

Subfactors and topological invariants

河東 桑之 (東大・数理科学)

(河野 美文 (佐賀大・理) } 記
佐野 隆之 (九大・理)

Jones により, 作用素環論の指数理論に基づいて与えられる knots
に対する不変量 (Jones 多項式) の, 3次元 topological version,
つまり, 3次元 closed manifolds に対する不変量が, 多くの人々によ
って導入された。ここでは, (C-1) Turaev-Viro 型不変量と
与える "quantum 6j-symbol" と, 指数理論で, subfactors
の分類に現れる代数的 (complete) 不変量 "paragroup"
('87, Ocneanu) との同等性 ('91, Ocneanu により主張) の
一部について触れる。 (Evans-Kawahigashi (後述) 参照)
なお, 3次元 compact 多様体が, 境界を持つ場合は, Atiyah
の意味での $(2+1)$ -dimensional topological quantum field
theory と与える。

指数理論は, $N \subseteq M$ (無限次元単純作用素環) の組を対象
とする。群論での指数 $[G:H]$ ($G \supseteq H$) の対応物が, Jones
index $[M:N]$ であり, また体論でのカロア理論を期待し,
何らかの "量子化した" カロア群 = paragroup を見る。

1) まず, factor (hyperfinite II_1 -factor = 有限次元環の増大列の閉包) と subfactor の組の例を与える。

① $M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \dots$ (無限テンソル積, 埋め込みは $M_2(\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & & \\ & a & b & \\ c & & d & \\ & c & & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C})$ 等)

の, (自然な tr -スによる GNS 表現での) 閉包は, hyperfinite II_1 -factor を与える。

$M := (M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \dots)$ の閉包

$N := (\mathbb{C} \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \dots)$ の閉包

の組は, 本質的に, $M_2(\mathbb{C}) \supseteq \mathbb{C}$ なる包含関係だから,

$[M:N] = 4$ (行列環 $M_2(\mathbb{C})$ を $M_n(\mathbb{C})$ にある時も同様に

hyperfinite II_1 -factor を与え, $[M:N] = n^2$ となる。)

② 群, 部分群 $G \supseteq H$ の, 群環 $\mathbb{C}[G] \supseteq \mathbb{C}[H]$ の,

ある種の閉包 " $M \supseteq N$ " の index $[M:N] = [G:H]$

$\in \mathbb{N}$ となる。

③ Jones relation (Temperley-Lieb)

$$\begin{cases} e_i^* = e_i = e_i^2 & (* \text{ は involution}) \\ e_i e_j = e_j e_i & (|i-j| > 1) \\ e_i e_{i\pm 1} e_i = \tau e_i \end{cases}$$

が与えられた時,

$M := \langle e_1, e_2, e_3, \dots \rangle$ の閉包

or

$N := \langle e_2, e_3, \dots \rangle$ の閉包

に対し Jones index は $[M:N] = \tau^{-1}$ である。

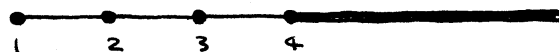
($A (\equiv \langle e_1, e_2, e_3, \dots \rangle$ は (代数的に) 生成された algebra)

は, A 上左積算を作用する。空間 A 上には, トレースから決まる

Hilbert space の構造が入る。また トレースの positivity から,

$\tau < \frac{1}{4}$ or $= \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\pi}{n}}$ 。) $M \cong N$ は hyperfinite

II_1 -factor になっている。(有限次元近似環として, $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$ 。)



(指数値の分布)

Jones subfactor は, canonical construction (paragroup)

で構成され, WZW $SU(2)_k$ model, 可解格子模型

(Andrews-Baxter-Forrester) 等, quantum 6j-symbol for

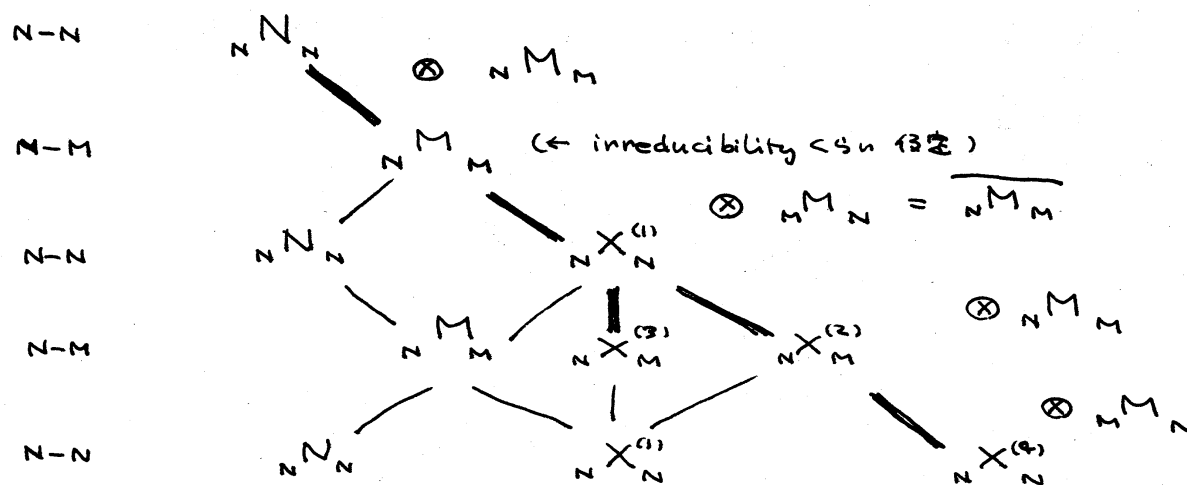
$U_q(\mathfrak{sl}(2))$ (Kirillov-Reshetikhin) との対応がある。

Dynkin	A_n 型	D_n 型
格子模型	ABF	$\forall n$, O.K.
作用素環 (quantum 6j-symbol paragroup)	Jones	n even O.K. n odd impossible
RCFT (Moore-Seiberg の公理の意味で)	WZW $SU(2)$	any n impossible

しかし, 上記のように, 常に対応するとは限らない。

2) $\mathbb{R}$ は paragroup に $\rightarrow$ して述べる (bimodule approach)

$N \subseteq M$ を hyperfinite II_1 -factors ($[M:N] < +\infty$) とする。 M を N 右 M -module とみる。(表現論では PT
D- ∞ : コンパクト群の unitary 表現 から。(作用素環の) 2つの作用をもつ bimodules を考へる (Connes).)



上図は、テンソル積に関する既約 AD 群の分解である。

例えば、

$$n \cdot \frac{N_X_N}{N_Y_M} \otimes N_M = n \cdot N_Y_M \oplus \dots$$

は、

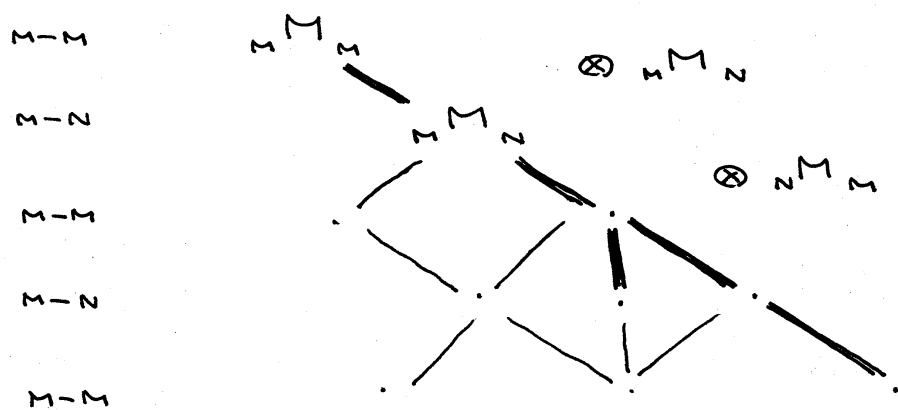
$$N_X_N \otimes N_M = n \cdot N_Y_M \oplus \dots \quad \text{と意味する。}$$

事実として、 $N_X_N \otimes N_M \otimes N_M = N_X_N \oplus \dots$

詳しくは、 $N_X_N \otimes N_M = N_Y_M \oplus \dots$ の時、

$N_Y_M \otimes N_M = N_X_N \oplus \dots$ が成立 (Frobenius-reciprocity)。

前図の太線部分が. $M \cong N$ a principal graph
 と呼ばれる。(Jones) principal graph が finite graph
 (つまり. bimodules が有限系)の時. finite depth, infinite
 graph の時. infinite depth と言う。(前者が "generic")
 (finite depth の時. paragroup は. complete invariant)
 また同様に. 次のグラフ (dual principal graph) も
 考えられる。



(この例では. 両方 E_6). なお. principal graph が finite
 depth であるとは. dual principal graph の λ と. 同値
 である。

3.2. graphs が finite depth の時. 4種類 $N-N$,
 $N-M$, $M-N$, $M-M$ bimodules の. 有限系が得られる。これに
 fusion algebra が現れる。(${}_N X_M \otimes {}_N Y_M = 0$ 等. 適宜
 解釈する) involution は. contragredient module で
 (例: ${}_N X_M \rightarrow {}_M \overline{X}_N$) 定義され. 一般には. 非可換な

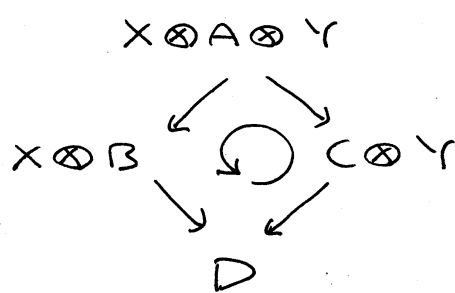
algebra となる。(134: 非可換群から作られる系組)

[graphs の 134]

(Jones index) $^{\frac{1}{2}}$ = Penrose-Frobenius eigenvalue of principal graph となる。 index < 4 の時. P.F. eigenvalue < 2 。
この時. 7つの論から principal graph としは, A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 が考えられる。(実際は, A_n (Jones subfactor), D_n, E_6, E_8 が現れる。)

paragroup は, 上で考えた fusion algebra (of bimodules) と, $\mathbb{R}$ の 6j-symbol の組と, 考えられる。 $\hookrightarrow$ の bimodules

A, B, C, D, X, Y に対し, Intertwiners (各々, 正規直交



化した basis から選ぶ) の,

composition (↻) から

定まる スカラー ($\in \mathbb{C}$) を

対応づける。

(6j-symbol)

3) ここでは, quantum 6j-symbol が満たする公理と,

Turaev - Viro の 不変量性を保証する公理の対応について述べるが, 2つは明らかに同等で, 残り1つに関してが微妙である。

Turaev - Viro は, 3-manifold (境界なし) に対する triangulation (tetrahedrons への分解) に対し, quantum

6j-symbol を用いて, 不変量を定義した。これは, tetrahedra の辺に, bimodule, 面に intertwiner の, admissible な配置を考へ, 対応する 6j-symbol を, 前のように定義する。

この時,

$$(\text{weight})^{(\# \text{ vertices})} \times \sum_{\text{admissible assignment}} \prod (\text{weight for bimodule}) \prod (\text{6j-symbol})$$

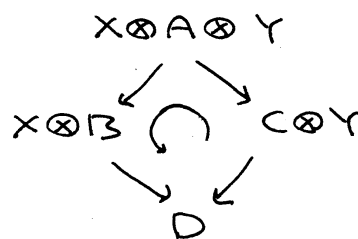

が, Turaev-Viro 型 topological invariant になる条件を考へる。要請は,

- well-definedness ($\Leftrightarrow$ tetrahedral symmetry)
- 3-local moves による不変性 (Turaev-Viro)
(move I, II, III)
($\Leftrightarrow$ Alexander moves による不変性)
同値

である。

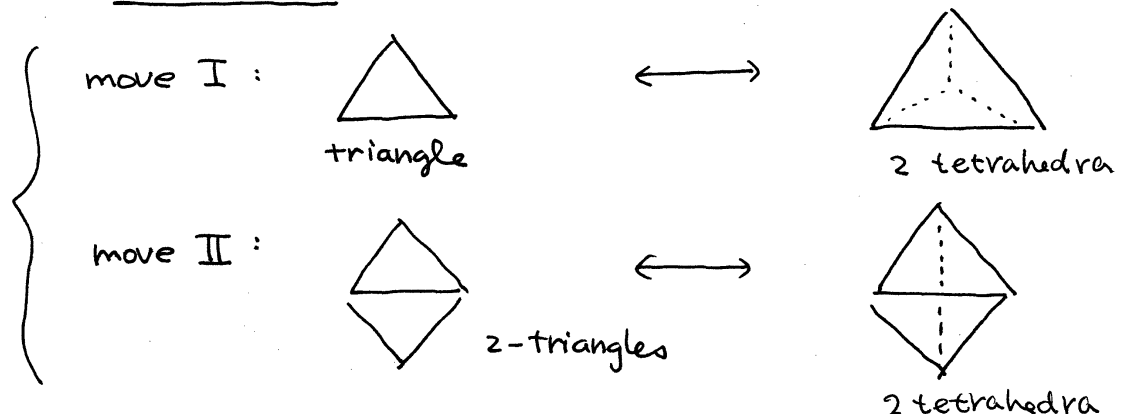
① unitarity of

(intertwiners の
なす正規直交基に
関するユニタリ条件)

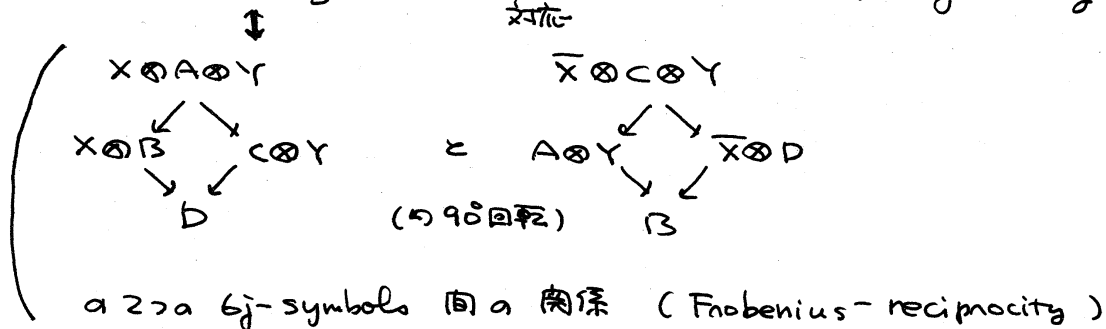


$\Leftrightarrow$
対応

invariance under



② renormalization $\Leftrightarrow$ tetrahedral symmetry



(注) connection 2-a 対応する条件

(crossing symmetry, commuting square condition) は,
(lattice model)

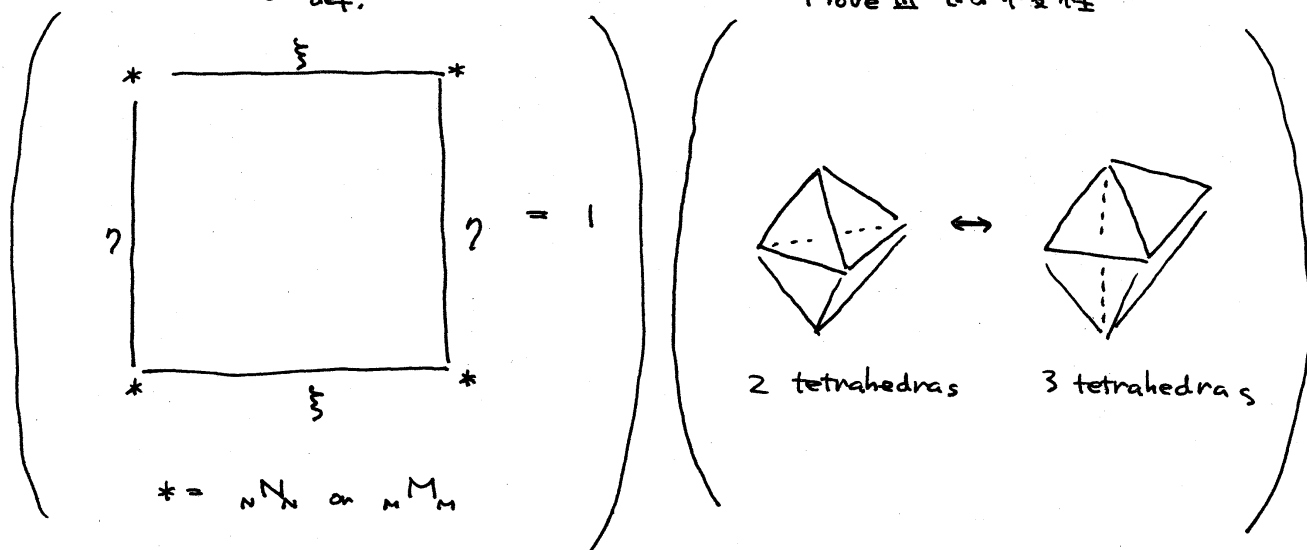
$$\begin{array}{ccc}
 a \rightarrow b & & \overline{b \rightarrow d} \\
 \downarrow & = & \downarrow \\
 c \rightarrow d & & a \rightarrow c
 \end{array}
 \sqrt{\frac{\mu(b) \mu(c)}{\mu(a) \mu(d)}}$$

③ flatness $\Leftrightarrow$ Pentagon

$\downarrow$ def.

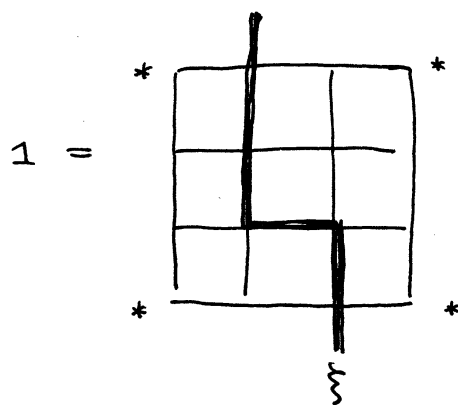
対応

Move III の不変性



$\Rightarrow$ flatness $\Rightarrow$ 3x3 flatness $\Leftrightarrow$ pentagon

を考へる。



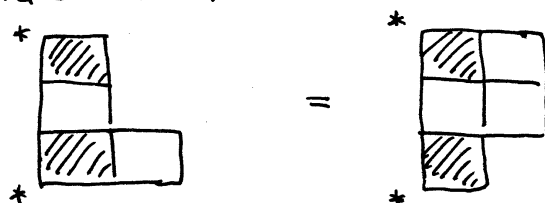
$$\Leftrightarrow \sum a_z \bar{b}_z = 1$$

=h.e. unitarity

$$\sum |a_z|^2 = \sum |b_z|^2 = 1$$

より. $a_z = b_z$ (Cauchy-Schwartz inequality).

つまり. 糸を 2 かけは.

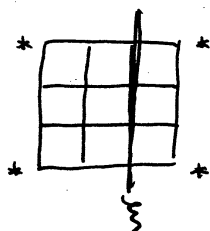


斜線部 " shaded square " = 1 (essentially) " に注意すは".

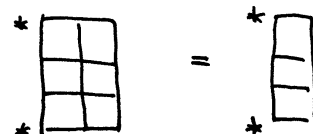
左② ($\leftrightarrow$ 2 tetrahedras) = 右② ($\leftrightarrow$ 3 tetrahedras)

つまり. Move III 不変性と同値である。

3x3-flatness $\rightarrow$ flatness は.



に關して. 前と同様に
して



が示す. により. 帰納的に 3xn flatness

が得る。

topological invariant から. subfactor を得る 逆手法
等を含め. 詳しくは. 下記 論文を 参照して下さい。

D.E. Evans & Y. Kawahigashi,

From subfactors to 3-dimensional topological
quantum field theories and back, preprint.