

周期点集合の組ひも型の決定問題

鳴門教育大 松岡 隆 (Takashi Matsuoka)

$f: M \rightarrow M$ を曲面 M 上の embedding (中への同相写像) で恒等写像とイソトピックなものとするとき, f の周期点に対しトポロジー不変量の一つである組ひも型が定義される. 周期点の組ひも型は, f の力学系的性質に関する様々な情報を含んでおり, 2次元力学系理論における重要な研究対象となっている. 組ひも型に関しては, 現在までに, 主として f の力学系的複雑さとの関連に焦点を当てた研究が行われて来ている. (例えば Boyland による総合報告 [1] 参照.)

筆者は [2] において, M が円板 D であるとき, f の不動点全体のなす集合 $\text{Fix}(f)$ が定める組ひも型の可能なタイプをすべて決定するという問題を考察し, f が 7 個以下の不動点しか持たず, しかもそれらが横断性条件をみたしているという条件の下で, 完全な解答を与えた. ここでは, この結果を周期点集合に対し拡張する. また, 横断性に関する仮定を置かない一般的な場合も扱う.

1. 周期点集合の組ひも型

定義 1. n 本のひもからなる組ひもを n 次組ひも (n -braid) という. 連続変形で移り合う 2 つの n 次組ひもを同値とみなすとき, この同値関係に関する同値類を n 次組ひも型 (n -braid type) という.

$f: D \rightarrow D$ を円板 D から D の中への C^1 級微分同相写像で向きを保つものとする. f は D 上の恒等写像 id_D にイソトピックであることが知られている.

定義 2. S を f の有限不変集合とし, n を S の個数 $\#S$ とする. id_D を f に変形するイソトピー $f_t: D \rightarrow D$ ($0 \leq t \leq 1$) を 1 つ選ぶ. このとき, 空間 $D \times [0, 1]$ 内の n 本の曲線の集まり

$$\bigcup_{0 \leq t \leq 1} (f_t(S) \times \{t\})$$

は n 次組ひもを定義する. これが定める組ひも型を $bt(S, f; \{f_t\})$, または単に $bt(S, f)$ と表し, S の組ひも型という. $bt(S, f)$ の定義は, イソトピー f_t の選び方に依存するが, full twist n -braid (平面を 1 回転することにより定義される n 次組ひも) のべきによる積を除いて一意的に定まることが知られている.

定義 3. 自然数 m と整数 i にたいし, 空間内の m 本の曲線の組 $A(m, i)$ を

$$A(m, i) = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} (\rho_{it/m}(C_m) \times \{t\})$$

で定義する. ここに, C_m は 1 の m 乗根の全体 (即ち, $C_m = \{e^{2\pi k\sqrt{-1}/m} \mid k = 0, \dots, m-1\}$), ρ_t は原点を中心とする角度 $2\pi t$ の平面の回転. また, E を $A(m, i)$ の中心に位置する真つすぐなひもとする, 即ち, $E = \{(0, 0)\} \times [0, 1]$. このとき, $A(m, i) \cup E$ が定義する $(m+1)$ 次組ひも型を b_m^i とかく.

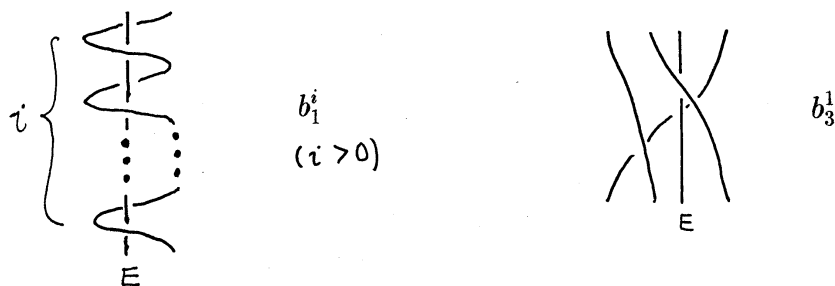


図 1 b_m^i の例.

2. 組ひも型の決定

$P(n)$ を周期が n 以下である f の周期点全体の集合とする. 以下に述べる定理では, $P(n)$ の元の個数がある値より少ないという条件の下で, $P(n)$ の組ひも型 $bt(P(n), f)$ の可能なタイプをすべて列挙する.

これら実現可能な組ひも型は, ある種のグラフを用いて記述される. まず, このグラフについて説明する. 次の条件をみたす有限連結有向グラフ τ を考える.

条件 (T):

- (1) τ は tree である. 更に, 頂点 v_0 が存在して, すべての辺は v_0 から遠ざかる方向に向き付けられている.
- (2) 辺は $[\longrightarrow]$ と $[\Longrightarrow]$ の 2 種類存在する.
- (3) 各頂点から出る辺 $\longrightarrow, \Longrightarrow$ は共に 1 本以下である.

さて, τ の各頂点に組ひも型 b_m^i の内のいずれかを添付する. 即ち, 写像 $\phi: V \rightarrow B$ を 1 つ与える. ここに, V は τ の頂点の集合, $B = \{b_m^i \mid m \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}\}$. 写像 ϕ に対し, 次の条件を考える.

条件 (Φ): 頂点 v から辺 $\longrightarrow, \Longrightarrow$ が両方共出ているとき, $\longrightarrow$ の方の終点を v' とすれば, $\phi(v) = \phi(v')$.

例. 次図で示される τ と ϕ は条件 (T), (Φ) をみたす. (ただし, 頂点の代わりにそこ

での ϕ の値を書いておいた.)

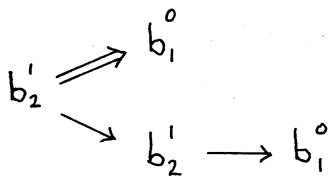


図 2

定義 4. 上の条件をみたす tree τ と写像 ϕ が与えられたとき, 次の変換をすべての辺に適用して定義される組ひも型を $\beta(\tau, \phi)$ と表す.

- (1) $b_m^i \rightarrow b_l^j$ に対しては, b_m^i の中心にあるひも E を b_l^j に取り換える.
- (2) $b_m^i \Rightarrow b_l^j$ に対しては, b_m^i の E 以外の m 本のひも $A(m, i)$ に b_l^j を次図に示されるようなやり方で埋め込む. (この図では, $b_3^1 \Rightarrow b_1^2$ の場合だけ示してある.)

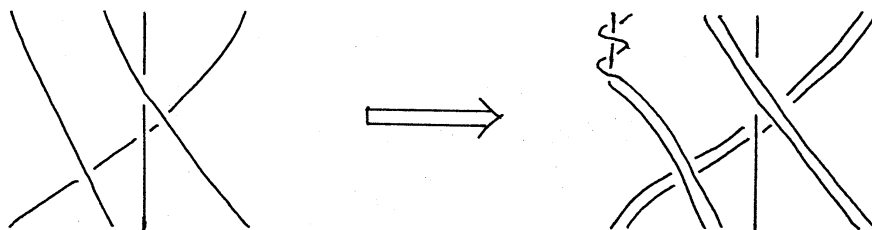


図 3

例. 図 2 の τ, ϕ に対応する組ひも型は次のものである.

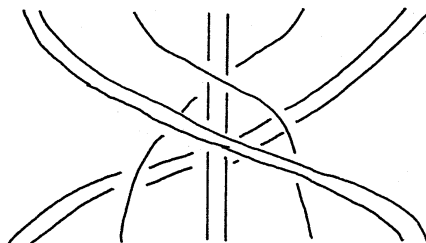


図 4 $\beta(\tau, \phi)$

定理 1. $P(n)$ の元の個数が $2n+2$ 以下とする. このとき, $bt(P(n), f)$ は, 条件 (T), (Φ) をみたす (τ, ϕ) に対して定まる組ひも型 $\beta(\tau, \phi)$ に等しい.

例 1. $P(2)$ が丁度 5 個の元からなるとき, $\text{bt}(P(2), f)$ は, 次の 7 種類の (τ, ϕ) が定義する組ひも型の内のいずれかに等しい. ここで, 整数 i, j, k, l は任意に取れる.

$$b_1^i \begin{matrix} \rightarrow b_1^i \rightarrow b_1^k \\ \Rightarrow b_1^j \end{matrix} \quad b_1^i \rightarrow b_1^j \rightarrow b_1^k \rightarrow b_1^l \quad b_1^i \rightarrow b_1^j \rightarrow b_2^k$$

$$b_1^i \rightarrow b_2^j \rightarrow b_1^k \quad b_2^i \rightarrow b_1^j \rightarrow b_1^k \quad b_2^i \rightarrow b_2^j \quad b_2^i \Rightarrow b_1^j$$

注: 上の例 1 において, 条件 (T), (Φ) をみたす τ, ϕ の組は他にもあるが, それらが定義する組ひもはすべて上のリストに含まれている. 例えば, $b_1^i \rightarrow b_1^i \rightarrow b_2^j$ も条件をみたすが, これに, 対応する組ひもは $\beta(b_1^i \rightarrow b_1^i \rightarrow b_2^j)$ と等しい.

例 2. 定理 1 より, 例えば, 次のような組ひも型は $P(2)$ の組ひも型として実現不可能であることが分かる.



図 5

次に, $P(n)$ の全ての元が横断的である場合を考える.

$$\bar{B} = \{\bar{b}_m^i | m \in \mathbf{N}, i \in \mathbf{Z}\} \cup \{b_2^i | i \in \mathbf{Z}\}$$

とおく. ここに $\bar{b}_m^i = b_m^i \rightarrow b_m^i$. 写像 $\phi: V \rightarrow \bar{B}$ が与えられたとき, 次の条件を条件 ($\bar{\Phi}$) とする.

条件 ($\bar{\Phi}$): $\phi(v) = b_2^i$ ならば, v から辺 $\rightarrow$ は出ていない.

定理 2. $P(n)$ の元はすべて横断的であると, $\#P(n) \leq \frac{7}{2}n + 4$ とする. このとき, $\text{bt}(P(n), f)$ は, 条件 (T), ($\bar{\Phi}$) をみたす (τ, ϕ) から定まる組ひも型 $\beta(\tau, \phi)$ に等しい.

例. 定理 2 より, 例えば, $P(2)$ のすべての元が横断的である場合, 次のような組ひもは $P(2)$ の組ひも型として実現不可能であることが分かる.

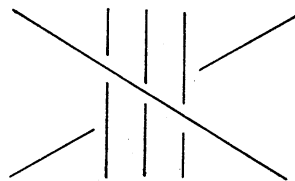


図 6

注1 : 定理2の $n = 1$ の場合が, [2] の主定理である.

注2 : 定理1に現れた $bt(P(n), f)$ は, 1個の sink から出発して周期倍分岐および sink を中心とするサドル・ノード分岐を有限回繰り返して得られる周期点集合の組ひも型に等しい. また, 定理2に現れた組ひもは, 1個の sink から定理1の分岐を繰り返し, 更にその後, 次の2つの操作を行って得られる周期点集合の組ひも型に等しい.

- (1) サドル・ノード分岐によって2つの周期軌道を1つにくっつける.
- (2) sink とその周りを回るサドルをくっつけて, 退化型周期軌道にする.

3. 証明の方針

曲面上の同相写像のイソトピー類に関する Nielsen-Thurston の分類定理により, 任意の組ひもは有限個の周期的組ひもと擬アノソフ型組ひもに既約分解できることが分かる. $bt(P(n), f)$ が擬アノソフ成分 b を含むとすると, b に対応する擬アノソフ写像の周期点集合について, その特異点の構造に着目して調べることにより, $P(n)$ は常に $2n + 3$ 個以上の元を持たなければならないことが分かる. 従って, 定理1の仮定における個数の制限の下で, $bt(P(n), f)$ は周期的成分のみからなることが示される. 周期的成分しか持たない任意の組ひもは, 定理の結論に示されたタイプのものしかないことが, ニールセン不動点定理を用いて示すことができる. 定理2も同様に証明される.

参考文献

- [1] P. Boyland, Topological methods in surface dynamics, *Topology and its Appl.*, **58** (1994), 223-298.
- [2] T. Matsuoka, Braid type of the fixed point set for orientation- preserving embeddings on the disk, *Tokyo J. Math.* **18** (1995) (to appear).