

微分同相写像の attractor について

日大理工 松元重則

本報告の最初の部分は 公理 A 微分同相写像の
吸引 (attractive) 基本集合に属してあり [1], [2], [3] の
抄録である。 第二部で上田昭亮氏他の所謂不規則遷移
振動についての注意をよべる。

K は 1 次元 compact branched C^∞ -多様体とし
 $\partial K = \emptyset$ とする。 $g: K \rightarrow K$ が admissible であるとは、
1) g は expanding C^∞ -写像である 2) $\Omega(g) = K$, 3)
 $K \ni x, \exists I$, nhd of $x \rightarrow g(I)$ は arc である。と
する。 このとき $\Sigma := \lim_{\leftarrow} \{K \xleftarrow{g} K \xleftarrow{g} K \xleftarrow{g} \dots\}$
を (K, g) の solenoid と呼ぶ。 $G: \Sigma \rightarrow \Sigma$, 但し
 $G(x_0, x_1, \dots) = (gx_0, x_0, x_1, \dots)$ を shift map と呼ぶ。
命題 Σ は局所的に Cantor set X に同値であり、
 G は同相写像である。

11 M を n 次元 compact C^∞ -mfd と仮定しとする。

$f \in M_r$ の C^r 級 公理 A 微分同相写像とする。 ($r \geq 1$)

また $\Lambda \in \Omega(H)$ の Λ と Λ' の基本集合とする。 Λ が吸引基本集合であるとは $W^u(\Lambda) = \Lambda$ なることとする。 このとき

定理 1 ([1]) 一次元吸引基本集合はすべし Λ は solenoid の shift map と 位相共役である。

次に

定理 2 ([2]) solenoid の shift map はすべし Λ は S^1 の 公理 A 微分同相の吸引基本集合と 位相共役である。

また shift map は 次のように分類される。

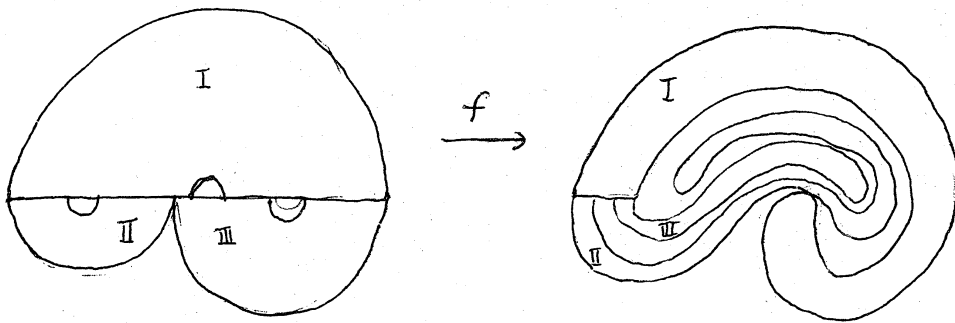
定理 3 ([2]) $K_1 \xrightarrow{g_1} K_1$ は admissible 写像とし Σ_i の定める shift map を $\Sigma_i \xrightarrow{G_i} \Sigma_i$ とする。 ($i=1,2$)

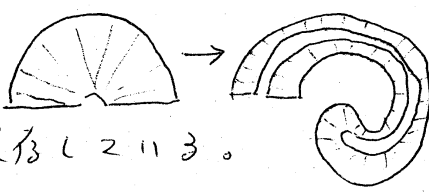
このとき G_1 と G_2 が 位相共役であるための同値条件は、

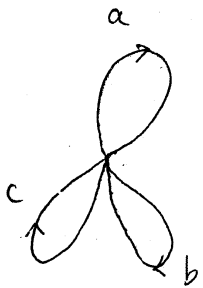
$$\begin{array}{ccc} \exists f: K_1 \rightarrow K_2, & \exists f': K_2 \rightarrow K_1, & \exists m \geq 0 \rightarrow \\ \begin{array}{ccc} K_1 \xrightarrow{g_1} K_1 & K_1 \xrightarrow{g_1} K_1 & K_1 \xrightarrow{g_1^m} K_1 \\ f \downarrow & \downarrow f & f \downarrow \quad \nearrow f' \quad \downarrow f \\ K_2 \xrightarrow{g_2} K_2 & K_2 \xrightarrow{g_2} K_2 & K_2 \xrightarrow{g_2^m} K_2 \end{array} \end{array}$$

がすべし可換。

例 ([3])



ただし I の領域は精密には  のように写像され、fiber を保存している。
また fiber 方向には contractive であり、心棒方向には expanding である。領域 II, III についても同様である。
I, II, III の同心円の中心は、固定点であり、source である。無限遠点を source と扱うことにより、これを S^2 の微分同相に拡張する。この微分同相は、公理 A を満たし、1次元吸引基本集合をもつ。従って定理 1 により、shift map に対応するが、これは次のように与えられる。(admissible map に対応する。)



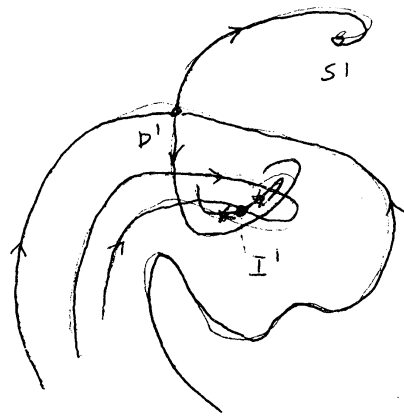
$$a \longrightarrow a + b + a - b - a$$

$$b \longrightarrow -c + a + b - a + c$$

$$c \longrightarrow -c + a - b - a + c + a + b - a + c$$

この例は、かなり複雑であり、やや人工的である。もっと単純な例もあるが、それらと、~~二次元上の~~ $\mathbb{P}^2$ 上の公理A微分同相写像の基本集合として実現することはできない。つまり $\mathbb{P}^2$ 上の吸引基本集合（一次元）は少なくとし、このくらいは複雑になってしまうということがある。

次に、上田氏の実験結果に現れた極めて解析の困難な attractor について述べよう。彼は、いくつかの例を提出しており、それらの中には共通のある複雑さを持っている。それらの中が一番単純なものか、~~以下~~ 以下の phase portrait をもつものである。詳細は[4]を見たい。この例の



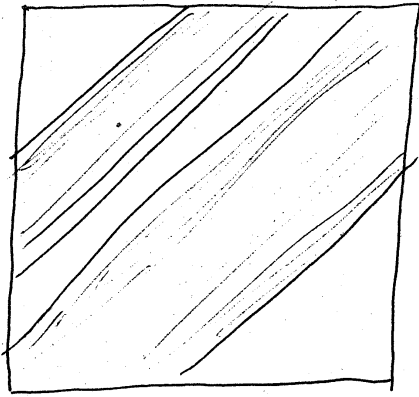
眼目は、一次元 状 の attractor が存在していることである。上田氏の詳細な観察によれば、この微分同相 ~~attractor~~ は、摂動に対し、 Ω -連続ではあるら

しいが、 Ω -安定ではないらしいとのことである。([5])

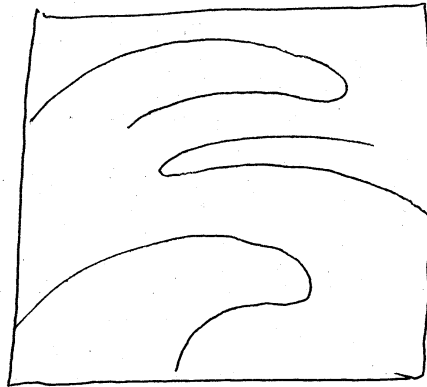
Ω -連続、 Ω -安定の定義は文末に述べなくてはならない。

この attractor は、一見一次元のように見えるらしいが、

実は、前述の例とは甚だ異なつた特徴をもつてゐる。それは、前述の例では、不安定多様体が左図の Σ と Σ' であるのに対し、上田氏の例 Σ^1 は右図の Σ と Σ' である。



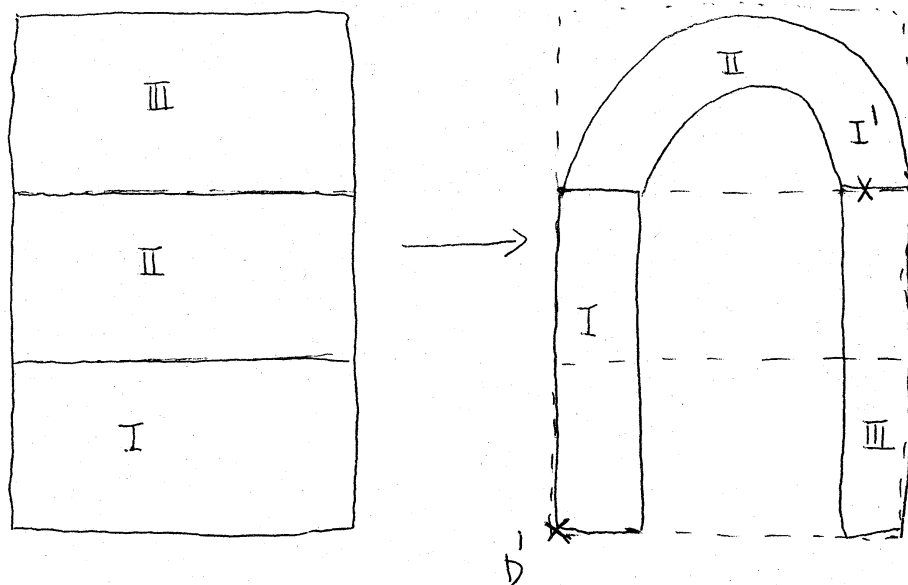
Plykin の例



上田氏の例

つまり上田氏の例では、不安定多様体は無限の「折れ曲り点」をもつてゐるのである。（従つてよくに折れ曲り点、集積点もある。） 他方 Plykin の例の Σ と Σ' は、公理 A 字像の 1 次元 attractor は、一般に（局所的には）近傍へ foliation として拡張されるような不安定多様体をもつてゐることを示すことができるのである。従つて上田氏の例は公理 A 字像の 1 次元 attractor ではない。（恐らく公理 A ではないだろう）

この例と極めて似通つた（恐らくは同一の）phase portrait を持つ例を初等的に構成することが出来る。



これは上図で与えられる微分同様である。(像の磁石を厚くすると Morse Smale に近づいてしまう。上の絵のくらの厚さにしておく。) 磁石の厚さを変えると、それに従い phase portrait は少しづつ変化するが、適当な厚さにとると上図の例とよく似たものを得る。また、この図の微分同相写像を経由するところの 南極北極 と 固定点 を結ぶ経路族をつくることができる。私の見るところ、この経路族の研究は、力学系の分岐の研究の中で最も重要なもののひとつではないかと思われる。又、次の予想にはいくつかの根拠がある。(あまり強くはないが)

予想 上に述べた微分同相は無限小の sink を持つ。sink とは、巡回集で、1 次近似的行列 ~~contractible~~ の固有値が 1 より小さいもののことである。

附録 M を多様体とし, $\text{Diff}^r(M)$ を M 上の微分同相の集合を表わす。(C^r -topology をもたせておく。) $f \in \text{Diff}^r(M)$ が Ω -安定 であるとは f の近傍 $\mathcal{N}$ があり, $\mathcal{N}$ の各元 g に対し, 次の図式が可換となるような同相写像 h が存在する二

$$\begin{array}{ccc} \Omega(f) & \xrightarrow{f|} & \Omega(f) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \Omega(g) & \xrightarrow{g|} & \Omega(g) \end{array}$$

また, f が Ω -連続 であるとは (1) $\Omega(f) \ni \forall x$, $x \in \mathcal{V}_f$ (近傍) に対し, 適当な nbhd $\mathcal{N}$ of f が存在して $\mathcal{N} \ni g$ ならば $\Omega(g) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ (2) $\Omega(f) \subset \mathcal{V}_f$ に対し 適当な nbhd $\mathcal{N}$ of f が存在して $\mathcal{N} \ni g$ ならば $\Omega(g) \subset \mathcal{V}$.

文献表

- [1] R. Williams, "One dimensional attractors," Topology 6.
- [2] —, "Classification of 1-dim attractors," Proc AMS 14°
- [3] Plykin, "Sources and sinks of A-diffeo of surfaces," Sbornik 93-2
- [4] 上田 et al, "非線型微分方程式の計算機シミュレーションと非周期振動," Trans IECE 73/4 Vol 56-A No 4.
- [5] 上田 et al "非線型振動からの問題提起 244" This volume