

Crossed Burnside rings and cohomological Mackey 2-motives

近畿大学・理工学部理学科数学コース 小田 文仁
Fumihito Oda
Department of Mathematics,
Kindai University

概要

Balmer と Dell'Ambrogio は $\mathbb{k}$ 線型 Mackey 2-motives の双圏から $\mathbb{k}$ 線型 cohomological Mackey 2-motives の双圏への擬関手 $\mathcal{P}$ を導入した。ただし、 $\mathbb{k}$ は任意の可換環とする。彼らは有限群 G の $\mathbb{k}$ 上の斜バーンサイド環から群環 $\mathbb{k}G$ の中心 $Z\mathbb{k}G$ への環準同型写像を用いて、 $\mathcal{P}$ が一般の Mackey 2-motives を cohomological Mackey 2-motives にうつすことを証明した ([BD21, Theorem 5.3])。我々は cohomological Mackey 2-motives のモチーフ的分解の振る舞いを Mackey 2-motives のモチーフ的分解の擬関手 $\mathcal{P}$ による像として研究する。

謝辞 研究代表者の飛田明彦さんを始め、関係者のみなさまには大変お世話になりました。この場をかりて御礼申し上げます。

本稿は、吉田知行氏、竹ヶ原裕元氏との共同研究 [OTY] に基づく報告である。

G は有限群、 $\mathbb{k}$ は可換環とする。Mackey 2-functors と Mackey 2-motives の Balmer-Dell'Ambrogio 理論 ([BD20]) は、非常に多くの研究分野に応用可能である。その理論は以下に示す多くの圏のアーベル圏としての分解が Mackey 2-motives に制御されていることを示している：

- 表現論における $\mathbb{k}$ 上の G の群環 $\mathbb{k}G$ に対する $\mathbb{k}G$ -加群の圏 $\mathcal{M}(G) = \mathbb{k}G\text{-mod}$.
- 表現論における $\mathbb{k}G\text{-mod}$ の導来圏 $\mathcal{M}(G) = D(\mathbb{k}G)$.
- 同変ホモトピー論における G -spectra のホモトピー圏 $\mathcal{M}(G) = \mathrm{SH}(G)$.
- 非可換幾何における G - C^* -代数の Kasparov 圏 $\mathcal{M}(G) = \mathrm{KK}(G)$.

上述のさまざまなアーベル圏を統一的に分解するために、Balmer と Dell'Ambrogio は Mackey 2-motives の概念 - それは Grothendieck による代数幾何学における pure motives の plain 1-圏のアイデアに触発された - に到達した。彼らは $\mathcal{M}(G)$ たちの分解を制御する仕組みの解決策をモチーフ的分解とよばれるある圏における対象間の同値

$$G \simeq (G, e_1) \oplus (G, e_2) \oplus \cdots \oplus (G, e_n), \quad (0.1)$$

ただし、 e_i は $\mathbb{k}$ -線型 Mackey 2-motives の双圏 $\mathbb{k}\widehat{\mathrm{Span}}(G, G)$ ([BD20, Definition 7.1.7]) の単位 1-cell $\mathrm{Id}_G : G \rightarrow G$ の自己同型環 $\mathrm{End}_{\mathbb{k}\widehat{\mathrm{Span}}(G, G)}(\mathrm{Id}_G)$ のべき等元、に見出した。そして、環 $\mathrm{End}_{\mathbb{k}\widehat{\mathrm{Span}}(G, G)}(\mathrm{Id}_G)$ が Yoshida により導入された斜バーンサイド環 $B_{\mathbb{k}}^c(G)$ ([Yo97]) と同型であることを証明した ([BD20, Theorem 7.4.5])。さらに、彼らは [BD21] で cohomological Mackey 2-functors と cohomological Mackey 2-motives の理論を紹介した。通常 Mackey 2-motive と cohomological Mackey 2-motive の関係を詳細に解析するために、彼らは [BD21] で通常 Mackey 2-motive を cohomological Mackey 2-motive にうつす擬関手 $\mathcal{P}$ を導入した。対象間の同値 (0.1) に Mackey 2-functor $\mathcal{M}$ を施すことによりアーベル圏の分解

$$\mathcal{M}(G) \simeq \mathcal{M}(G, e_1) \oplus \cdots \mathcal{M}(G, e_n)$$

を得ることが [BD20] の 1 つの主目的であった。[BD21] では対象間の同値 (0.1) に擬関手 $\mathcal{P}$ を施すことにより、cohomological Mackey 2-motives のモチーフ的分解

$$G \simeq (G, \rho_G(e_1)) \oplus \cdots \oplus (G, \rho_G(e_n))$$

が得られることを示した。ただし、いくつかの $\rho_G(e_i)$ たちは 0 となる場合もあるという主張である。そこで、以下のような自然な問いが浮かぶ。

問. $\rho_G(e_i) = 0$ となる原始べき等元 $e_i \in B_{\mathbb{k}}^c(G)$ を特徴付けよ。

この報告の主目的は、ある特定の環 $\mathbb{k}$ に対する [BD21, Theorem 5.3] の精密化 (Theorems 3.2, 3.4, 3.5) を与えることである。次の目的は、 $\mathbb{Z}$ 上の G の斜バーンサイド環の原始べき等元を決定することである (Theorem 1.2)。完備離散付値環 $\mathcal{O}$ 上の斜バーンサイド環 $B_{\mathcal{O}}^{\circ}(G)$ のすべての原始べき等元の振る舞いを調べるために、我々は Bouc が構築した Green functor 理論を $B_{\mathcal{O}}^{\circ}(G)$ の分解を与えるため応用する (Proposition 2.5)。

この報告の構成は以下の通り：Section 1 では、斜バーンサイド環の定義と基本的性質を復習する。Section 2 は Bouc による Green functor 理論をまとめる。本質的には [Bo03b] で論じられたことではあるが、応用として $B_{\mathcal{O}}^{\circ}(G)$ の分解を与える。Section 3 では、Mackey 2-motives のモチーフ的分解の擬関手 $\mathcal{P}$ による像として、cohomological Mackey 2-motives のモチーフ的分解の振る舞いを記述する。特に、斜バーンサイド環のどの原始べき等元が、Balmer と Dell'Ambrogio が導入した ρ_G ([BD21, Theorem 5.3]) の核に含まれるかを判定するための条件を与える。

本稿では、 G は単位元 e をもつ有限群、 $\mathbb{k}$ は単位元をもつ可換環としての記号として固定する。

1 斜バーンサイド環

G の $\mathbb{k}$ 上の斜バーンサイド環を思い出す ([Bo03b], [OY01], [Yo97])。共役の作用で G 集合とみなした集合 G を G^c とかく。斜 G 集合の圏 (category of crossed G -sets) は G 集合 G^c 上の G 集合の圏である：斜 G 集合とは対 (X, α) 、ただし、 X は G 集合、 $\alpha: X \rightarrow G^c$ は G 写像であり、斜 G 集合 (X, α) から (Y, β) への射は、 G 写像 $f: X \rightarrow Y$ であり $\beta \circ f = \alpha$ を満たすものとする。斜バーンサイド群 (crossed Burnside group) $B^c(G)$ は斜 G 集合の圏の非交和に関する Grothendieck 群である。 $[X, \alpha]$ で斜 G 集合 (X, α) の同型類とする。 (X, α) と (Y, β) をふたつの斜 G 集合とすると、斜 G 集合の積は、 $(X \times Y, \alpha \cdot \beta)$ で定まる斜 G 集合である。ただし、 $X \times Y$ は対角作用で定まる G 集合、 $\alpha \cdot \beta$ は $(\alpha \cdot \beta)(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$ で定まる G 写像 $X \times Y \rightarrow G^c$ とする。この斜 G 集合の積は非交和と可換であり、従って、 $B^c(G)$ に積を定める。 $B^c(G)$ は環の構造を持ち、我々はそれを G の斜バーンサイド環 (crossed Burnside ring) と呼ぶ。この環の単位元は $[\bullet, u_{\bullet}]$ 、ただし、 $\bullet$ は 1 点 G 集合、 $u_{\bullet}$ は $\bullet$ の元を G の単位元にうつす G 写像である。斜 G 集合 $(G/H, m_a)$ 、ただし、 $H \leq G$ 、 $m_a: G/H \rightarrow G^c$ は $m_a(gH) = {}^g a := gag^{-1}$ ($a \in C_G(H)$)、と同型である斜 G 集合は、推移的斜 G 集合と呼ばれる。 $\mathcal{P}_G$ は対 (H, a) ($H \leq G$, $a \in C_G(H)$) 全体のなす集合とする。群 G は共役により $\mathcal{P}_G$ に作用し、その G 軌道の完全代表系を $[\mathcal{P}_G]$ と書く。 $(H, a) \in \mathcal{P}_G$ に対して、斜 G 集合 $(G/H, m_a)$ の同型類を $[H, a]_G$ または $[(G/H)_a]$ で表す。集合 $\{[H, a]_G \mid (H, a) \in [\mathcal{P}_G]\}$ は $B_{\mathbb{k}}^c(G)$ の $\mathbb{k}$ 基底をなすことが知られている ([OY01, (3.1.c)], [Bo03b, Corollary 2.2.3])。斜バーンサイド環 $B_{\mathbb{k}}^c(G)$ はバーンサイド環 $B_{\mathbb{k}}(G)$ を部分環にもつ (see Lemma (1.1))。係数環が $\mathbb{k} = \mathbb{Z}$ のとき $B(G)$ (or $B^c(G)$) と書く。

1.1 Some maps between $B(G)$ and $B^c(G)$

環準同型写像 $\alpha_G^{\mathbb{k}}: B_{\mathbb{k}}^c(G) \rightarrow B_{\mathbb{k}}(G)$ を

$$[(G/U)_t] \mapsto [G/U]$$

で、 $\iota_G^{\mathbb{k}}: B_{\mathbb{k}}(G) \rightarrow B_{\mathbb{k}}^c(G)$ を

$$[G/U] \mapsto [(G/U)_e].$$

によりそれぞれ定める。 $\alpha_G^{\mathbb{k}} \circ \iota_G^{\mathbb{k}} = \text{id}_{B_{\mathbb{k}}(G)}$ が成り立つので、バーンサイド環 $B(G)$ は $\text{Im} \iota_G^{\mathbb{k}}$ と同一視できる。

$$\tilde{B}_{\mathbb{k}}(G) := \prod_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{k}$$

とする。

$$[G/U] \mapsto (\phi_H^{\mathbb{k}}(G/U))_{H \in \mathcal{C}(G)},$$

ただし、 $\phi_H^{\mathbb{k}}([G/U]) = \text{inv}_H((G/U)) = \{gU \in G/U \mid H \leq {}^g U\}$ 、与えられる単射環準同形写像 $\phi^{\mathbb{k}}: B_{\mathbb{k}}(G) \rightarrow \tilde{B}_{\mathbb{k}}(G)$ が存在する。部分群 $H \leq G$ に対して

$$\sum \ell_s s \mapsto \sum \ell_s$$

で与えられる環準同型写像 $\varepsilon_H^{\mathbb{k}} : \mathbb{k}C_G(H) \rightarrow \mathbb{k}$ は $\mathbb{k}$ 上の群代数 $\mathbb{k}C_G(H)$ の **augmentation map** と呼ばれる ([MS02, Definition 3.2.9]). $\mathbb{k}C_G(H)$ の中心たちの直積環 $\prod_{H \leq G} \mathbb{k}C_G(H)$ の G 固定点のなす部分環を

$$\tilde{B}_{\mathbb{k}}^c(G) = \left(\prod_{H \leq G} \mathbb{k}C_G(H) \right)^G$$

で表す. 環準同型写像 $\tilde{\alpha}_G^{\mathbb{k}} : \tilde{B}_{\mathbb{k}}^c(G) \rightarrow \tilde{B}_{\mathbb{k}}(G)$ を

$$(x_H)_{H \leq G} \mapsto (\varepsilon_H^{\mathbb{k}}(x_H))_{H \in C(G)}$$

で, $\iota_G^{\mathbb{k}} : \tilde{B}_{\mathbb{k}}(G) \rightarrow \tilde{B}_{\mathbb{k}}^c(G)$ を

$$(y_H)_{H \in C(G)} \mapsto (\tilde{y}_H)_{H \leq G},$$

ただし, $K \leq G$ が H の G における共役と同型であるとき $\tilde{y}_H = y_K$ とする, でそれぞれ定める. 明らかに, $\tilde{\alpha}_G^{\mathbb{k}} \circ \iota_G^{\mathbb{k}} = \text{id}_{\tilde{B}_{\mathbb{k}}(G)}$ が成り立つ. 部分群 $H \leq G$ に対して,

$$\varphi_H^{\mathbb{k}}([D, s]) = \sum_{gD \in (G/D)^H} g s = \sum_{t \in G} \# \{gD \in (G/D)^H \mid g s = t\} \cdot t$$

を線型に拡張して定義される環準同型写像 $\varphi_H^{\mathbb{k}} : B_{\mathbb{k}}^c(G) \rightarrow \tilde{B}_{\mathbb{k}}^c(G)$ が存在する. *Burnside homomorphism* は

$$\varphi^{\mathbb{k}} = (\varphi_H^{\mathbb{k}})_{H \in C(G)} : B_{\mathbb{k}}^c(G) \rightarrow \tilde{B}_{\mathbb{k}}^c(G)$$

として与えられる. 簡単のため, $\mathbb{k} = \mathbb{Z}$ のとき, しばしば $\varphi, \phi, \alpha_G, \iota_G$ などと $\mathbb{Z}$ を省略して書く. 次の補題を準備する.

Lemma 1.1. (i) *The diagrams*

$$\begin{array}{ccc} B_{\mathbb{k}}^c(G) & \xrightarrow{\varphi^{\mathbb{k}}} & \tilde{B}_{\mathbb{k}}^c(G) \\ \alpha_G^{\mathbb{k}} \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha}_G^{\mathbb{k}} \\ B_{\mathbb{k}}(G) & \xrightarrow{\phi^{\mathbb{k}}} & \tilde{B}_{\mathbb{k}}(G) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B_{\mathbb{k}}^c(G) & \xrightarrow{\varphi^{\mathbb{k}}} & \tilde{B}_{\mathbb{k}}^c(G) \\ \iota_G^{\mathbb{k}} \uparrow & & \uparrow \tilde{\iota}_G^{\mathbb{k}} \\ B_{\mathbb{k}}(G) & \xrightarrow{\phi^{\mathbb{k}}} & \tilde{B}_{\mathbb{k}}(G) \end{array} \quad (1.1)$$

are commutative.

(ii) *Let $x \in B^c(G)$. If $\varphi^{\mathbb{k}}(x) = \tilde{\iota}_G^{\mathbb{k}}(y)$ for some $y \in \tilde{B}_{\mathbb{k}}(G)$, then $\iota_G^{\mathbb{k}} \circ \alpha_G^{\mathbb{k}}(x) = x$.*

Proof. (i) は明らか. (ii) を示す. $\tilde{\alpha}_G^{\mathbb{k}} \circ \iota_G^{\mathbb{k}} = \text{id}_{\tilde{B}_{\mathbb{k}}(G)}$ が成り立つので, (i) より, 以下が従う:

$$\varphi^{\mathbb{k}} \circ \iota_G^{\mathbb{k}} \circ \alpha_G^{\mathbb{k}}(x) = \tilde{\iota}_G^{\mathbb{k}} \circ \phi^{\mathbb{k}} \circ \alpha_G^{\mathbb{k}}(x) = \tilde{\iota}_G^{\mathbb{k}} \circ \tilde{\alpha}_G^{\mathbb{k}} \circ \varphi^{\mathbb{k}}(x) = \tilde{\iota}_G^{\mathbb{k}} \circ \tilde{\alpha}_G^{\mathbb{k}} \circ \tilde{\iota}_G^{\mathbb{k}}(y) = \tilde{\iota}_G^{\mathbb{k}}(y) = \varphi^{\mathbb{k}}(x).$$

従って $\iota_G^{\mathbb{k}} \circ \alpha_G^{\mathbb{k}}(x) = x$ が得られる. $\square$

1.2 Primitive idempotents

斜バーンサイド環の原始べき等元は Bouc ([Bo03b]) または [OY01] で得られている. $\mathbb{Q}$ 上のバーンサイド環 $B_{\mathbb{Q}}(G)$ の原始べき等元公式は, Gluck ([Gl81]) と Yoshida ([Yo83]) により独立に与えられた. $B_{\mathbb{Q}}(G)$ の原始べき等元は, G の部分群の共役類により index 付けされている. 部分群 H で index 付けされた原始べき等元を $e_H^G \in B_{\mathbb{Q}}(G)$ と書く. バーンサイド環 $B(G)$ の原始べき等元は Dress の定理 ([Dr69], or [Bo00, Corollary 3.3.6]) による. G の部分群 H は, その交換子部分群 $[H, H]$ が H と等しいとき, 完全部分群と呼ばれる. $C^\infty(G)$ で G の完全部分群からなる共役類の 1 つの完全代表系を表す. 部分群 $H \leq G$ は $K \leq G$ と G 共役であるとき, $H =_G K$ と書く. 部分群 $H \leq G$ に対して, 剰余群が可解群となる H の最小の正規部分群を H^∞ と書く. 集合

$$\{f_J^G := \sum_{H^\infty =_G J, H \in C(G)} e_H^G \mid J \in C^\infty(G)\}$$

は $B(G)$ のすべての原始べき等元の集合である ([Be91, Corollary 5.4.8 (Dress)]). 環準同型写像 $\iota_G : B(G) \rightarrow B^c(G)$ は, $B^c(G)$ の単位元の直交べき等元たち $\iota_G(f_J^G)$ ($J \in C^\infty(G)$) の和への分解を与える. 我々はべき等元たち $\iota_G(f_J^G)$'s が実はすべての $B^c(G)$ の原始べき等元であることを証明する.

次の定理は本稿の主定理のひとつであり, Theorem 3.2 の証明に応用される.

Theorem 1.2. *The set of elements $\iota_G(f_J^G)$, for $J \in C^\infty(G)$, is the set of primitive idempotents of $B^c(G)$.*

Proof. $B^c(G)$ の任意のべき等元を x とする. [MS02, Corollary 7.2.4] により, $\mathbb{Z}C_G(H)$ ($H \leq G$) は, 自明なべき等元のみをもつので, ある $y \in \hat{\Omega}(G)$ に対して $\phi(x) = \tilde{\iota}_G(y)$ と書ける. この事実と Lemma 1.1 (ii) により $\iota_G \circ \alpha_G(x) = x$ が得られる. この事実により, 我々は x と $\alpha_G(x) \in B(G)$ を同一視してよい. 写像 $\alpha_G : B^c(G) \rightarrow B(G)$ は環準同型写像であるから, $\alpha_G(x)$ は $B(G)$ のべき等元であることが従う. 従って, $B^c(G)$ のすべてのべき等元は $B(G)$ のすべてのべき等元である. $\square$

Theorem 1.2 より, $J \in C^\infty(G)$ でインデックス付けされた $B^c(G)$ の原始べき等元を $\overline{f}_J^G$ と表してよい. $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ のときの可換図式 (1.1) を

$$\begin{array}{ccc} B_{\mathbb{Q}}^c(G) & \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{Q}}} & \tilde{B}_{\mathbb{Q}}^c(G) \\ \alpha_G^{\mathbb{Q}} \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha}_G^{\mathbb{Q}} \\ B_{\mathbb{Q}}(G) & \xrightarrow{\phi_{\mathbb{Q}}} & \tilde{B}_{\mathbb{Q}}(G) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B_{\mathbb{Q}}^c(G) & \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{Q}}} & \tilde{B}_{\mathbb{Q}}^c(G) \\ \iota_G^{\mathbb{Q}} \uparrow & & \uparrow \tilde{\iota}_G^{\mathbb{Q}} \\ B_{\mathbb{Q}}(G) & \xrightarrow{\phi_{\mathbb{Q}}} & \tilde{B}_{\mathbb{Q}}(G) \end{array} \quad (1.2)$$

で表す.

φ_1 ([OY01, (4.2)], [Bo03b, 2.3.1]) は $B^c(G)$ から群環 $\mathbb{Z}G$ の中心 $\mathbb{Z}\mathbb{Z}G$ への環準同型写像であるから, $\varphi_1(1_{B^c(G)}) = 1$ であることがわかる. より正確に言えば, 我々は $\varphi_1^{\mathbb{Q}}$ の像として $\mathbb{Z}\mathbb{Z}G$ の単位元を与えるような $B^c(G)$ の元 $x \neq 1_{B^c(G)}$ を得ることができるのである.

Corollary 1.3. *Let $\overline{f}_J^G$ be a primitive idempotent of $B^c(G)$ with $J \in C^\infty(G)$. Then*

$$\varphi_1^{\mathbb{Q}}(\overline{f}_J^G) = \begin{cases} 1 & J = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. 部分群 $H \leq G$ をとる. このとき, 図式 (1.2) より

$$\begin{aligned} \varphi_1^{\mathbb{Q}} \iota_G^{\mathbb{Q}}(e_H^G) &= \tilde{\iota}_G^{\mathbb{Q}} \circ \phi_1^{\mathbb{Q}}(e_H^G) \\ &= \begin{cases} 1 & H = 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

となるので, 我々は以下をえる:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{\mathbb{Q}}(\overline{f}_J^G) &= \varphi_1^{\mathbb{Q}}(\iota_G^{\mathbb{Q}}(f_J^G)) \\ &= \sum_{H \infty_G J, H \in C(G)} \varphi_1^{\mathbb{Q}}(\iota_G^{\mathbb{Q}}(e_H^G)) \\ &= \begin{cases} 1 & J = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

$\square$

$\mathbb{K}$ を標数 0 の十分大きな体とする. $B_{\mathbb{K}}^c(G)$ の原始べき等元は [OY01] と [Bo03b] で決定されている. それらの原始べき等元は G の部分群 H と $C_G(H)$ の既約 $\mathbb{K}$ 指標でインデックス付けされている. $e_{H,\theta}$ を $B_{\mathbb{K}}^c(G)$ の原始べき等とする. $e_{H,\theta}$ は $\tilde{B}_{\mathbb{K}}^c(G)$ の原始べき等元 $\tilde{e}_{H,\theta}$ を用いて $e_{H,\theta} := \varphi^{-1}(\tilde{e}_{H,\theta})$ で与えられる ([OY01, Theorem (5.5)]) ので, 我々は Theorem 3.4 の証明で用いられる次の結果を得る.

Lemma 1.4. *Let $e_{H,\theta}$ be a primitive idempotent of $B_{\mathbb{K}}^c(G)$. Then*

$$\varphi_1^{\mathbb{K}}(e_{H,\theta}) = \begin{cases} e_{\theta} & H = 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where e_{θ} is a primitive idempotent of $\mathbb{Z}\mathbb{K}C_G(H)$ (c.f. [NT88, Theorem 2.22]).

2 Idempotents of a p -local crossed Burnside ring

$\mathcal{O}$ は標数 0 の完備離散付値環, その商体 k は標数 $p > 0$ で十分大きい体とする. $\mathcal{O}$ 上の G の斜バーンサイド環 $B_{\mathcal{O}}^{\times}(G)$ の分解を得るために Bouc 理論のいくつかの結果を復習し, Green functors の基本的性質をまとめる.

2.1 Green functors

左 k 加群の圏 $k\text{-mod}$ に値をとる G の **Mackey functor** M は, 有限 G 集合の圏から $k\text{-mod}$ への関手の対 $M = (M_*, M^*)$ で以下の条件を満たすものである:

1. Let X and Y be any finite G -sets, and let i_X (resp. i_Y) denote the canonical injection from X (resp. Y) into $X \sqcup Y$. Then the morphisms

$$(M_*(i_X), M_*(i_Y)) : M(X) \oplus M(Y) \rightarrow M(X \sqcup Y),$$

$$\begin{pmatrix} M^*(i_X) \\ M^*(i_Y) \end{pmatrix} : M(X \sqcup Y) \rightarrow M(X) \oplus M(Y)$$

are mutually inverse isomorphisms.

2. Let

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ b \downarrow & & \downarrow c \\ Z & \xrightarrow{d} & W \end{array}$$

be a pull-back diagram of finite G -sets. Then

$$M_*(b) \circ M^*(a) = M^*(d) \circ M_*(c).$$

G の k 上の **Green functor** A は, G 集合 X と Y と k -bilinear maps $A(X) \times A(Y) \rightarrow A(X \times Y)$ が以下の性質を満たすような G の k 上 Mackey functor A である:

1. If $f : X \rightarrow X'$ and $g : Y \rightarrow Y'$ are morphisms of G -sets, then the squares

$$\begin{array}{ccc} A(X) \times A(Y) & \xrightarrow{\times} & A(X \times Y) \\ A_*(f) \times A_*(g) \downarrow & & \downarrow A_*(f \times g) \\ A(X') \times A(Y') & \xrightarrow{\times} & A(X' \times Y') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A(X) \times A(Y) & \xrightarrow{\times} & A(X \times Y) \\ A^*(f) \times A^*(g) \uparrow & & \uparrow A^*(f \times g) \\ A(X') \times A(Y') & \xrightarrow{\times} & A(X' \times Y') \end{array}$$

are commutative.

2. If X, Y and Z are G -sets, then the square

$$\begin{array}{ccc} A(X) \times A(Y) \times A(Z) & \xrightarrow{\text{id}_{A(X)} \times (\times)} & A(X) \times A(Y \times Z) \\ (\times) \times \text{id}_{A(Z)} \downarrow & & \downarrow \times \\ A(X \times Y) \times A(Z) & \xrightarrow{\times} & A(X \times Y \times Z) \end{array}$$

is commutative, up to identifications $(X \times Y) \times Z \simeq X \times Y \times Z \simeq X \times (Y \times Z)$.

3. If $\bullet$ denotes the trivial G -set of cardinality 1, there exists an element $\varepsilon_A \in A(\bullet)$, is called the *unit* of A , such that for any G -set X and for any $a \in A(X)$

$$A_*(p_X)(a \times \varepsilon_A) = a = A_*(q_X)(\varepsilon_A \times a)$$

denoting by p_X (resp. q_X) the projection from $X \times \bullet$ (resp. $\bullet \times X$) to X .

G 集合 X, Y , $a \in A(X)$ と $b \in A(Y)$ に対して

$$a \times^{op} b = A_*(t)(b \times a) \in A(X \times Y),$$

ただし, t は G 写像 $Y \times X \rightarrow X \times Y; (y, x) \mapsto (x, y)$, とおく. Green functor A の **center** $Z(A)$ を G 集合 X に対して

$$Z(A)(X) = \{a \in A(X) \mid \forall Y, \forall b \in A(Y), a \times b = a \times^{op} b\}$$

と定義する ([Bo97, 12.1]). 関手 $Z(A)$ は A の sub-Green functor と呼ばれるものになる. $e \in Z(A)(\bullet)$ がべき等元であるとき,

$$(e \times A)(X) = e \times A(X) \subset A(X)$$

で A の部分関手 $e \times A$ が定義される. このとき, $e \times A$ は $e = e \times \varepsilon_A \in (e \times A)(\bullet)$ を単位元にもつ A の sub-Green functor となる. 以下, $H \leq G$ に対して, 剰余群 $N_G(H)/H$ を $W(H)$ と書く.

$|G|$ の素因数のうち, 素数 p のみが非可逆元, p 以外はすべて可逆元である環を R とする. R 上の G の Burnside ring $B_R(G)$ の原始べき等元は, Dress により得られている ([Dr69], or [Bo00, Corollary 3.3.6]). G の正規部分群のうち, 剰余群が p 群となる最小のものを $O^p(G)$ と書く. 有限群 J は $O^p(J) = J$ を満たすとき p -**perfect** であると呼ばれる. $C^p(G)$ は G の p -perfect subgroups の共役類のひとつの完全代表系とする. 集合

$$\{f_J^G := \sum_{O^p(H)=GJ, H \in C(G)} e_H^G \mid J \in C^p(G)\}$$

は $B_R(G)$ の原始べき等元の集合である ([Be91, Corollary 5.4.8 (Dress)]).

誘導 Ind_N^G , 膨張 $\text{Inf}_{N/Q}^N$ 等の記法は Bouc のレクチャーノート [Bo97] を参照されたい.

Theorem 2.1. [Bo97, Proposition 12.1.11] *Let R be a ring in which every prime divisor of $|G|$ is invertible, except for p which is not invertible. Let A be Green functor for G over R . Then there are isomorphisms of Green functors*

$$A \simeq \bigoplus_{J \in C^p(G)} f_J^G \times A \quad (2.1)$$

and

$$f_J^G \times A \simeq \text{Ind}_{N_G(J)}^G \text{Inf}_{W(J)}^{N_G(H)} \left(f_1^{W(J)} \times (\text{Res}_{N_G(J)}^G A)^J \right). \quad (2.2)$$

2.2 Dress construction

Bouc により導入された Green functors の Dress 構成法 ([Bo03a]) を要約する. [OY04] でも論じられている.

S は有限 G 集合とする. $M = (M_*, M^*)$ が $\mathbb{k}$ 上の Mackey functor であるとき, 関手 M_S を有限 G 集合 Y に対して,

$$M_S(Y) = M(Y \times S),$$

G 写像 $f: Y \rightarrow Z$ に対して

$$(M_S)_*(f) = M_*(f \times \text{id}_S), \quad (M_S)^*(f) = M^*(f \times \text{id}_S)$$

と定めると M_S は G の Mackey functor となり, 特に $M_S(\bullet) \cong M(S)$ が成り立つ.

モノイド自己同型による G 作用をもつモノイドを G -monoid と呼ぶ. G -equivariant monoid homomorphism を G -monoids の射 という. G モノイド S と射 $\varphi: S \rightarrow G^c$ の対 (S, φ) を斜 G モノイド (**crossed G -monoid**) という.

次の命題のように Green functor A と斜 G モノイド S から Green functor A_S を得る構成法は Dress 構成法と呼ばれている.

Proposition 2.2. [Bo03a] *Let (S, φ) be a crossed G -monoid. If A is a Green functor for G over $\mathbb{k}$, let A_S denote the Mackey functor obtained by the Dress construction from the G -set S . If X and Y are finite G -sets, defined a product map $\times_S: A_S(X) \otimes_{\mathbb{k}} A_S(Y) \rightarrow A_S(X \times Y)$ by*

$$\forall a \in A_S(X), \forall b \in A_S(Y), a \otimes b \mapsto a \times_S b = A(\sigma)(a \times b),$$

where $\sigma: X \times S \times Y \times S \rightarrow X \times Y \times S$ sending (x, s, y, s') to $(x, \varphi(s)y, ss')$. Moreover, denote by ε_{A_S} the element $A_*(f)(\varepsilon_A)$ of $A(S) \cong A_S(\bullet)$, where f is the map sending the unique element of $\bullet$ to the identity element of S . Then A_S is a Green functor for G over $\mathbb{k}$.

2.3 Decomposition of a crossed Burnside ring over p -local ring

X は G 集合とする. $b(X)$ を X 上の G -集合の圏の Grothendieck group とする : a G -set (Y, α) over X is a pair consisting of a finite G -set Y , together with a G -map $\alpha : Y \rightarrow X$, and a morphism of G -sets over X from (Y, α) to (Z, β) is a G -map f from X to Y such that $\beta \circ f = \alpha$ ([Yo90, Section 9], [Bo97, 2.4]). Let (Y, ϕ) be a G -set over X . If $f : X \rightarrow X'$ is a morphism of G -sets, then we put $b_*(Y, \phi) = (Y, f \circ \phi)$. If $f : X' \rightarrow X$ is a morphism of G -sets, then we denote by $b^*((Y, \phi))$ the pull-back (Y', ϕ') of (Y, ϕ) along f , obtained by filling the cartesian square

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{a} & Y \\ \phi' \downarrow & & \downarrow \phi \\ X' & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

If $E = (U, \phi)$ (resp. $F = (V, \psi)$) is a G -set over X (resp. over Y), we denote by $E \times F$ the G -set $(U \times V, \phi \times \psi)$ over $X \times Y$. Then the product $\times$ can be extended by linearity to a product from $b(X) \otimes_{\mathbb{Z}} b(Y)$ to $b(X \times Y)$.

Proposition 2.3. [Bo97, Proposition 2.4.3] *With those notations above, $b = (b_*, b^*)$ is a Green functor for G over $\mathbb{Z}$.*

斜バーンサイド環 $B_{\mathbb{k}}^{\circ}(G)$ を与える Green functor が次のように得られる. G 集合 X に対して $\mathbb{k}b(X) = \mathbb{k} \otimes_{\mathbb{Z}} b(X)$ とおく. 次の命題は Proposition 2.2 から従う.

Proposition 2.4. [Bo03a, Theorem 5.1] *Let $\mathbb{k}b = (\mathbb{k}b_*, \mathbb{k}b^*)$ be the Burnside Green functor for G over $\mathbb{k}$ and $G^c := (G^c, \text{id}_{G^c})$ be the crossed G -monoid. Then $\mathbb{k}b_{G^c}$ is a Green functor for G over $\mathbb{k}$ and $\mathbb{k}b_{G^c}(\bullet) \cong B_{\mathbb{k}}^{\circ}(G)$.*

我々は $\mathbb{O}$ 上の G の斜バーンサイド環 $B_{\mathbb{O}}^{\circ}(G)$ の分解を得る.

Proposition 2.5. *Let R be a ring in which every prime divisor of $|G|$ is invertible, except for p which is not invertible. Let $\{f_J^G \mid J \in C^p(G)\}$ the set of primitive idempotents of $B_R(G)$. Let Rb_{G^c} be the Green functor for G over R . Then there is an isomorphism of Green functors*

$$Rb_{G^c} \simeq \bigoplus_{J \in C^p(G)} f_J^G \times Rb_{G^c} \quad (2.3)$$

and

$$f_J^G \times Rb_{G^c} \simeq \text{Ind}_{N_G(J)}^G \text{Inf}_{W(J)}^{N_G(H)} \left(f_1^{W(J)} \times (\text{Res}_{N_G(J)}^G Rb_{G^c})^J \right). \quad (2.4)$$

In particular, there are ring isomorphisms

$$B_{\mathbb{O}}^{\circ}(G) \cong \bigoplus_{J \in C^p(G)} \iota_G^{\mathbb{O}}(f_J^G) B_{\mathbb{O}}^{\circ}(G) \quad (2.5)$$

and

$$\iota_G^{\mathbb{O}}(f_J^G) B_{\mathbb{O}}^{\circ}(G) \cong \iota_{W(J)}^{\mathbb{O}}(f_1^{W(J)}) B_{\mathbb{O}}^{\circ}(W(J)). \quad (2.6)$$

Proof. Theorem 2.1 と Proposition 2.4 により我々は Green functors の同型 (2.3) と (2.4) を得る. 同型な Green functors の自明な G 集合 (1 点 G 集合) の値を比較して, 環同型 (2.5) と (2.6) が [Bo00] Corollary 5.7.6 から得られる. $\square$

$\iota_G^{\mathbb{O}}(f_1^G)e = e$ を満たすすべての原始べき等元 $e \in B_{\mathbb{O}}^{\circ}(G)$ を含む Bouc の $\mathbb{O}$ -代数を

$$A(G) := B_{\mathbb{O}}^{\circ}(G) \iota_G^{\mathbb{O}}(f_1^G)$$

とおく ([Bo03b, 3.2.3]). 彼は $\mathcal{A}(G)$ のすべての原始べき等元を決定した ([Bo03b, 3.2.11]). それらは, ZkG の p -blocks でインデックス付けされている. p ブロック $i \in ZkG$ に対応する $\mathcal{A}(G)$ の原始べき等元を i_G と書く. Proposition 2.5 の (2.5) から我々はイデアルの直和分解

$$B_0^e(G) \cong \bigoplus_{J \in \mathcal{C}^p(G)} \mathcal{A}(W(J))$$

を得る. 集合

$$\{i_{W(J)} \in \mathcal{A}(W(J)) \mid J \in \mathcal{C}^p(G), i \in ZkW(J) : p\text{-block}\}$$

は $B_0^e(G)$ の原始べき等元全体の集合である. さらに, 我々は, $B_0^e(G)$ の原始べき等元の和としての表示

$$1 = \sum_{J \in \mathcal{C}^p(G), i \in ZkW(J) : p\text{-block}} i_{W(J)} \quad (2.7)$$

を得る. $\mathcal{A}(W(J))$ ($J \in \mathcal{C}^p(G)$) の構成により, 我々は以下の補題を得る.

Lemma 2.6. *Let $i_{W(J)}$ be a primitive idempotent of $B_0^e(G)$, for $J \in \mathcal{C}^p(G)$ and p -block $i \in ZkW(J)$. Then*

$$\varphi_1^\emptyset(i_{W(J)}) = \begin{cases} i & J = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

3 Images of a motivic decomposition by pseudo-functor $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$

Mackey 2-motives の $\mathbb{k}$ -linear bicategory $\underline{\mathbf{Mack}}_{\mathbb{k}} := (\mathbb{k}\widehat{\mathbf{Span}}^{\text{rf}})^{\flat}$ (see [BD21, Recollection 2.2]) から *cohomological Mackey 2-motives* の $\mathbb{k}$ -linear bicategory $\underline{\mathbf{Mack}}_{\mathbb{k}}^{\text{coh}} := (\text{biperm}_{\mathbb{k}}^{\text{rf}})^{\flat}$ (see [BD21, Definition 4.18]) への擬関手 (*pseudo-functor*) $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ に関する結果を復習する. Balmer と Dell'Ambrogio は以下の定理を証明した.

Theorem 3.1. [BD21, Theorem 5.3] *For every finite group G , there is a well-defined surjective morphism of commutative rings $\rho_G : B_{\mathbb{k}}^e(G) \rightarrow Z(\mathbb{k}G)$ sending a basis element $[H, a]_G$ to $\sum_{x \in [G/H]} x a$. The pseudo-functor $\mathcal{P}_{\mathbb{k}}$ maps the general Mackey 2-motive $\oplus_i (G_i, e_i)$ to the cohomological Mackey 2-motive $\oplus_i (G_i, \rho_{G_i}(e_i))$, where $(G, 0) \cong 0$ in both bicategories.*

Remark 1. The ring homomorphism ρ_G above is same as φ_1 in [OY01, (4.2)] and z_1 in [Bo03b, 2.3.1]. The map ρ_G is not only a surjective ring homomorphism, but also essentially a special case of the homonymous one studied in [BD20, CH. 7.5].

$\mathbb{k} = \mathbb{Z}$ のとき, 我々は Balmer と Dell'Ambrogio による Theorem 3.1 の精密化が下記のように得られる.

Theorem 3.2. *For every finite group G , the pseudo-functor $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ maps the Mackey 2-motive*

$$G \simeq (G, \overline{f}_1^G) \oplus (G, \overline{f}_{J_2}^G) \oplus \cdots \oplus (G, \overline{f}_{J_m}^G) \quad (3.1)$$

to the cohomological Mackey 2-motive

$$G \simeq (G, \rho_G(\overline{f}_1^G)) \oplus (G, \rho_G(\overline{f}_{J_2}^G)) \cdots \oplus (G, \rho_G(\overline{f}_{J_m}^G)) \quad (3.2)$$

$$\simeq (G, 1) \oplus (G, 0) \oplus \cdots \oplus (G, 0) \quad (3.3)$$

$$\simeq (G, 1), \quad (3.4)$$

where $\{1, J_2, \dots, J_m\} = \mathcal{C}^\infty(G)$.

Proof. [BD20, 7.5.4] のモチーフ的分解の議論と Theorem 1.2 により, 我々は同値 (3.1) を得る. 残りの cohomological Mackey 2-motive の同値は [BD21, Theorem 5.8] と Corollary 1.3 から得られる. $\square$

Example 3.3 (Alternating group A_5). G を 5 交代群 A_5 とする. $C^\infty(G) = \{1, G\}$ となるので, Theorem 1.2 より $\{\overline{f}_1^G, \overline{f}_G^G\}$ が $B^c(G)$ の原始べき等元全体の集合となる. さらに, 例 [OY01, 6.5 (F)] により我々は, 原始べき等元たちを明示的に決定することができる:

$$\overline{f}_1^G = [A_4, \epsilon] + [D_{10}, \epsilon] + [S_3, \epsilon] - [C_3, \epsilon] - 2[C_2, \epsilon] + [1, \epsilon], \quad (3.5)$$

$$\overline{f}_G^G = [A_5, \epsilon] - [A_4, \epsilon] - [D_{10}, \epsilon] - [S_3, \epsilon] + [C_3, \epsilon] + 2[C_2, \epsilon] - [1, \epsilon]. \quad (3.6)$$

指数を計算して $\rho_G(\overline{f}_1^G) = 1$ と $\rho_G(\overline{f}_G^G) = 0$ が成立することがわかる. したがって, Theorem 3.2 より擬関手 $\mathcal{P}_Z$ は Mackey 2-motive

$$G \simeq (G, \overline{f}_1^G) \oplus (G, \overline{f}_G^G) \quad (3.7)$$

を cohomological Mackey 2-motive

$$G \simeq (G, \rho_G(\overline{f}_1^G)) \oplus (G, \rho_G(\overline{f}_G^G)) \quad (3.8)$$

$$\simeq (G, 1) \oplus (G, 0) \quad (3.9)$$

$$\simeq (G, 1) \quad (3.10)$$

にうつすことがわかる.

$\mathbb{K}$ は標数 0 の十分大きい体とする. $\text{Irr}(\mathbb{K}G)$ は G のすべての既約指標の集合とする. 次の定理は, Lemma 1.4 を用いることにより, $\mathbb{K} = \mathbb{K}$ の場合に [BD21, Theorem 5.3] の精密化を与えている.

Theorem 3.4. *For every finite group G , the pseudo-functor $\mathcal{P}_\mathbb{K}$ maps the Mackey 2-motive*

$$G \simeq \bigoplus_{H \in C(G), \theta \in \text{Irr}(\mathbb{K}C_G(H))} (G, e_{H, \theta}) \quad (3.11)$$

to the cohomological Mackey 2-motive

$$G \simeq \bigoplus_{H \in C(G), \theta \in \text{Irr}(\mathbb{K}C_G(H))} (G, \rho_G(e_{H, \theta})) \quad (3.12)$$

$$\simeq \bigoplus_{\theta \in \text{Irr}(\mathbb{K}G)} (G, \rho_G(e_{1, \theta})) \quad (3.13)$$

$$\simeq \bigoplus_{\theta \in \text{Irr}(\mathbb{K}G)} (G, e_\theta). \quad (3.14)$$

$\mathbb{O}$ は標数 0 の完備離散付値環, 商体 k は標数 $p > 0$ の十分大きい体とする. 次の定理は, Lemma 2.6 は $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ の場合に [BD21, Theorem 5.3] の精密化を与えている.

Theorem 3.5. *For every finite group G , the pseudo-functor $\mathcal{P}_\mathbb{O}$ maps the Mackey 2-motive*

$$G \simeq \bigoplus_{J \in C^p(G), i \in \text{Zk}W(J) : p\text{-block}} (G, i_{W(J)}) \quad (3.15)$$

to the cohomological Mackey 2-motive

$$G \simeq \bigoplus_{J \in C^p(G), i \in \text{Zk}W(J) : p\text{-block}} (G, \rho_G(i_{W(J)})) \quad (3.16)$$

$$\simeq \bigoplus_{i \in \text{Zk}W(1) : p\text{-block}} (G, \rho_G(i_{W(1)})) \quad (3.17)$$

$$\simeq \bigoplus_{i \in \text{Zk}G : p\text{-block}} (G, i). \quad (3.18)$$

参考文献

- [BD20] P. Balmer, I. Dell’Ambrogio, Mackey 2-Functors and Mackey 2-Motives (Ems Monographs in Mathematics), 2020.
- [BD21] P. Balmer and I. Dell’Ambrogio. Cohomological Mackey 2-functors. Preprint, 2021.
- [Be91] D. J. Benson. *Representations and Cohomology, Vol. I, Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*. Cambridge Stud. Adv. Math., 30, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [Bo97] S. Bouc. Green functors and G -sets. Lecture Notes in Mathematics, **1671** Springer-Verlag, Berlin, 1997. viii+342 pp.
- [Bo00] S. BOUC. Burnside rings, In Handbook of algebra **2**, pp.739–804, Elsevier, (2000).
- [Bo03a] S. Bouc. Hochschild constructions for Green functors. Comm. Algebra 31 (2003), no1, 403 – 436.
- [Bo03b] S. Bouc. The p -blocks of the Mackey algebra. Algebr. Represent. Theory, 6(5):515–543, 2003.
- [Bu1911] W. Burnside. Theory of groups of finite order.
<https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/otherpapers/burnside1911.pdf>
- [Bu55] W. Burnside. Theory of groups of finite order. 2d ed. Dover Publications, Inc., New York, 1955. xxiv+512 pp.
- [Dr69] A. Dress. A characterisation of solvable groups. Math. Z., 110:213–217, 1969.
- [Gl81] D. Gluck. Idempotent formula for the Burnside ring with applications to the p -subgroup simplicial complex, Illinois J. Math. **25** No.1 (1981) 63–67.
- [MS02] C. P. Milies, S. K. Sehgal. An introduction to group rings. Algebra and Applications, 1. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [NT88] H. Nagao, Y. Tsushima. *Representations of Finite Groups*. Academic Press, New York, 1988.
- [OY01] F. Oda, T. Yoshida. Crossed Burnside rings. I. The fundamental theorem. J. Algebra, 236(1):29–79, 2001.
- [OY04] F. Oda, T. Yoshida. Crossed Burnside rings. II. The Dress construction of a Green functor. *J. Algebra*, **282** (2004), no. 1, 58–82.
- [OTY] F. Oda, Y. Takegahara, T. Yoshida. Crossed Burnside rings and cohomological Mackey 2-motives. arXiv:2201.04744.
- [Yo83] T. Yoshida. Idempotents of the Burnside rings and Dress induction theorem, J. Algebra **80** (1983) 90–105.
- [Yo90] T. Yoshida. The generalized Burnside ring of a finite group, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.
- [Yo97] T. Yoshida. Crossed G -sets and crossed Burnside rings. Group theory and combinatorial mathematics (Japanese) (Kyoto, 1996). Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku, bf 991 (1997), 1–15.