

Local Dynamical Systems and Their Isomorphisms

神戸大理 浦 太郎

§0. 序

この講演の目的は *local dynamical systems* (*local systems* と略称) について得られた結果を, *category theory* の見地から, 述べることである. 述べられるべき結果は, 勿論この見地から意味を持つものに限定されるが, 特にここでは私のグループ・木村有雄, 江川治朗, O. Hájek, D. H. Carlson, R. C. McCann, 池上宜弘によって得られたものと, それに関連したものとに限定する.

Local systems の意味は後にのべる. まず *categories* について説明する.

一つの *category* C は 二つの *classes*, $\text{Obj } C$ と $\text{Mor } C$ とから構成される.

$$\text{Mor } C = \sum \{ H_C(A, B) \mid A, B \in \text{Obj } C \}$$

と直積に分解される。

$f \in H_c(A, B)$ のとき $A = Df$ と f の domain
 $B = Rf$ と f の range といい、また $f: A \rightarrow B$ とお
 かく、

$$H_c(A, B) \times H_c(B, C) \longrightarrow H_c(A, C)$$

が定義され $(f, g) \mapsto g \circ f$ と表わされる。

$$(C1) \quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$(C2) \quad \forall A \in \text{Obj } C, \quad \exists i_A \in H_c(A, A) \Rightarrow$$

$$\forall f \in H_c(A, B) \quad f \circ i_A = f$$

$$\forall g \in H_c(B, A) \quad i_A \circ g = g.$$

この要素 i_A を identity of A といふ。

$\text{Obj } C$ の要素を object, $\text{Mor } C$ の要素を
 morphism といふ。

定義 $f \in H_c(A, B)$ の isomorphism とある $\Leftrightarrow$

$$\exists g \in H_c(B, A), \quad g \circ f = i_A, \quad f \circ g = i_B.$$

この g を f^{-1} とかく。

A, B を $\Rightarrow$ の categories とする。 T の $A \rightarrow B$
 の functor とあるといふ。 T is

$$\text{Obj } A \rightarrow \text{Obj } B \quad f \mapsto f \text{ の写像}$$

$$(A \in \text{Obj } \mathcal{A}) \mapsto B (= T(A) \in \text{Obj } \mathcal{B})$$

と、すべての pair $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ に対する写像

$$H_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) \rightarrow H_{\mathcal{B}}(T(A_1), T(A_2))$$

$$(f \in H_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)) \mapsto g (= H_{\mathcal{B}}(T(A_1), T(A_2)) \\ = T(f))$$

とからなりたち

$$(T1) \quad f \in H_{\mathcal{A}}(A_1, A_2), \quad g \in H_{\mathcal{A}}(A_2, A_3)$$

$$\Rightarrow T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$$

$$(T2) \quad \forall A \in \text{Obj } \mathcal{A}, \quad T(i_A) = i_{T(A)}$$

が成立することである。

(Covariant functor とする)

$\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を ∞ の categories とする。

$$\text{Obj } \mathcal{A}' \subset \text{Obj } \mathcal{A}, \quad \text{Mor } \mathcal{A}' \subset \text{Mor } \mathcal{A}$$

とすると、これによって定義される inclusion maps

が functor $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ であること、 $\mathcal{A}'$ は $\mathcal{A}$ の

subcategory であること。

Dynamical systems の categorical な取扱を、はっきりと提唱したのは Hayek [16] が最初であると思ふ。勿論それ以前にも実質的に categorical な取扱がな

されているが ([5] 参照), 意識的にこの立場から, 結果を出したのは Uta [27] が最初であると思う.

Local Systems を categorical に扱うに当たって, まず, 第一の問題にするのは, 如何なる morphisms を与えるかということである. ここでは数種ある morphisms を導入して, それに応じた categories の間の functors の議論を行なう. 第二は導入された categories が実用上どんな意味をもつかを示すことである. 最後にある sub-categories において universal object の存在の問題を解決する.

さらに数種ある morphisms を与えると述べたが, ここでは特殊な monomorphisms (あるいは embeddings) のみに議論は限定される. 本質的には isomorphisms を与えていないが, universal objects の理解のためには embeddings への拡張は是非必要である.

§1. Local Dynamical Systems.

定義 (X, D, π) が local (dynamical) system である, または, π は D を定義域とする相空間 X の上の loc. dyn. syst. である $\xLeftrightarrow{d}$

X : 位相空間

$$D = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times I_x, \quad I_x (\ni 0) \text{ 区間}$$

(D の位相は $X \times \mathbb{R}$ の subspace 位相)

(LD, -1) $\forall x \in X, I_x$ は open interval $(= (a_x, b_x))$

(LD, 0) D は open in $X \times \mathbb{R}$.

(LD, 1) $\forall x \in X, \pi(x, 0) = x$

(LD, 2) $(x, t) \in D, (x, t+s) \in D, (\pi(x, t), s) \in D$

$$\Rightarrow \pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t+s)$$

(LD, 3) π は continuous in D .

(LD, 4) $x \in X, b_x < \infty \Rightarrow L^+(x) = \emptyset$

$$a_x > -\infty \Rightarrow L^-(x) = \emptyset$$

ただし, $L^+(x)$ は $t \uparrow b_x$ に沿った写像 $\pi(x, \cdot)$ の cluster set である.

$D = X \times \mathbb{R}$ のときは古典的な dynamical system である. ここでは, global (dynamical) system という 1 語をもって global system は local syst. の特別の場合である. $D \neq X \times \mathbb{R}$ の時, 特には $\neq$ を強調するときには, strictly local という.

一般的には local system は autonomous syst of diff. equations の abstraction である. 17.1

最近では nonautonomous systems (= 非自律系) も応用 があること [27], さらに極めて一般的な Volterra 型方程式 (= 積分方程式) も応用 があることが示された [24], [3]. 特にこの場合に注意されることは, phase space X が nonmetrizable であることである.

(X, D, π) を local system とする. $M \subset X$ とする. $x \in M$ に対して $\pi(x, I'_x) \subset M$ となる, 最大区間 I'_x が存在する.

$$D_M = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times I'_x$$

とある, $\pi|_{D_M}$ を $\pi|_M$ とかく, $(M, D_M, \pi|_M)$

は一般には (LD) を満たすかどうかはわからない.

定義 $M \subset X$ に対して $(M, D_M, \pi|_M)$ が local system になる場合, M は admissible である.

定義 $\emptyset \neq M \subset X$ のとき, $\forall x \in M, \pi(x, I'_x) \subset M$

$$\iff M \text{ is } \pi\text{-invariant}$$

$$M \text{ is } \pi\text{-inv. } \forall x \in M, I'_x = R \iff M \text{ inv.}$$

定理 $M \subset X$,

$$M \text{ open and } M \text{ } \pi\text{-inv.} \implies M \text{ admissible}$$

定義 Self intersecting points ($P = P_n$)
 Singular points ($S = S_n$)
 (省略)

§2. Morphisms of Local Systems

(X, D, π) (Y, E, ρ) $\Rightarrow$ local systems

とある $E = \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times I_y$, $I_y = (c_y, d_y) \ni 0$

と notation をきめておこう.

一般に (X, D, π) に對して, $x \in X$ に對して

$$C_\pi(x) = \pi(x, I_x)$$

を x の orbit とする.

$$C_\pi: X \longrightarrow 2^X$$

がある

定義 $h: X \longrightarrow Y$ homeomorphism

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2^X & \xrightarrow{h} & 2^Y \end{array} \text{ commutes}$$

$\Leftrightarrow h: \pi \rightarrow \rho$ N.S.-isomorphism.

定理 N.S.-isomorphisms は category theory の

意味に isomorphism である.

一般に $h: X \rightarrow Y$ map

$\varphi: R \rightarrow R$ map

または一般に $\varphi: X \times R \rightarrow R$ map

るとき (h, φ) 2

$$(x, t) \mapsto (h(x), \varphi(x, t))$$

によって定義される map $X \times R \rightarrow Y \times R$

を表わすことにする。

まず global systems $(X, \pi), (Y, \rho)$ を与える

$$X \times R \xrightarrow{(h, \varphi)} Y \times R$$

$$\downarrow \pi$$

$$X$$

$$\xrightarrow{h}$$

$$Y$$

$$\downarrow \rho$$

定義を子える。

commutes : 上の条件の下で、次の様に

$$h: X \rightarrow Y$$

は常に homeomorphism とする

(h, φ) : type 0-iso

$\Leftrightarrow \varphi: R \rightarrow R$ は R continuous field
と h との isomorphism

$$(\Leftrightarrow \varphi(t) = t)$$

(h, φ) : type 1-iso.

$\Leftrightarrow \varphi: R \rightarrow R$ は R continuous ~~field~~ ^{group} ~~field~~ ^{group} ~~field~~ ^{group}
と h との isomorphism

$$(\Leftrightarrow \exists c \neq 0, \varphi(t) = ct)$$

(h, φ) : type 2-iso

$\Leftrightarrow \varphi: X \times R \rightarrow R$ は, $(X \times R, \pi), (Y \times R, \rho)$
 の vector bundles であるとき (h, φ) による
 isomorphism であるような写像

$$\left(\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists c: X \rightarrow R \text{ (continuous)} \\ &\quad \varphi(x, t) = c(x) \cdot t \end{aligned} \right)$$

(h, φ) : type 3-iso

$\Leftrightarrow \varphi: X \times R \rightarrow R$ は $(X \times R, \pi), (Y \times R, \rho)$
 の product bundles であるとき, (h, φ)
 による isomorphism であるような写像 ($\varphi(x, 0) = 0$)

$$\left(\begin{aligned} &\Leftrightarrow \varphi \text{ continuous かつ} \\ &\quad \varphi_x: R \rightarrow R \text{ homeo かつ } \varphi_x(0) = 0. \end{aligned} \right)$$

type 2 と type 3 ならば $\varphi: X \times R \rightarrow R$

continuous である。

Continuity を 全く 仮定しないときは type 2.5, type 3.5 となる。

Continuity を $(X - \emptyset) \times R$ のみに 仮定するときは

type 2.25, type 3.25 となる。

Type 3.5-iso の形 $E \rightarrow F$ として, local systems (X, D, π)
 (Y, E, ρ) に対して 次の $\downarrow$: 変形 する.

$$D^* = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times I_x^* \quad E^* = \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times J_y^*$$

$$\forall x \in X \quad I_x^* \supset I_x \quad \forall y \in Y \quad J_y^* \supset J_y$$

$h: X \rightarrow Y$ homeomorphism

$\varphi: D^* \rightarrow R$

$$\forall x \in X \quad \varphi_x: I_x^* \rightarrow J_{h(x)}^* \text{ homeo. } \varphi_x(0) = 0$$

とすると $(h, \varphi): D^* \rightarrow E^*$ であるから

$$\begin{array}{ccc} D^* & \xrightarrow{(h, \varphi)} & E^* \\ \cup & & \cup \\ D & & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \rho \\ X & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

が意味のあるかぎり, h の $\downarrow$:

$$h \circ \pi(x, t) = \rho(h(x), \varphi(x, t))$$

の右辺が意味のあるかぎり成立するものとする.

定理 上の仮定をあと $\forall x \in X, \varphi_x(I_x) = J_{h(x)}$

かくて, (h, φ) の D への restriction を $\text{res}(h, \varphi)$

とあらわせば,

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{(h, \varphi)} & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \rho \\ X & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

commutes が $\frac{E}{I_x}$ となる

定義 上にのべた (h, φ) を GH-iso もしくは
 type 4.5 iso とする。特に $D^* = X \times R$, $E^* = Y \times R$
 のとき type 3.5 iso とする

local systems の type 3.5 iso は global syst.
 の type 3.5 iso. であることは直ちにわかる。あとは
 φ の continuity と形によって, type 4.25,
 type 4, type 3.25, type 3. ... が local syst.
 になることも定義されることは容易であろう。ただし
 continuity は D^* ではなく D の上でだけ議論する

(h, φ) が D^* を E にうつすことがわかって
 いるから, 一度, type 4.5 の type 3.5 ののせいで
 できれば, D^* , E^* は忘れてよい。問題は D, E で
 与えられたとき φ_2 が homeo のまま $R \rightarrow R$ に
 拡張できるかどうかである。前に述べた定理より

定理 (X, D, π) , (Y, E, ρ) が type 3.5-iso なら,
 一方が global ならば他方も global である。

いえることは π が strictly local, ρ が
 global (もしくはその反対) ならば $\pi(h, \varphi): \pi \rightarrow \rho$
 が GH-iso であるならば その type は ≥ 4 である。

便宜的に h : identity $X \rightarrow Y$
 $\forall x \in X$ φ : identity $R \rightarrow R$

τ (h, φ) なる GH-iso ならば, (h, φ) は $\text{type}(-1)$ であること。
 $\text{type}(-1)^{-\text{iso}}$ は categorical
 な意味で identity である。

既に iso という言葉を使っている, したがって categorical
 な意味で isomorphism である,

$$\text{Obj } C = \{ \text{local systems} \}$$

$$\text{Mor } C = \{ \text{GH-iso} \}$$

~~fixed n, m に対する~~ Category である。

category である。 ($\text{Mor } C \in \text{type } n \cdot m^{-\text{iso}}$ である)
 subcategory である。

$$\begin{aligned} \text{定義} \quad \text{Obj } C &= \text{Obj } C' = \{ \text{local systems} \} \\ \text{Mor } C &= \{ \text{GH-iso} \}, \quad \text{Mor } C' = \{ \text{NS-iso} \} \end{aligned}$$

$$T: C \rightarrow C' \in$$

$$T(\pi) = \pi, \quad T((h, \varphi)) = h$$

である T は functor である。

$$\text{定義} \quad h: X \rightarrow Y \text{ homeomorphism}$$

$$h(X) \text{ admissible w.r. to } p$$

$$h: \pi \rightarrow p \parallel_{h(X)} \text{ NS-iso} \cdot \xrightarrow{\sim} h: \pi \rightarrow p \text{ NS-embedding}$$

$$(h, \varphi): \pi \rightarrow p \parallel_{R(X)} \xrightarrow{(GH)} \begin{matrix} \text{type } n \text{ iso} \\ \text{type } n \text{ embedding} \end{matrix} \Leftrightarrow (h, \varphi): \pi \rightarrow p$$

$$\text{Obj } C = \text{Obj } C' = \{ \text{local systems} \}$$

$$\text{Mor } C = \{ GH\text{-emb} \} \quad \text{Mor } C' = \{ \text{ONS-emb} \}$$

$$T: \pi \mapsto \pi$$

$$(h, \varphi) \mapsto h$$

$$\Rightarrow T \text{ functor. } C \rightarrow C'$$

§3. Kimura-Uchi's Theorems.

定理 $(X, D, \pi), (Y, E, \rho)$ local systems,
 $h: \pi \rightarrow \rho$ NS-iso.

X (under π) $\rightarrow Y$: T_1 space

$$\Rightarrow \exists \varphi (h, \varphi): \pi \rightarrow \rho \text{ GH-iso.}$$

φ is D - $S \times R$ is unique and is in $S \times R$ is

定式化.

定理 $(X, D, \pi), (Y, E, \rho)$ local systems

$$(h, \varphi): \pi \rightarrow \rho \text{ type 4.5 and type 3.5 iso.}$$

X Hausdorff (T_2) $\Rightarrow (h, \varphi)$ type 4.25 and type

3.25 2'あり

系 $(X, D, \pi), (Y, E, \rho)$ local systems $h: \pi \rightarrow \rho$ NS-iso, X : Hausdorff $\Rightarrow \exists \varphi \ni (h, \varphi)$ type 4.25-iso.特に π, ρ Σ に global π なら $\exists \varphi \ni (h, \varphi)$: type 3.25-iso.この φ は $D - S_\pi \times R$ 2' unique, $S_\pi \times R$ には φ はない.

Categorical version.

 $\text{Obj } C = \text{Obj } C' = \{ T_1 \text{ space 上の local system } \}$ $\text{Mor } C = \{ \text{Obj } C \text{ の GH-iso } \}, \text{Mor } C' = \{ \text{Obj } C \text{ の NS-iso } \}$ $\Rightarrow \exists \text{ functor } T': T' \circ T = \text{identity } C' \rightarrow C$ $\text{Obj } C = \text{Obj } C' = \{ T_2 \text{ space 上の local system } \}$ $\text{Mor } C = \{ \text{Obj } C \text{ の type 4.25 iso } \}, \text{Mor } C' = \{ \dots \text{ の NS-iso } \}$ $\Rightarrow \exists \text{ functor } T': T' \circ T = \text{identity } C' \rightarrow C$ $\text{Obj } C = \text{Obj } C' = \{ T_2 \text{ space 上の singular pt. free } \}$
local systems $\text{Mor } C = \{ \text{Obj } C \text{ の type 4 iso } \}, \text{Mor } C' = \{ \dots \text{ の NS-iso } \}$ $\Rightarrow \exists T^{-1}$

(以上: ある functor T は $T: \pi \rightarrow \pi$, $T: (h, g) \rightarrow h$).

定理 (Vinograd's Theorem の拡張) (Carlson [11])

(X, D, π) local system, X : metric space

$\Rightarrow \exists (X, \rho)$ global system $\ni (\exists g \ni (\forall x \in X$
 $\rho_x \text{ increasing}))$

(identity, g): type 4 iso $\pi \rightarrow \rho$

Vinograd's Theorem は [5] に 7 次の形に述べられて

いる。

$X \subset \mathbb{R}^n$ open set, π : autonomous system
 of diff. equations (local Lipschitzian) に対する定めた
 local system

$\Rightarrow \exists (\mathbb{R}^n, \rho) \ni \rho$

$h(X \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ inclusion map})$

is an NS-embedding

ρ : autonomous syst of global syst.

しかし証明を讀めば上の形の内容をもっていることがわ

る。

少しの意味に解釈するとき, C^∞ manifold (finite
 dimensional, separable) 上の C^r local systems
 に対して ρ は C^r の条件で Vinograd's Theorem が成り
 立つことも示される(池上 [18]).

§4 Some Applications

定義 E を topological space とする。すべての $\xi \in E$ に対して, 0 を含む open interval I_ξ が与えられていて, $X_p = \bigcup_{\xi \in E} \{\xi\} \times I_\xi$ は $X \times \mathbb{R}$ の中で open であるとする。 $D_p = \bigcup_{(\xi, \tau) \in X_p} (\xi, \tau) \times (I_\xi - \tau)$

とあって π_p を $((\xi, \tau), t) \mapsto (\xi, \tau + t)$ で定義すると, π_p は local system になる。この π_p を local parallel flow on X_p という。 $\forall \xi \in E, I_\xi = \mathbb{R}$ ならば, π_p は global system になる。そのときには π_p は (global) parallel flow という。Strictly local parallel flow の意味は容易に理解される。

定義 (X, D, π) を与えられた local system とする。Local parallel flow π_p が存在して, π が π_p と type- n isomorphic なときは, π は locally type- n parallelizable (on X) という。特に π_p が global parallel flow のときは, π は globally type- n parallelizable (on X) であるという。

π が strictly local system で globally type- n parallelizable ならば, $n \geq 4$ ならば π は π_p になる。

定理 [30].

Locally type 0 parallelizable

$$\Leftrightarrow \text{l. type 1 } p. \Leftrightarrow \text{l. type 2 } p.$$

$$\Leftrightarrow \text{l. type 3 } p.$$

Globally type 0 parallelizable

$$\Leftrightarrow \text{g. type 1 } p \Leftrightarrow \text{g. type 2 } p.$$

$$\Leftrightarrow \text{g. type 3 } p.$$

(X is Hausdorff ならば) ならば

$$\text{l. type 3 } p \Leftrightarrow \text{l. type 3.5 } p \Leftrightarrow \text{l. NS-} p.$$

$$\text{g. type 3 } p \Leftrightarrow \text{g. type 3.5 } p \Leftrightarrow \text{g. NS-} p$$

はあきらかである。

定理 [13] Phase space X is completely regular ならば,

x is wandering pt. であるならば

$$\Leftrightarrow \exists U: \text{quasi-invariant neighborhood of } x$$

$$\Rightarrow \pi|_U \text{ locally type 0 parallelizable}$$

定理 [13], [15]. Phase space X is locally compact, paracompact であるならば,

$$\pi \text{ is dispersive} \Leftrightarrow \pi \text{ is locally type 0 } p.$$

定理 [13] X is metrizable space である場合には,

π is strictly local であるならば, 上記の定理の条件

をそれぞれ globally type 4 parallelizable とかえ

ることが出来る。

この最後の定理は X : metric の仮定は必要である。

X : completely regular, separable, the 1st countability の仮定でも定理が成立しない例を作ることが出来る [13].

このことは、同じ仮定では Vinograd's Theorem が成立しないことも示す。

GH-iso, NS-iso の概念を localize することは容易である。その基礎は open set は常に admissible であることである。一点における parallelizability, 一つの軌道における parallelizability condition は上記定理と類似した形 (x : regular; x : $\pm$ Poisson unstable) で与えられる [27] [28].

Local isomorphism のもう一つの成功した応用例は Poincaré center の分類である。Poincaré center はその点に localize した global system と考えればよいから, type 4 ~ は現われない。すべての Poincaré center は locally: NS-iso. である。L. E. D. の Kimura Ueda's Theorems によれば, 常に type 3 25 isomorphic である。しかも, type 2 25 になることは証明される。

type 2 iso であるための必要+条件が得られていると
 同時に $(\text{type } 2.25 \wedge \neg \text{type } 2)$, $(\text{type } 2 \wedge \neg \text{type } 1)$,
 $(\text{type } 1 \wedge \neg \text{type } 0)$, $(\text{type } 0)$ の各 examples
 が与えられる. [22]. 同じ方向の研究は Bendixson
 centers (center-foci) にも行なわれるが, 得られている
 結果は NS-iso (tho not type 2.25-iso) のための条件
 だけである [23].

§ 5. Universal Dynamical Systems

C を $\text{Obj } C$ から local systems からなるようなある
 category とする

$(\exists p \in \text{Obj } C) \forall \pi \in \text{Obj } C, \exists f \in \text{Mor } C \rightarrow f: \pi \rightarrow p$
 のとき p を C の universal (dynamical) system
 という. そのような C と p とを求めることが問題
 であるが, $\text{Obj } C$ はできるだけ大きく, $\text{Mor } C$ は
 できるだけ小さくすることが望ましい.

古典的な結果は次のものである

定理 [5]

$\text{Obj } C \ni \pi \iff \pi$ は metric separable space

上の global type 0 p flow

$\text{Mor } C \ni (h, \varphi) \iff$ 上の objects の間の type 0 emb.

に対して $\sum \xi_n^2$ conv. な列 $\{\xi_n\}$ 全体の Hilbert space 上の parallel flow は universal system である.

この定理は次の様に拡張される

定理

$\text{Obj } C \ni \pi \iff \pi$ は separable metric space 上の local parallel flow

$\text{Mor } C \ni (h, \varphi) \iff C$ の objects の間の type 0 embedding

に対して上の定理の universal system はやはり universal である.

もう一つの古典的な定理は Bebutov [6], [7] によるものがあるが, 最近 角谷 [19] Hajek [17] によって拡張された

定理

$\text{Obj } C \ni \pi \iff \pi$ は locally compact separable metric space 上の S_π が R^N の closed set と ~~homeo~~ ^{homeo} である ~~global system~~, S_π は $C(R, R^N)$ の shift transformation group ($(t \mapsto \pi_t \cdot f)$)

$\text{Mor } C \ni (h, \varphi) \iff C$ の objects の間の type 0 embedding

に於いて π_0 は universal である。

Carlson による Vinograd's Theorem の拡張を述べた。

定理

$\text{Obj } C \ni \pi \iff \pi$ は locally compact separable
metric space 上の S_π から R^N の
closed set に homeo である
local system, 且つは上記 π_0

$\text{Mor } C \ni (h, \varphi) \iff C$ の objects の間の
type 4 embedding である
 $\forall x \in X, \varphi_x$ increasing であるもの

に於いて π_0 は universal である。

最近得られた, この方向の最も有力な結果は Carlson
によるものである。集合 C_V を次の様に定義する

$$C_V \ni \phi \iff \begin{aligned} (1) & \quad \phi \in C(R^2, R) \\ (2) & \quad |\phi(x_1, x_2)| \leq e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} \\ (3) & \quad \phi(x_1, x_2) e^{\pm \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} \rightarrow 0 \\ & \quad \text{as } (x_1^2 + x_2^2) \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

C_V に次の様に metric を与える

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sup \left| e^{\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} (\phi_1(x_1, x_2) - \phi_2(x_1, x_2)) \right|$$

つまり

$$\begin{aligned}
 p_0 : C_V \times R &\longrightarrow C_V \\
 \varepsilon \quad (\phi, t) &\longmapsto \psi \\
 \psi : R^2 &\longrightarrow R \\
 (x_1, x_2) &\longmapsto e^{(x_1+x_2)t+t^2} \phi(x_1+t, x_2+t)
 \end{aligned}$$

と定義する. p_0 は C_V 上の global system である
定理 [10].

$\text{Obj } C \ni \pi \xLeftrightarrow{d} \pi$ は separable metric space
上の global system

$\text{Mor. } C \ni (h, \varphi) \xLeftrightarrow{d} C$ の objects 間の type 0
embedding.

与る C に対して p_0 は universal である.

この定理に対して π と $\overline{\pi}$ と同様, objects は local
embedding, morphisms は type 4 increasing
embedding embedding であるならば, p_0 は π に対する universal
である.

References

Books

- [1] N. P. Bhatia and G. P. Szegő; Dynamical Systems: Stability Theory and Applications, Lecture Notes in Mathematics, 35, Springer-Verlag, Berlin 1967
- [2] W. H. Gottschalk and G. A. Hedlund; Topological Dynamics, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1955
- [3] R. K. Miller and G. R. Sell; Volterra Integral Equations and Topological Dynamics, Memoirs of the Amer. Math. Soc., 102, 1970
- [4] J. Milnor; Differential Topology, Lecture Notes, Princeton University Press, Princeton N. J., 1958
- [5] v.v. Nemytskii; Topological Problems of the Theory of Dynamical Systems, Translated from Usp. Mat. Nauk (N.S.) 4, no. 6, 34 (1949), 1-153. Translation no. 103, Amer. Math. Soc.
- [6] _____ and v.v. Stepanov; Qualitative Theory of Differential Equations, (English tr.), Princeton Univ. Press., Princeton N. J., 1960
- [7] V. I. Zubov; Methods of A. M. Lyapunov and Their Application, P. Noordhoff Ltd., The Netherlands, 1964

Papers

- [8] S. Ahmad; On Ura's Axioms and Local Dynamical Systems, Funkc. Ekvac., 12 (1969), 181-191
- [9] D. G. Belanger; Continuous Reparametrization of Dynamical Systems, Funkc. Ekvac., 14 (1971) (to appear)
- [10] D. H. Carlson; Universal Dynamical Systems, (to appear)
- [11] _____; A Generalization of Vinograd's Theorem for Dynamical Systems, (to appear)
- [12] J. Dugundji and H. A. Antosiewicz; Parallelizable Flows and Lyapunov's Second Method, Ann. of Math., 73 (1961), 543-555
- [13] J. Egawa; Global Parallelizability of Local Dynamical Systems, Math. Syst. Theory (to appear)

- [14] O. Hajek; Structure of Dynamical Systems Commentat. Math. Univ. Carol., 6, 1, (1965), 53-72
- [15] ———; Parallelizability Revisited, Proc. of Amer. Math. Soc., 27 (1971), 77-84
- [16] ———; Categorical Concepts in Dynamical Systems Theory, Topological Dynamics, An International Symposium, Benjamin, New York 1968, 243-258
- [17] ———; Representation of Dynamical Systems, Funkc. Ekvac. 14 (1971) (to appear)
- [18] G. Ikegami; Vinograd's Theorem on Manifolds, Proc. of Japan Academy (to appear)
- [19] S. Kakutani; A Proof of Beboutov's Theorem, Journ. of Diff. Equat., 4 (1968), 194-201
- [20] I. Kimura; Isomorphisms of Local Dynamical Systems and Separation Axioms for Phase-Spaces, Funkc. Ekvac., 13 (1970), 23-34
- [21] 木村郁雄; 局所力学系の同型写像について
函数式程式 23 (1970), 1-19
- [22] R. C. McCann; A Classification of Centers, Pacific Journ. of Math., 30 (1969), 733-746
- [23] ———; A Classification of Center-foci, Pacific Journ. of Math., 32 (1970), 467-478
- [24] R. K. Miller and G. R. Sell; Existence, Uniqueness and Continuity of Solutions of Integral Equations, Annali di Matematica pura ed applicata, LXXX (1968), 135-152
- [25] G. R. Sell; Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics, 1. The Basic Theory, Trans. Amer. Math. Soc., 127 (1967), 241-262
- [26] T. Ura; Sur le courant extérieur à une région invariante, Prolongement d'une caractéristique et l'ordre de stabilité, Funkc. Ekvac., 2 (1959), 143-200; 2^e éd., 105-143
- [27] ———; Local Isomorphisms and Local Parallelizability of Dynamical Systems, Dynamical Systems, An International Symposium, Benjamin, New York, 1968
- [28] ———; Local Isomorphism and Local Parallelizability in Dynamical Systems Theory, Math. Syst. Theory, 3 (1969), 1-16

- [29] T. Ura; Isomorphisms and Local Characterization of Local Dynamical Systems, Funkc. Ekvac., 12 (1969), 99-122
- [30] ——— and J. Egawa; Isomorphism and Parallelizability in Dynamical Systems Theory, (in preparation)