

冷却原子気体の物理

東京理科大学理学部物理学科 二国徹郎

概要

冷却原子気体は新しい物性物理の舞台として注目されており、これまでに Bose-Einstein 凝縮 (BEC) をはじめ様々な興味深い現象がこの系で観測されている。本講演の前半では中性原子気体の冷却方法や Bose 凝縮体の観測方法などの実験手段について簡単に解説し、Bose 凝縮気体の超流動ダイナミクスに関連した話題をいくつか取り上げて紹介する。特に、回転する超流動原子気体における量子渦生成ダイナミクス、有限温度における第一、第二音波の伝播などについて紹介する予定である。講演の後半では冷却 Fermi 原子気体の超流動に関する話題を紹介する。この系では Feshbach 共鳴と呼ばれる機構を利用して原子間相互作用の強さと符号を制御することが出来る。この技術を利用して 2004 年には冷却 Fermi 原子気体における超流動状態が実現された。さらに、光格子 (レーザーの干渉を利用して作られる周期ポテンシャル) 中に原子気体を閉じ込めることも可能である。光格子は固体中の電子が感じる周期ポテンシャルを擬似的に再現することより、超伝導や磁性等の物性研究の重要な役割を担っている。近年では蜂の巣格子、籠目格子、Lieb 格子といった特殊な幾何学的構造を持つ光格子を作ることが可能となった。これらの系ではディラックフェルミオン、フラットバンド等に由来した新奇な物性が期待される。

1 中性原子気体の Bose-Einstein 凝縮

まず最初に、中性原子気体の BEC について簡単に解説する。気体中の原子は量子力学的な波動関数によって記述され、その波長 λ は原子の運動量 p と de Broglie の式 $p = mv = h/\lambda$ によって関係づけられる (h は Planck 定数) ところで、原子の平均エネルギーは $\bar{\epsilon} \sim k_B T$ であるから、温度 T の熱平衡状態にある気体中の原子は熱的 de Broglie 波長 $\lambda_T \approx h/\sqrt{mk_B T}$ 程度のひろがりを持つ波となる。上式より明らかなように、温度が低いほど波長は長くなり波動としての性質が顕著になる。原子間の平均距離を d とすると、高温において $\lambda_T \gg d$ のとき、原子の運動は古典力学的であると言える。低温において $\lambda \sim d$ になると原子の波動関数が互いに重なり始め、「同種粒子は識別できない」という量子統計性が表れてくる。このような低温で何が起こるかは、粒子が Bose 粒子であるか Fermi 粒子であるかによって大きく異なる。図 1(a) のように、Bose 粒子は同じ量子状態に何個でも粒子が入ることができるので、低温では沢山の粒子が最低エネルギー状態を占有しようとする。このような現象を Bose-Einstein 凝縮 (BEC) と呼ぶ。一方、図 1(b) のように Fermi 粒子では Pauli の排他律によって一つの量子状態には一つの粒子しか入ることが出来ない。このよう状況を Fermi 縮退と呼ぶ。

以下では Bose 粒子系の BEC について考えることにしよう。BEC を直感的に表したのが図 2 である。室温付近では気体原子は普通の粒子として振る舞うが (a)、温度を下げていくと波としての空間的広がりが大きくなる (b)。ある温度以下では波同士が重なりあい、多数の原子が 1 つ



図 1: Bose 統計と Fermi 統計 .

の巨視的な波（つまり，Bose 凝縮体）として振る舞い始める (c)．絶対零度では全ての原子が 1 つの大きな波になる (d)．

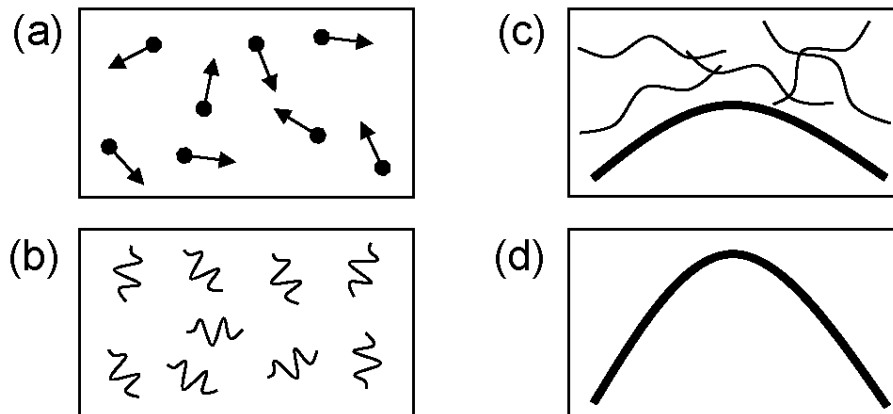


図 2: Bose-Einstein 凝縮の直感的描像 .

原子気体の実験においてこのような BEC を起こすためには，どれくらい低温まで冷却する必要があるのだろうか．そこで BEC 転移温度を簡単に見積もってみよう．多くの BEC の実験では，原子気体は次のような調和振動子ポテンシャルによって磁気的に閉じ込められる．

$$V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\omega_{0x}^2 x^2 + \omega_{0y}^2 y^2 + \omega_{0z}^2 z^2) \quad (1)$$

実験的に用いられるトラップ振動数は典型的には $10 \sim 200 \text{ Hz}$ である．簡単のため，等方的な調和振動子トラップ ($\omega_{0x} = \omega_{0y} = \omega_{0z} = \omega_0$) を考える．原子雲の空間的な広がりを R_T とすると，これはポテンシャルエネルギーが熱的なエネルギー $k_B T$ 程度になる距離，つまり $m\omega_0^2 R_T^2/2 \sim k_B T$ より $R_T \sim (k_B T/m\omega_0^2)^{1/2}$ と見積もることができる．これより平均原子間距離は $d \sim R_T N^{-1/3}$

と見積もられる．これと熱的 de Broglie 波長が同程度 $\lambda_T \sim R_T N^{-1/3}$ となる温度を BEC 転移温度として見積もると

$$T_{\text{BEC}} \approx N^{1/3} \hbar \omega_0 \quad (2)$$

となる．実験で用いられる原子数は $10^5 \sim 10^6$ であることから， $T_{\text{BEC}} \sim 10 \text{ nK} \sim 1 \mu\text{K}$ と見積もられる． T_{BEC} 以下では最低エネルギー準位の原子数が急激に増加する．

原子気体を冷却する技術の詳しい解説については他にゆずることにして，ここでは簡単にまとめる．レーザー冷却とは，レーザーの輻射圧により原子を減速させる方法である．ここでレーザー周波数を原子の共鳴周波数よりわずかに低く離調しておけば，ドップラー効果によって，光源に向かって運動する原子のみが光子を吸収し原子は必ず減速されることになる．ドップラー冷却によって $10^{-5} \sim 10^{-6} \text{ K}$ まで冷却することができる．しかし，BEC を実現するためには蒸発冷却によって原子気体の温度をさらに $1 \sim 2$ 桁低くする必要がある．そこで原子は磁気トラップに移され，特定の Zeeman 準位の原子だけが捕獲される．蒸発冷却ではある特定の周波数の rf 磁場（ラジオ波磁場）によって，高いエネルギーを持つ原子を取り除く．残された原子は衝突によって再び熱平衡化され，結果として温度が下がる．この方法により気体は $10^{-8} \sim 10^{-9} \text{ K}$ まで冷却され，BEC を実現することが可能になる．

原子気体が BEC を起こしていることを確認するには，運動量分布を観測すればよい．そのために用いられるのが飛行時間 (time-of-flight) 法である．この方法では，ある時刻においてトラップポテンシャルを切り，気体を自由膨張させる．気体が十分に膨張した後に共鳴光の吸収イメージングによって原子の空間分布を調べれば，それが初期状態における気体の運動量分布を与える．このようにして得られた運動量分布をみると，ある温度以下で $p = 0$ の状態に鋭いピークが現れ，凝縮が起きていることを確認することができる．このようにして，1997 年に初めて JILA の実験グループが Rb 原子の BEC を観測した [1]．

先程は等方的調和振動子ポテンシャル中の理想ボーズ気体の BEC 転移温度を簡単に見積もったが，ここで異方的なポテンシャルの場合も含めて，より詳しく計算してみよう．調和振動子ポテンシャル中の一粒子エネルギー準位はエネルギーは量子数 $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$ を用いて

$$\epsilon(n_x, n_y, n_z) = \hbar \omega_x \left(\frac{1}{2} + n_x \right) + \hbar \omega_y \left(\frac{1}{2} + n_y \right) + \hbar \omega_z \left(\frac{1}{2} + n_z \right) \quad (3)$$

で与えられる．最低エネルギー準位は $n_x = n_y = n_z = 0, \epsilon_0 = \frac{\hbar}{2}(\omega_x + \omega_y + \omega_z)$ である．各エネルギー準位は Bose 分布

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} \quad (4)$$

に従って占有され，全粒子数は

$$N = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta \epsilon(n_x, n_y, n_z)} - 1} \quad (5)$$

で与えられる．ここで，比較的高温で $k_B T \gg \hbar \omega_x, \hbar \omega_y, \hbar \omega_z$ を満足する温度領域を仮定すると，(5) 式の和を積分に置き換えて

$$\sum_{n_x, n_y, n_z} \rightarrow \int dn_x \int dn_y \int dn_z \quad (6)$$

とすることができる．さらに積分変数を $x_1 = \beta \hbar \omega_x, x_2 = \beta \hbar \omega_y, x_3 = \beta \hbar \omega_z$ とすれば

$$N = \left(\frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \int_0^\infty dx_3 \frac{1}{z^{-1} e^{(x_1 + x_2 + x_3)} - 1}, \quad \bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}, \quad z = e^{\beta(\mu - \epsilon_0)} \quad (7)$$

となる．この積分は積分公式

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{z^{-1} e^x - 1} dx = \Gamma(\alpha) g_\alpha(z), \quad g_\alpha(z) \equiv \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^\alpha} \quad (8)$$

及び関係式 $dg_\alpha(z)/dz = g_{\alpha-1}(z)/z$ を用いると具体的に実行できて

$$N = \left(\frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3 g_3(z) \quad (9)$$

を得る．Bose 凝縮転移温度 T_{BEC} は化学ポテンシャル μ が 1 粒子最低エネルギー ϵ_0 に一致する，つまり $z = 1$ となる温度として与えられる．よって，

$$T_{\text{BEC}} = \frac{\hbar \bar{\omega}}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \quad (10)$$

を得る．ただし $\zeta(\alpha) = g_\alpha(1)$ であり， $\zeta(3) \simeq 1.202$ である．上式より，粒子数 N が十分に大きければ $k_B T_c \gg \hbar \bar{\omega}$ となり，(6) の置き換えが正当化される． $T < T_{\text{BEC}}$ では μ に対しても (9) 式を満足させることはできない．この場合は，1 粒子最低準位の占有数（凝縮体粒子数）を N_c とおいて

$$N = N_c + \tilde{N}(T), \quad \tilde{N}(T) = \left(\frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3 \zeta(3) \quad (11)$$

によって励起状態の粒子数（非凝縮体粒子数） $\tilde{N}(T)$ が与えられる．(10) 式を用いると非凝縮体粒子数と凝縮体粒子数の温度依存性は

$$\frac{\tilde{N}}{N} = \left(\frac{T}{T_{\text{BEC}}} \right)^3, \quad \frac{N_c}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_{\text{BEC}}} \right)^3 \quad (12)$$

と書くことができる．実験的に測定された $N_c(T)$ は，相互作用が無視できるような低密度の系では上式とよく一致することが確認されている．

2 Bose 凝縮気体のダイナミクス

2.1 絶対零度における Bose 凝縮体のダイナミクス

前節では理想気体を仮定して話を進めて来たが，ここで原子間相互作用の効果を考えてみよう．相互作用する Bose 気体は，以下のような第二量子化された Hamiltonian によって与えられる．

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}) \\ & + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}')\end{aligned}\quad (13)$$

ここで，

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \text{位置 } \mathbf{r} \text{ に一つの原子を生成する演算子} \quad (14)$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \text{位置 } \mathbf{r} \text{ にある一つの原子を消滅させる演算子} \quad (15)$$

であり，これらの生成消滅演算子は以下の交換関係を満たす．

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (16)$$

$v(\mathbf{r})$ は原子間相互作用である．

絶対零度 ($T = 0$) の希薄 Bose 気体中では，全ての原子は単一の一粒状態に凝縮する．相互作用する Bose 凝縮気体において，凝縮状態を理論的に取り扱う扱うために，Bose 凝縮秩序変数（又は凝縮体波動関数）を導入する．

$$\Phi(\mathbf{r}) \equiv \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}) \rangle \quad (17)$$

場の演算子 $\hat{\psi}$ は，凝縮体成分とそれ以外の成分（非凝縮成分）とに分離することができる．

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}) \rangle + \tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + \tilde{\psi}(\mathbf{r}) \quad (18)$$

二項目の $\tilde{\psi}(\mathbf{r})$ は非凝縮成分を表す場の演算子である．

上で定義した凝縮体波動関数は平衡状態に関するものであったが，これを時間発展する Bose 凝縮体の場合に拡張することもできる．そのために，場の演算子の Heisenberg 表示

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \psi e^{-i\hat{H}t/\hbar} \quad (19)$$

を導入する．(18) 式と同様に凝縮体成分を分離して

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \rangle + \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) \quad (20)$$

と書く．ここで，時間に依存する凝縮体波動関数は

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \psi(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (21)$$

で定義される．凝縮体波動関数 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ に対する運動方程式を導くには，場の演算子に対する Heisenberg 運動方程式

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = [\hat{\psi}, \hat{H}] = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) + \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}', t) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \quad (22)$$

から出発する．(22) 式の期待値をとると

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) \right] \Phi(\mathbf{r}, t) + \int d\mathbf{r}' v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) \hat{\psi}(\mathbf{r}', t) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (23)$$

全ての原子が Bose 凝縮していると仮定して，(20) 式における非凝縮部分 $\tilde{\psi}$ を無視すると

$$\langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) \hat{\psi}(\mathbf{r}', t) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \rangle \approx \Phi^*(\mathbf{r}', t) \Phi(\mathbf{r}', t) \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (24)$$

となる．これより， Φ に対する運動方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) V_{\text{H}}(\mathbf{r}, t) \right] \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (25)$$

を得る．ここで， V_{H} は Hartree 平均場ポテンシャル

$$V_{\text{H}}(\mathbf{r}, t) \equiv \int d\mathbf{r}' v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\Phi(\mathbf{r}', t)|^2 = \int d\mathbf{r}' v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |n_c(\mathbf{r}', t)|^2 \quad (26)$$

である．

原子間相互作用ポテンシャル $v(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ は一般には図3のような短距離相互作用で与えられる．極低温における希薄気体では，原子間相互作用を偽ポテンシャルで置き換えることができる．この偽ポテンシャルは s 波散乱長 a を用いて

$$v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (27)$$

と表される．これによって (25) は

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + g |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (28)$$

と書ける．(28) 式を Gross-Pitaevskii (GP) 方程式と呼ぶ．

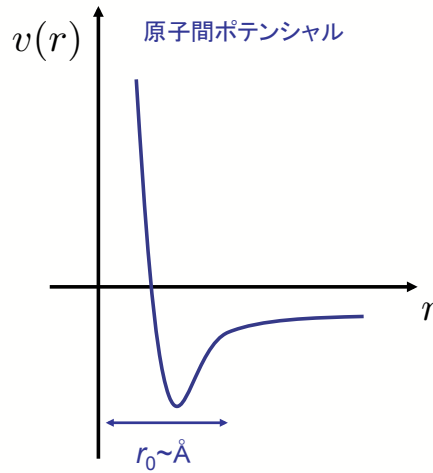


図 3: 原子間相互作用ポテンシャルの概形．

$T = 0$ における GP 方程式は，レーザー冷却された BEC 気体の実現以来，多くの論文で扱われてきた．この方程式は凝縮体の低温における静的及び動的（線形及び非線形）性質をよく表すことができる．典型的な BEC 気体では，相互作用に起因する非凝縮成分（depletion）は数パーセントと見積もられており，純粋な凝縮体を仮定した GP 方程式は定量的にも良い記述を与えることがわかっている．GP 方程式は，原子の超微細構造や磁気副準位を含む多成分 Bose 気体にも拡張されてきた．また，レーザーや rf 磁場による摂動も容易に取り入れることができる．

GP 方程式の解の簡単な例として，トラップポテンシャルが無い一様な系を考えてみよう．この場合，平衡状態の解は

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0 e^{-i\mu t/\hbar}, \quad |\Phi_0|^2 = n_{c0}, \quad \mu = gn_{c0} \quad (29)$$

と得られる．次に時間に依存する解として平衡状態からの微小振動を考える．そのためには，

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0 + \delta\Phi(\mathbf{r}, t) \quad (30)$$

とにおいて GP 方程式を $\delta\Phi$ について線形化すればよい．ここで

$$\delta\Phi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\mu t/\hbar} [u_i(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + v^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}] \quad (31)$$

とにおいてさらに平面波解 $u, v \propto e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ を仮定すれば解を容易に求めることができ，

$$(\hbar\omega)^2 = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu_{c0} + 2gn \right)^2 - (gn)^2 \quad (32)$$

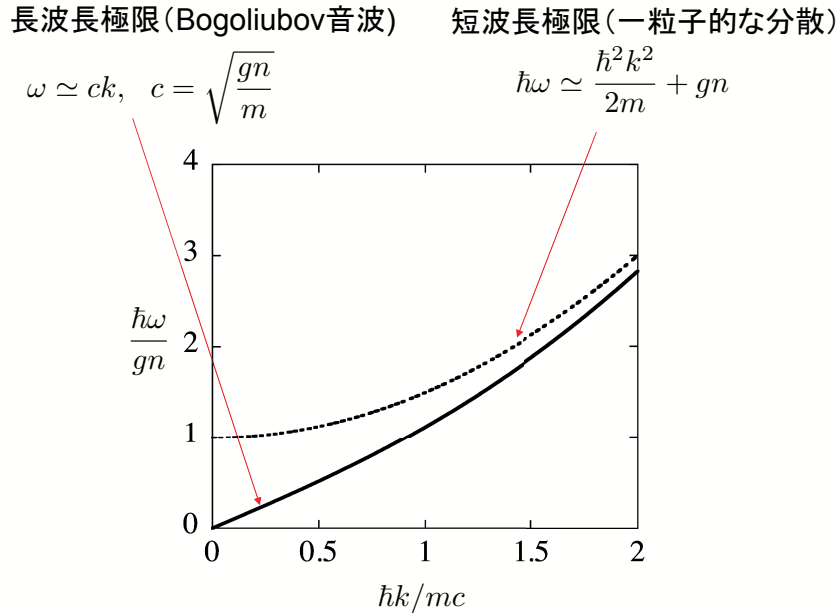


図 4: Bogoliubov 方程式によって得られた一様 Bose 凝縮体の励起スペクトル .

を得る．ただし簡単のため $n = n_{c0}$ と記した．これが Bogoliubov によって導出された $T = 0$ の Bose 凝縮体の励起スペクトルである．ここで， $\mu = gn$ である事を用いた．図 4 に (32) 式で与えられる分散関係をプロットした．長波長では (32) 式は

$$\omega \approx ck, \quad c = \sqrt{\frac{gn_{c0}}{m}} \quad (33)$$

によって与えられ， k に比例するフォノンの分散関係を示す．一粒子的な励起スペクトルの領域と集団的なフォノン領域の間のクロスオーバーが起こる波数 k_c は

$$\frac{\hbar^2 k_c^2}{2m} = 2gn \Rightarrow k_c = \sqrt{\frac{4mng}{\hbar^2}} \quad (34)$$

で定義される．この結果は，Bose 凝縮気体の低エネルギー励起の性質が相互作用の効果によって定量的に変化することを示している．Landau の超流動安定性条件によっても示されるように，長波長における励起スペクトルがフォノンの分散関係であることが超流動の運動を安定にするのである．Bose 凝縮気体における Bogoliubov フォノンの存在は実験的にも確認されている．例えば MIT の実験 [2] では，図 5 のように，一次元的な異方性を持つ凝縮体の中央にレーザーを照射することにより局所的な摂動を加えて音波パルスが発生させた．パルスの伝播速度（音速）の密度依存性は Bogoliubov 音速の表式に一致することが確認されている．

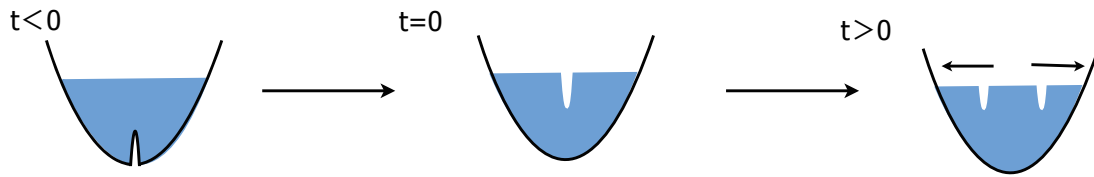


図 5: MIT の実験による Bogoliubov 音波の観測方法の概念図 .

凝縮体の運動における大きな特徴の一つに速度場の非回転性があげられる．それを見るために凝縮体波動関数を振幅と位相を用いて

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_c(\mathbf{r}, t)} \exp(i\theta(\mathbf{r}, t)) \quad (35)$$

と書く．このとき，凝縮体の速度場は

$$\mathbf{v}_c(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta(\mathbf{r}, t) \quad (36)$$

によって与えられる．上式から明らかなように $\nabla \times \mathbf{v}_c = 0$ である．このような凝縮体の非回転性が最も顕著に表れる現象の一つが渦の量子化である．トラップポテンシャルに xy 面内のわずかな非対称性 ($\omega_x \neq \omega_y$) を持たせて回転させると，ある臨界角速度 Ω_c 以上で凝縮体に量子化された渦が発生する．渦状態の凝縮体波動関数は二次元極座標を用いると

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = n_c(\rho, \phi) e^{i\phi} \quad (37)$$

によって与えられ，このときの速度場は

$$\mathbf{v}_c = \frac{\hbar}{m\rho} \hat{\phi}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (38)$$

となる． $\rho = 0$ において $v_c \rightarrow \infty$ となるため，渦の中心では $n_c = 0$ ，つまり穴が空く．さらに回転角速度を上げると多数の量子渦が発生し三角格子 (Abrikosov 格子) を組む．原子気体 BEC における渦格子は ENS グループによって最初に観測された [3]．GP 方程式のシミュレーション結果は実験的に観測された量子渦格子を正確に再現するだけでなく，どのように渦が発生し格子を生成するのか，という動的機構に関する詳しい知見を与えてくれる．

2.2 有限温度における Bose 凝縮気体のダイナミクス

今まで述べたような，十分に低温 ($T \ll T_{\text{BEC}}$) でほとんど全ての原子が凝縮しているときのダイナミクスは GP 方程式によって定量的にも良く記述できることが分かっている．一方，有

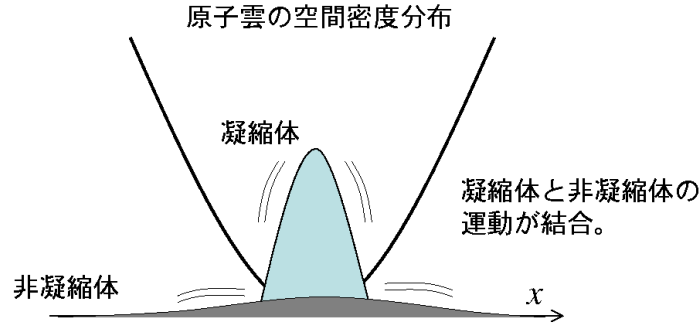


図 6: 有限温度における BEC 気体の集団運動の模式図 .

有限温度 ($T \sim T_{\text{BEC}}$) において多数の非凝縮原子が存在する場合, 凝縮体と非凝縮体の二成分が結合したダイナミクスを考えなければならない. これを模式的に示したのが図 3 である. 例えば, 有限温度における凝縮体の運動の減衰メカニズム, 平衡状態への緩和現象, などを議論するために非凝縮体のダイナミクスを考えることが不可欠である. このような状況を記述する理論はいくつかの論文で導出されているが, ここでは Zaremba-Nikuni-Griffin(ZNG) [4, 5] によるものを紹介する.

ZNG 理論の詳しい導出はここでは省略し, 結果だけを簡単に述べる. 凝縮体の運動は秩序変数 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ に対する一般化された GP 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + gn_c(\mathbf{r}, t) + 2g\tilde{n}(\mathbf{r}, t) - i\hbar R(\mathbf{r}, t) \right] \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (39)$$

によって記述される. ここで, $\tilde{n}(\mathbf{r}, t)$ は非凝縮原子の数密度である. $R(\mathbf{r}, t)$ は凝縮体と非凝縮体の原子交換による散逸を表す項であり, その具体的表式は後で与える. 非凝縮原子のダイナミクスは半古典分布関数 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ によって記述される. これは, 非凝縮体演算子 $\tilde{\psi}$ を用いると

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) \equiv \int d\mathbf{r}' e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}' / \hbar} \langle \tilde{\psi}^\dagger(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{r}', t) \tilde{\psi}(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{r}', t) \rangle. \quad (40)$$

によって定義される. この分布関数によって非凝縮原子の種々の一体物理量を与えられる. 例えば, 非凝縮体密度は以下のように与えられる.

$$\tilde{n}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) \quad (41)$$

非凝縮体分布関数 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ の時間発展は次の運動論方程式に従う.

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} - \nabla U \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right] f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = C_{12}[f, \Phi] + C_{22}[f] \quad (42)$$

ここで $U(\mathbf{r}, t) = U_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + 2g[n_c(\mathbf{r}, t) + \tilde{n}(\mathbf{r}, t)]$ 非凝縮体に対する有効ポテンシャルであり，Hartree-Fock 近似による平均場相互作用の効果が含まれている．右辺は衝突項であり，具体的な表式はやや複雑なのでここでは省略するが，その物理的意味は図 4 のように表すことができる． C_{22} は非凝縮原子間の衝突を表し，通常の Boltzmann 方程式にも含まれる項である．一方， C_{12} は BEC 気体に特有な衝突項であり，非凝縮原子と凝縮体の衝突を表す．この衝突過程では凝縮体と非凝縮体の間に粒子の交換が起こるため，凝縮体中の原子数は保存しない．一般化された GP 方程式中に表れた散逸項 $R(\mathbf{r}, t)$ と C_{12} 衝突項は以下の関係式によって結ばれている．

$$R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2n_c(\mathbf{r}, t)} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} C_{12}[f, \Phi] \quad (43)$$

この関係式は凝縮体，非凝縮体を合わせた全系の粒子数が保存することを保証する．この C_{12} 衝突項は凝縮体の成長ダイナミクスを議論する際には非常に重要である．

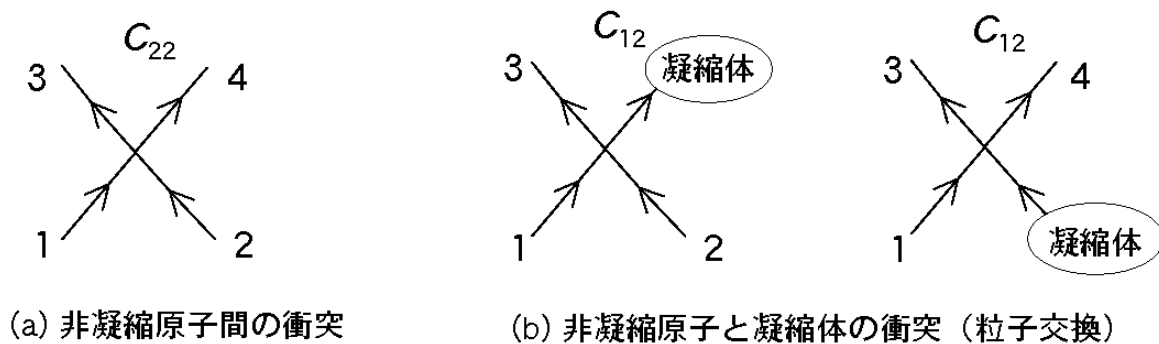


図 7: 運動論方程式の衝突項

このようにして我々は凝縮体秩序変数 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ と非凝縮体分布関数 $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ に対する閉じた方程式（ZNG 方程式）を得た．しかしながら，これらの結合ダイナミクスを解析的に解くことは特別な場合を除いて難しい．ZNG 方程式を数値的にシミュレートする方法は Jackson-Zaremba によって確立された [6]．彼らのシミュレーション結果は数々の実験結果を定量的にも精度よく再現している．特に，JILA のグループによって 1997 年に観測された集団モードの奇妙な温度依存性は長年の間理論家達の頭を悩ませていたが，Jackson らのシミュレーションによって解明された．ここで注意しておきたいことは，ZNG 方程式では非凝縮体に対して Hartree-Fock 近似といふかなり簡単化された近似を行っているにもかかわらず，広い温度範囲にわたってトラップ中の BEC 気体の性質を定量的にも良く記述出来ている点である．最近の研究では，ZNG 方程式のシミュレーションによって，凝縮体ソリトンの運動，二重井戸ポテンシャル中の Josephson 振動，量子渦の運動など，BEC の様々なダイナミクスにおける有限温度効果が調べられている．講演ではこれらの研究結果についても紹介する．

ここで原子気体 BEC と超流動 ^4He の関連について触れておこう．液体 ^4He は 2.17K において超流動現象を起こすことが 1938 年に発見された．Fritz London は液体 ^4He の超流動が BEC によるものであると考えた．しかしながら，液体 ^4He では強い相互作用のため絶対零度においてもせいぜい 9% 程度しか凝縮しない．したがって超流動 ^4He を上で述べたような GP 方程式によって議論することは出来ず，原子気体 BEC とはかなり異なっているようにも見える．しかし，原子気体 BEC でも有限温度において非凝縮原子が多数励起されている状況では超流動 ^4He との類似が成り立つのである．有限温度の BEC 気体に対して，非凝縮原子間の衝突が頻繁に起こり局所平衡が成立するような状況では，有名な Landau 二流体方程式を導くことができる．つまり，超流動 ^4He と中性原子 BEC は全く同じ方程式に従うことが示される．ただし，原子気体 BEC においては熱力学関数や輸送係数などは全て微視的に計算することができる [7]．冷却原子気体 BEC における第二音波の観測は MIT の音波の伝播と同様な手法によって実験的に観測された [8]．ZNG 方程式のシミュレーション結果 [9] によれば，適当な温度領域においては第一音波と第二音波が同時に観測され得ることが示唆されている．

3 光格子中の Bose 原子気体における量子相転移

原子気体を閉じ込める方法としては，磁気的な方法の他に光双極子力を用いる方法がある．この方法ではレーザー強度の二乗に比例したポテンシャルを作ることができる．そこで，レーザーの干渉を利用すれば，周期ポテンシャルを人工的に作ることが出来る．これは光を使って人工的に作る結晶格子のようなものなので，光格子と呼ばれている．格子ポテンシャルが強く，tight-binding 近似が使える状況では，光格子中の Bose 原子気体は次のような Bose-Hubbard 模型で記述される．

$$H = t \sum_{ij} b_i^\dagger b_j + \frac{U}{2} \sum_i b_i^\dagger b_i^\dagger b_i b_i \quad (44)$$

ここでパラメータ t および U は光格子ポテンシャルを作るレーザーの波長と強度に依存するが，ポテンシャル強度をを変化させることによりこれらのパラメータを制御することが可能である．例えば，光格子中の Bose 原子気体において超流動-Mott 絶縁体転移が観測されている [10]．このように，光格子を用いれば原子間の実効的な相互作用を制御して強相関多体系を人工的に作ることが出来る．Bose 原子だけでなく Fermi 原子を光格子中にトラップすることも可能である．さらに最近では周期的ポテンシャルだけでなくランダムポテンシャルを人工的に作りだす実験も行われており，Bose 超流動体に対するランダムネスの効果に関する研究も行われている．講演では，Gutzwiller 近似と呼ばれる平均場近似を用いた光学格子中 Bose 気体のダイナミクスの解析結果を紹介する [11]．

4 Fermi 原子気体における量子縮退と超流動

^6Li や ^{40}K は Fermi 原子なので，原子間相互作用が引力であれば BCS 的な機構による超流動が期待される．実際，Feshbach 共鳴と呼ばれる機構を利用して原子間相互作用の強さと符号を制御することが出来る．近年，この技術を利用して Fermi 原子気体における BCS-BEC クロスオーバー，つまり相互作用が強くなるにつれて超流動の性質が弱結合 BCS 理論的なものから Bose 分子が凝縮する BEC 的なものへ連続的に移行する現象が実現された [12]．Fermi 原子気体における BCS-BEC クロスオーバーに関しては現在でも様々な実験及び理論的研究が行われている．特に，Fermi 原子気体を光格子に充填させた系は，新しい強相関量子系として注目を集めている．最近の実験では，単純な立方格子だけではなく三角格子，籠目格子 [13]，蜂の巣格子 [14] といった特殊な幾何学的構造を持った光格子ポテンシャルを実験的に作ることが可能になっている．講演では，これらの格子中の Fermi 超流動体における特異な振舞いについて紹介する．

参考文献

- [1] M. H. Anderson *et al.*, Science **269**, 198 (1996).
- [2] M. R. Andrews *et al.*, Phys. Rev. Lett. **79**, 553 (1997); **80**, 2967 (1998).
- [3] K. Madison *et al.* Phys. Rev. Lett. **84**, 806 (2000).
- [4] E. Zaremba, T. Nikuni, and A. Griffin, J. Low Temp. Phys. **116**, 277 (1999).
- [5] A. Griffin, T. Nikuni, and E. Zaremba, Bose-Condensed Gases at Finite Temperatures, Cambridge University Press (2009).
- [6] B. Jackson and E. Zaremba, Phys. Rev. A **60**, 033606 (2002).
- [7] T. Nikuni and A. Griffin, Phys. Rev. A **63**, 033608 (2001); **64** 049902(E).
- [8] R. Meppelink, S. B. Koller, and P. van der Straten, Phys. Rev. A **80**, 043605 (2009).
- [9] E. Arahata and T. Nikuni, Phys. Rev. A **87**, 033610 (2013).
- [10] M. Greiner *et al.*, Nature **415**, 39 (2002).
- [11] Takuya Saito, Ippei Danshita, Takeshi Ozaki, and Tetsuro Nikuni, Phys. Rev. A **86**, 023623 (2012).
- [12] C. Regal *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004).

- [13] Daisuke Yamamoto, Chika Sato, Tetsuro Nikuni, and Shunji Tsuchiya, Phys. Rev. Lett. **110**, 145304 (2013).
- [14] Shunji Tsuchiya, R. Ganesh, and Tetsuro Nikuni, Phys. Rev. B **88**, 014527 (2013).