

Weyl 群の Springer 表現と hyperplane complement の cohomology

東京理科大 理工 庄司俊明
(Toshiaki Shoji)

§0. 序. Weyl 群 W の鏡映に関する hyperplane complement から生じる Poincaré 多項式と, W の Springer 表現との間に奇妙な関係のある事が Spaltenstein [5] により指摘されていた。この Spaltenstein の予想は例外群の場合には、彼自身により確かめられていたが、古典群の場合にはまだ未確認だった。ここでは、予想が古典群 (D_{2n+1} 型を除いて) の場合にも成立する事を報告したい。以下は、G. I. Lehrer との共同研究である。

§1. Hyperplane complement の cohomology.

W を Euclid 空間 $V_{\mathbb{R}}$ 上に実現された有限 Coxeter 群とし、 $V = V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ をその複素化とする。 $\mathcal{A}$ を W の鏡映から生じる V の (複素化された) 超平面全体の集合とし、 V の hyperplane complement $M = V - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ を考える。

$$P_M(t) = \sum_{i \geq 0} \dim_{\mathbb{C}} H^i(M, \mathbb{C}) t^i$$

を M の Poincaré 多項式とする。次の事実は古典的である。

定理 1.1. (Arnold, Brieskorn)

$$P_M(t) = \sum_{w \in W} t^{n(w)} = \prod_{i=1}^l (1 + m_i t),$$

但し, $l = \dim V$, $m_1, m_2, \dots, m_l$ は W の exponents, $n(w)$ は w を鏡映の積として書いた時の最小個数 ($= \text{rank}(w-1)$) である。

上の定理は, Orlik-Solomon により次の様に一般化された。
 X を $\mathcal{A}$ に含まれる超平面いくつかの共通部分として得られる
 V の部分空間とする。 X の超平面 $\mathcal{A}_X$ を

$$\mathcal{A}_X = \{H \cap X \mid H \in \mathcal{A}, H \cap X \neq X\}$$

で定義する。 $M_X = X - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_X} H$ とおき, M_X の Poincaré 多項式 $P_{M_X}(t)$ を考える。この時,

定理 1.2. (Orlik-Solomon [OS])

$$P_{M_X}(t) = \prod_{i=1}^k (1 + m_i(X) t)$$

と表せる。但し, $k = \dim X$, $m_1(X), \dots, m_k(X)$ は正の整数。

注意. Orlik-Solomon は, 各 X に対し $P_{M_X}(t)$ を計算し定理を得た. $m_1(X), \dots, m_k(X)$ の意味はは, きりしむ. 寺尾 [T] の結果によれば, $\mathcal{A}_X$ が X の free arrangement にある場合には, M_X の Poincaré 多項式は一次式の積に分解し, $\{m_i(X)\}$ は $\mathcal{A}_X$ に対応する generalized exponents に一致する事が分, ている. 上の場合の多くの X に対し, $\mathcal{A}_X$ が free arrangement にある事が確かめられているが, すべてそうなるか. どうかはまだ分, っていない.

§2. Spaltenstein の予想

G を複素 reductive Lie 群, B を G の Borel 部分群, W を G の Weyl 群 とする. G の unipotent 元 u に対して

$$\mathcal{B}_u = \{gB \in G/B \mid g^{-1}ug \in B\}$$

とおく. $\mathcal{B}_u$ は $\mathcal{B} = G/B$ の closed subvariety にある. Springer により $\mathcal{B}_u$ の cohomology $H^i(\mathcal{B}_u, \mathbb{C})$ 上に W の表現が定義されている. これを W の Springer 表現と言う. W の Springer 表現は, 有限体上定義された reductive 代数群に対しても, ℓ -adic cohomology を使, て構成できる. それは 有限代数群の Deligne-Lusztig の virtual character と密接に関係している. 即ち, G を有限体 $\overline{\mathbb{F}_q}$ 上定義された連結 reductive 代数群,

$F: G \rightarrow G$ を対応する Frobenius map, $G^F = G(\mathbb{F}_q)$ を F の固定点からなる有限群とする。 G の F -stable な maximal torus T , $\theta: T^F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ に対し G^F の Deligne-Lusztig virtual character $R_T^G(\theta)$ が構成される。但し, $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ は ℓ -進数体 $\mathbb{Q}_\ell$ の代数的閉包, $(\ell \neq \text{ch}(\mathbb{F}_q))$ である。 G_{uni}^F を G^F の unipotent 元全体の集合とすると, $R_T^G(\theta) |_{G_{\text{uni}}^F}$ は θ による $\mathbb{C}$ 上の関数 $Q_T^G = R_T^G(\theta) |_{G_{\text{uni}}^F}$ を G の T に関する Green 関数という。次の事実が知られている。

定理 2.1. (Springer, Kazhdan) G を $\mathbb{F}_q$ 上 split type, $p = \text{ch}(\mathbb{F}_q)$, q は十分大きいと仮定す。この時 G_{uni}^F の各共役類 $(u \text{ in } G)$ に“良い”代表元 u が選べ,

$$Q_{T_w}^G(u) = \sum_{i \geq 0} \text{Tr}(w, H^i(\mathcal{B}_u, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) q^i$$

と表わせよ。但し T_w は $w \in W$ に対応する G の F -stable な maximal torus である。

注意. $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ のいずれの場合にも, $\mathcal{B}_u$ の odd cohomology は 0 になる事が知られている。 E_8 の場合, 上の“良い”代表元の取り方には, q に少し条件がつく。

再び $G/\mathbb{C}$ に戻る。Springer-Kashdan の定理を踏まえて、形式的に G の unipotent 元 u に対し、

$$Q_u(w) = \sum_{i \geq 0} \text{Tr}(w, H^{2i}(\mathcal{B}_u, \mathbb{C})) t^i$$

とおく。 $w \in W$ を動かす事により Q_u は係数が W の指標環 $R(W)$ にある多項式環 $R(W)[t]$ の元とみる事ができる。

以上の準備のもとに Spaltenstein の予想を述べる。今 Δ を G の maximal torus T に対応する root 系、 $\pi \subset \Delta$ を simple root 系とする。Weyl 群 $W = N_G(T)/T$ は $V = \text{Lie } T$ 上に鏡映群 (その複素化) として実現できる。各 $J \subset \pi$ に対し、 $X = X_J$ を $X_J = \bigcap_{\alpha \in J} H_\alpha$ で定義する。但し、 H_α は鏡映 $s_\alpha \in W$ に関する V の超平面である。Orlik-Solomon の結果より

$$P_{H_{X_J}}(t) = \prod_{i=1}^h (1 + m_i(X_J)t)$$

と分解できる。

一方、 P_J を type J の G の parabolic subgroup, $L_J \in P_J$ の Levi subgroup とする。 (L_J の simple root 系は J で与えられる。) L_J の regular unipotent element を u_J とし、 "Green 内数" Q_{u_J} を考える。この時

予想 2.2. (Spaltenstein)

$$\langle Q_{u_J}, \rho \rangle_W = \sum_{i=1}^k t^{m_i(X_J)},$$

但し, ρ は W の reflection character, $\langle, \rangle_W$ は W の指標に関する内積である。

注意 (i). $J = \emptyset$ (空集合) の場合は, $u_J = 1$ で $Q_{u_J} = Q_1 = \sum_{i \geq 0} H^{2i}(\mathfrak{B}, \mathbb{C}) t^i$ となる。又, graded W -module として,

$\bigoplus H^{2i}(\mathfrak{B}, \mathbb{C})$ は $S(V^*)/\mathcal{I}$ と同型になる事が知られている。

ここに, $S(V^*)$ は V 上の polynomial functions の algebra, $\mathcal{I}$ は定数項を持たない W -不変な polynomial functions で生成された $S(V^*)$ の ideal である。一方この場合, $X_J = V$ で $\{m_i(X_J)\} = \{m_i\}$ は Weyl 群の exponents である。この場合に予想の成立する事は, 知られていた。

(ii). 有限体上の代数群に対して, Green 函数 $Q_{T_w}^G$ を計算する algorithm が存在する。特に例外群に対しては $Q_{T_w}^G$ は全て計算され, Green 函数の表が出来ている。この表を使って, 個々の $H^i(\mathfrak{B}_u, \mathbb{C})$ への Springer 表現は, 完全に決定される。又, $m_i(X_J)$ は Orlik-Solomon により全て与えられているので, これらにより予想を例外群の場合に検証する事は可能である。実際 Spaltenstein は 例外群の場合に確か

3章により上述の予想に到達した。しかし Green 関数を計算する algorithm は, Springer 表現の個々の情報, 例えば $H^2(\mathcal{B}_n, \mathbb{C})$ における ρ の重複度などについては, 無力である。全ての Green 関数を計算して始めて全ての Springer 表現が分り, 従って ρ の重複度も計算できるわけだが, これは, 古典群に因っては役に立たない。直接 ρ の重複度を計算する工夫が必要になる。

我々の結果は,

定理 2.3. (Lehrer - Shoji [LS]) G を A_n 型, B_n 型, C_n 型, および D_n 型のいずれかとする。この時予想は成立する。

注意. D_{n+1} 型の場合は, まだ分っていない。以下の証明は, 他々の場合には ρ の $H^2(\mathcal{B}_n, \mathbb{C})$ における重複度を計算して, Orlik-Solomon の結果と比較好事により得られる。Case-by-case の検証によらずに一般的に証明が望まれる。

§3. 証明の概略.

それぞれの場合に, $\rho \in H^2(\mathcal{B}_n) = H^2(\mathcal{B}_n, \mathbb{C})$ の重複度を計算する事が目標である。先ず, 次の定理が出発点である。

定理 3.1. (Borho-MacPherson) $P \in G$ の parabolic subgroup, $W_P \in$ 対応する W の Weyl subgroup とする. G の unipotent 元 u に対し, $P_u = \{ gP \in G/P \mid g^{-1}ug \in P \}$ とおく. この時

$$H^i(Bu, \mathbb{C})^{W_P} \simeq H^i(P_u, \mathbb{C}),$$

但し, 左辺は $H^i(Bu, \mathbb{C})$ の W_P -fixed point subspace を意味する.

以下では, 次の様に Dynkin 図形から 1 頂点を除いて得られる maximal parabolic subgroup P を考える.

$$A_n : \times \circ \circ \cdots \circ \circ \circ$$

$$B_n : \times \circ \circ \cdots \circ \circ \rightarrow \circ$$

$$C_n : \times \circ \circ \cdots \circ \circ \leftarrow \circ$$

$$D_n : \times \circ \circ \cdots \circ \circ \begin{array}{l} \nearrow \circ \\ \searrow \circ \end{array}$$

この時, 次の事実は容易に分る.

$$(3.2) \quad l_{W_P}^W = \begin{cases} 1 + \mathcal{S} & W: A_n \text{ 型の場合.} \\ 1 + \mathcal{S} + \mathcal{Z} & W: B_n, C_n, D_n \text{ 型の場合.} \end{cases}$$

但し, $\mathcal{S}$ は W の reflection 表現, $\mathcal{Z}$ は Young 図形 $(\square, \phi)$ に対応する $\deg \mathcal{Z} = n-1$ の既約表現である. ($\mathcal{S}$ は $(\square, \alpha)$)

に対応し, $\deg f = n$ である.)

所て一般に, $i=0$ の時 $H^0(\mathcal{O}_n) \cong 1_W$, $i>0$ の時 $\langle H^i(\mathcal{O}_n), 1_W \rangle_W = 0$ とする事が知られてゐる。従つて Frobenius の相互律により

(3.3) $i>0$ に対し

$$\dim H^i(\mathcal{S}_n) = \begin{cases} \langle f, H^i(\mathcal{O}_n) \rangle_W & A_n \text{ 型} \\ \langle f+\xi, H^i(\mathcal{O}_n) \rangle_W & B_n, C_n, D_n \text{ 型} \end{cases}$$

とすることが出来る。 A_n 型の場合には (3.3) から直ちに f の重複度の計算出来る。実際、この場合 $\mathcal{S}_n \cong \mathbb{P}(k_n(n-1))$ 、射影空間であり、良く知られてゐる様に

$$H^i(\mathcal{S}_n) = \begin{cases} \mathbb{C} & i=0, 1, \dots, \dim \mathcal{S}_n \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

従つて、

$$\langle f, \mathcal{Q}_n \rangle_W = t + t^2 + \dots + t^{\dim \mathcal{S}_n}$$

を得る。

他の場合にも $H^i(\mathcal{S}_n)$ を計算する事により $f+\xi$ と $H^i(\mathcal{O}_n)$ との内積は計算出来る。しかし定理を示す為には f と ξ を分離する必要がある。その為には $H^i(\mathcal{O}_n)$ を W -module $H^i(\mathcal{O})$ と

比較する事と考える。自然な埋め込み $\iota: \mathcal{B}_u \hookrightarrow \mathcal{B}$ より

$\iota^*: H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{B}) \rightarrow H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{B}_u)$ が誘導されるが, ι^* は W -equivariant

になる事と分っている。又, $j: \mathcal{P}_u \hookrightarrow \mathcal{P}$ より $j^*: H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{P}) \rightarrow$

$H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{P}_u)$ が導かれる。一方, 自然な写像 $G/B \rightarrow G/P$ より

$p_u: \mathcal{B}_u \rightarrow \mathcal{P}_u$ が定義され, $p_u^*: H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{P}_u) \rightarrow H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{B}_u)$ と

得る。次の命題は Borho-MacPherson の定理 (定理 3.1) の精
簡化である。

命題 3.4. p_u^* により $H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{P}_u) \xrightarrow{\sim} H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{B}_u)^{W_P}$ が誘導され

次の図式は可換になる。

$$\begin{array}{ccc} H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{B})^{W_P} & \xrightarrow{\iota^*} & H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{B}_u)^{W_P} \\ p_u^* \uparrow & & \uparrow p_u^* \\ H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{P}) & \xrightarrow{j^*} & H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{P}_u) \end{array} .$$

次の Lemma は命題 3.4 より 直ちに得られる。(以下では,

W -module V の $\mathcal{P}, \mathcal{P}$ -isotypic part を $V_{\mathcal{P}, \mathcal{P}}$ で表わす事にする。)

Lemma 3.5. ある $i > 0$ に対し, $j^*: H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{P}) \rightarrow H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{P}_u)$ は
全射であり, $H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{B})_{\mathcal{P}, \mathcal{P}} = H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{B})_{\chi}$ ($\chi \in \{\mathcal{P}, \mathcal{P}\}$) と仮定
する。(即ち, $H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{B})_{\mathcal{P}, \mathcal{P}}$ は $\mathcal{P}$ または $\mathcal{P}$ のどちらか一方のみ)。
この時, $H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{B}_u)_{\mathcal{P}, \mathcal{P}} = H^{\mathbb{Z}^i}(\mathcal{B}_u)_{\chi}$ であり,

$$\dim H^i(\mathfrak{B}_n)_\chi = \dim H^i(\mathfrak{B}_n).$$

実際、仮定より $H^i(\mathfrak{B})_{\mathfrak{p}, \mathfrak{z}} \rightarrow H^i(\mathfrak{B}_n)_{\mathfrak{p}, \mathfrak{z}}$ は全射であり、
従って Lemma が成立する。

所で、 $\mathbb{W}$ -module $\bigoplus H^i(\mathfrak{B})$ の構造は、§2 の注意 1 に述べた
様によく知られてゐる。そこで、 $H^i(\mathfrak{B})$ に 1, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{z}$ の現われ
る pattern を表 1 にすると次の様になる。

$H^i(\mathfrak{B})$ の次数	0	1	2	3	...	$2n-2$	$2n-1$
B_n 型, C_n 型	1	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{z}$	$\mathfrak{p}$	...	$\mathfrak{z}$	$\mathfrak{p}$

	0	1	2	...	$2n-2$	$2n-1$	$2n$	...	$4n-3$	$4n-2$
D_{2n} 型	1	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{z}$	...	$\mathfrak{z}$	$2\mathfrak{p}$	$\mathfrak{z}$	...	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{z}$

	0	1	2	...	$2n-1$	$2n$	$2n+1$	...	$4n-1$	$4n$
D_{2n+1} 型	1	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{z}$	...	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{p}+\mathfrak{z}$	$\mathfrak{p}$	...	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{z}$

これより Lemma 3.5 の 2 番目の仮定に因りて次の如き成立。

(3.6.) (i) G が B_n, C_n, D_{2n} 型の時、全ての $i > 0$ に対し
Lemma 3.5 の仮定が満たされる。

(ii) G が D_{2n+1} 型の場合、 $i=2n$ (この時 $H^i(\mathfrak{B})_{\mathfrak{p}, \mathfrak{z}} = \mathfrak{p}+\mathfrak{z}$) を除いて Lemma 3.5 の仮定が
満たされる。

Lemma 3.5 の最初の仮定について、次が成り立つ。

命題 3.7. (i) G が C_n 型の時、各 u に対し、 $j^*: H^{zi}(\mathcal{P}) \rightarrow H^{zi}(\mathcal{P}_u)$ は全ての $i > 0$ について、全射。

(ii) G が B_n, D_n 型の時、各 u に対し、 j^* は高々 1 個の i を除いて全射。

注意 (i). 命題 3.7 の証明は、cohomology の完全列

$$0 \rightarrow H_c^{zi}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_u) \rightarrow H^{zi}(\mathcal{P}) \rightarrow H^{zi}(\mathcal{P}_u) \rightarrow H_c^{zi+1}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_u) \rightarrow 0$$

を通じて、 $H_c^{zi+1}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_u) = 0$ を示す事により得られる。又、

Lemma 3.5 を適用して $\mathcal{P}$ の重複度を求める為には $H^{zi}(\mathcal{P}_u)$ の次元の決定が必要になる。つまり我々の方針は、 $\mathcal{P}$ の重複度の決定に、 $\mathcal{P}, \mathcal{P}_u, \mathcal{P} - \mathcal{P}_u$ の cohomology の計算を利用する事にある。

(ii). 命題 3.7 の (ii) で除外される i は次の通りである。

$G = SO_N(\mathbb{C})$ と $GL_N(\mathbb{C})$ に埋め込み、unipotent 元 u を Jordan 標準形により $u = u_\lambda$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ と N の partition で表わす。今 s を $\lambda_i = 1$ とする i の個数とする。即ち、

$$u = u_\lambda, \quad \lambda: \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} p$$

$s \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\}$

この時、 $G: B_n$ 型 ($N=2n+1$) ならば p は奇数、 $G: D_n$ 型 ($N=2n$) ならば p は偶数である。いずれの場合も、

$s: \text{奇数} \Rightarrow j^*$ は全ての i に対して全射

$s: \text{偶数} \Rightarrow j^*$ は $i = p - \frac{s}{2} - 1$ の時全射ではなく、その他の i に対しては全射。

である。

以上の議論をまとめると、 $\mathcal{P}_u$ の cohomology を計算する事により次の事実が示される。こまごまの議論は任意の unipotent 元 (即ち、 $u = u_\lambda$ とするものも含めて) で成立する事に注意する。

(3.8.) 任意の unipotent 元 u に対し、 $\mathcal{P}$ の $H^i(\mathcal{P}_u)$ における重複度は、以下の場合に計算できる。

- C_n 型 全ての i .
- B_n, D_{2n} 型 ... 高々1個の i を除いて全ての i .
- D_{2n+1} 型 高々2個の i を除いて全ての i .

C_n 型に関しては (3.8) より直ちに定理が得られる。 B_n , D_{2n} 型の場合 もう1つ情報があれば残りの i も決まる事が出来る。実際 $u = u_J$ については次の事実が知られている。

定理 3.9. (Alvis-Lusztig) G を reductive 群, $u = u_J \in L_J$ の regular unipotent element とする。この時

$$\bigoplus_{i \geq 0} H^{2i}(B_n) \simeq \text{Ind}_{W_J}^W 1.$$

この定理により, B_n , D_{2n} 型の場合, $u = u_J$ については残りの i に対しても ℓ の重複度が計算でき, 定理を得る。 D_{2m+1} 型の場合には, まだ不定性が残ってしまう。

参考までに以下に各 $X = X_J$ に対応する $\{m_i(X_J)\}$ を記しておく。

A_n 型 : $\{1, 2, \dots, n - |J| \}$

B_n 型 : $\{1, 3, 5, \dots, 2n - 2|J| - 1\}$

D_n 型 : $\{1, 3, 5, \dots, 2n - 2|J| - 1\}$

(J が D_m 型 ($m \geq 2$) の成分を持つ場合)

" : $\{1, 3, 5, \dots, 2n - 2|J| - 3, k + n - |J| - 1\}$

(J が A 型の k 個の成分から成る場合)

この表から分る様に, A_n 型, B_n 型に対応する $\{m_i(x_j)\}$ はそれぞれ A_{n-1} , B_{n-1} 型の Weyl 群の exponents に一致する。実際これらの場合 $\mathcal{A}_X$ は rank $n-1$ の Weyl 群 W' の Coxeter arrangement (即ち W' に対応する $\mathcal{A}$) に一致している。しかし, D 型の場合, $\mathcal{A}_X$ は Coxeter arrangement にはなっていない。

注意. 定理 3.9 は $u = u_j$ に対してしか適用できるが, Green 函数の "Ennola duality" を使う事により実は B_n , D_n 型の場合, 全ての u に対して ρ の重複度を計算する事が出来る。Ennola duality は Green 函数を q の多項式としてみて $-q$ を代入した結果を記述するもので, 例えは A_n 型に対しては

$$Q_{T_w}^{G^+}(u)(q) = Q_{T_{w_0}}^{G^-}(u)(-q)$$

と表わされる。但し, 左辺は $GL_n(\mathbb{F}_q)$ に対する q の多項式としてみた Green 函数, 右辺は $U_n(\mathbb{F}_{q^2})$ の Green 函数である。又 $w_0 \in W$ は 最長元を表わす。同様の $q \leftrightarrow -q$ に関する等式は, より複雑な形でほぼ全ての群に対して成立し, B_n, C_n, D_n 型の場合は G の "inner duality" を与え, D_{2n+1} 型の場合は A_n 型と同様に $G^+ \leftrightarrow G^-$ の duality を与える。所で G の inner duality $q \leftrightarrow -q$ は W の Springer 表現に

一種の parity の条件を与える。(例えば, B_n, C_n, D_n 型の場合, $\mathfrak{g}$ の $H^*(\mathfrak{g})$ に表われる次数は常に奇数, $\mathfrak{z}$ は常に偶数 (3.5 の表参照).) これにより定理 3.9 を使わずに残りの i の場合を決定する事が出来る. この場合でも, D_{2n+1} 型は除外される事に注意する. 以下に C_n 型の場合を含めて, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{z}$ の $H^*(\mathfrak{g}_\lambda)$ における重複度と Q_λ との内積の形で表しておく. 各場合を通じて $\mu = \mu_\lambda$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ と表わす. 又, S は命題 3.7 の後の注意 (ii) と同様である.

B_n 型, D_{2n} 型.

(a) S : 奇数の場合.

$$B_n \text{ 型: } \begin{cases} \langle Q_{\mu_\lambda}, \mathfrak{g} \rangle = q + q^3 + \dots + q^{p-2} \\ \langle Q_{\mu_\lambda}, \mathfrak{z} \rangle = q^2 + q^4 + \dots + q^{p-3} \end{cases}$$

$$D_{2n} \text{ 型: } \begin{cases} \langle Q_{\mu_\lambda}, \mathfrak{g} \rangle = q + q^3 + \dots + q^{p-3} \\ \langle Q_{\mu_\lambda}, \mathfrak{z} \rangle = q^2 + q^4 + \dots + q^{p-2} \end{cases}$$

(b) S : 偶数の場合

$$B_n \text{ 型: } \begin{cases} \langle Q_{\mu_\lambda}, \mathfrak{g} \rangle = q + q^3 + \dots + q^{p-2} \\ \langle Q_{\mu_\lambda}, \mathfrak{z} \rangle = q^2 + q^4 + \dots + q^{p-3} + q^{p-5/2-1} \end{cases}$$

$$D_{2n} \text{ 型: } \begin{cases} \langle Q_{\mu_\lambda}, \mathfrak{g} \rangle = q + q^3 + \dots + q^{p-3} + q^{p-5/2-1} \\ \langle Q_{\mu_\lambda}, \mathfrak{z} \rangle = q^2 + q^4 + \dots + q^{p-2} \end{cases}$$

C_n 型

$$\langle Q_{n, \beta} \rangle = \begin{cases} q + q^3 + \dots + q^{p-1} & p: \text{偶数} \\ q + q^3 + \dots + q^{p-2} & p: \text{奇数} \end{cases}$$

$$\langle Q_{n, \beta} \rangle = \begin{cases} q^2 + q^4 + \dots + q^{p-2} & p: \text{偶数} \\ q^2 + q^4 + \dots + q^{p-1} & p: \text{奇数} \end{cases}$$

References

- [LS] G.I. Lehrer and T. Shoji; On Flag varieties, Hyperplane complements and Springer representations of Weyl groups. Preprint.
- [OS] P. Orlik and L. Solomon; Coxeter arrangements, in Proc. Sympos. Pure Math., 40 (1983), 167-189.
- [S] N. Spaltenstein; Contribution to "Open problems in Algebraic groups", Katata, Taniguchi Foundation 1983.
- [T] H. Terao; Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepard-Todd-Brieskorn formula, Invent. Math., 63 (1981), 159-179.