は X_p 上の G_p -不変測度で $\int_{K_p * x_0} |dx|_p = 1$ とする。

結果は次のようにまとめられる。

定理. i) F_p は $\mathcal{A}(G_p, K_p)$ -加群としての同型

$$\mathcal{A}(K_p \backslash X_p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[p^{z_1+p^{-z_1}}, \dots, p^{z_r+p^{-z_r}}]^{S_r}$$

を与える。特に、 $f \in \mathcal{A}(G_p, K_p)$ 、 $\phi \in \mathcal{A}(K_p \backslash X_p)$ について

$$F_p(f * \phi)(z) = \tilde{f}(z) \cdot F_p(\phi)(z) \quad (\tilde{f}_p(z) \text{ は (7.1) のもの})$$

が成立する。

ii) $\Phi \in \mathcal{A}(\Gamma \backslash X)$ について $\tilde{E}(\Phi; z) = E(\Phi; z) / E(\text{ch}_{K * x_0}; z)$ とおくと、

$\tilde{E}$ は (F_p 達を合わせたもので) $\mathcal{A}(G, \Gamma)$ -加群としての同型

$$\mathcal{A}(\Gamma \backslash X) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_p \mathbb{C}[p^{z_1+p^{-z_1}}, \dots, p^{z_r+p^{-z_r}}]^{S_r}$$

を与える。より詳しくは

iii) $\Phi = \prod_p \phi_p \in \mathcal{A}(\Gamma \backslash X) (\simeq \bigotimes_p \mathcal{A}(K_p \backslash X_p))$ 、 $f = \prod_p f_p \in \mathcal{A}(G, \Gamma) (\simeq$

$\bigotimes_p \mathcal{A}(G_p, K_p))$ とすると、

$$\tilde{E}(\Phi; z) = \prod_p F_p(\phi_p)(z) 、$$

$$\tilde{E}(f*\Phi:z) = \prod_p \tilde{f}_p(z) \cdot F_p(\phi_p)(z)$$

が成立する。

(付記) **Case 4)**_r においては、 $E(\text{ch}_{K \times x_0}:z)$ の具体的な形は今のところよく分からないが、他の場合と同様に、 K -軌道の体積に関わる定数と Riemann zeta 関数を用いて表せられると思われる。

参考文献

- [1] Y. Hironaka and F. Sato: Spherical functions and local densities of alternating forms, Amer. J. Math. 110(1988), 473-512.
- [2] I. G. Macdonald: Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford Mathematical Monographs, 1979.
- [3] I. Satake: Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields, Publ. Math. I.H.E.S. 18(1963), 5-70.
- [4] F. Sato: Eisenstein series on semisimple spaces of Chevalley groups, Adv. Studies in pure Math. 7(1985), 295-332.
- [5] F. Sato: Eisenstein series on the Siegel half space of signature (1,1), comment. Math. Univ. St. Pauli 37(1988), 99-125.
- [6] F. Sato: Fourier Eisenstein transform on the space of rational binary quadratic forms, 数理解析研究所講究録 631(1987).