

C^* 環の Stone-Weierstrass の定理について

日大文理 境 正一郎 (Shôichirô Sakai)

1. C^* 環の一般論の中で、長い間未解決の問題として残された最も重要な問題の一つとして Stone-Weierstrass 予想がある。この予想については、 C^* 環の理論の研究の初期の段階から繰返に研究されてき、徐々に精密化された部分解が得られてきたが、まだ完全解決とみるには至っていない。

本文では、この予想に関し得られてきた部分解を紹介すると共に、この予想を研究するのに役立つかも知れない、著者による最近の若干の結果を述べる。

C を局所コンパクト、ハウスドルフ空間上の無限遠点で、 0 と異なる連続関数全体のつくる C^* 環とする。クラシカルな Stone-Weierstrass の定理は C の部分 C^* 環 D が C と一致するための条件を与えている。この定理の、もっとも基本的な非可換化の予想は次の通りである。

予想。 A を C^* -環, B を A の C^* -部分環, $P(A)$ を A 上の純粋状態全体の集合, 0 を A 上で恒等的に 0 とする関数とする。 B が $P(A) \cup (0)$ と分離する (即ち, 2つの異なる $\varphi, \varphi_2 \in P(A) \cup (0)$ に対し, $\varphi_1(b) \neq \varphi_2(b)$ となる如き b が B の中に存在する) とする。 このとき $A=B$ である。

1951年に, Kaplansky [6] は, すべての GCR 環 (即ち type I C^* -環) に対して, この予想が正しいことを示した。

1960年に, Glimm [5] は次のもう少し弱い形の Stone-Weierstrass theorem が成立することを示した。

Glimm の定理。 $\overline{P(A)}$ を $P(A)$ の, ステート空間 $S(A)$ 内での閉包とする。 もし B が $\overline{P(A)} \cup (0)$ と分離するならば $A=B$ である。

残念ながら, 多くの C^* -環に対して, $\overline{P(A)} = S(A)$ となり, これらの C^* -環に対しては, Glimm の定理は自明となる。従って, Glimm の定理は完全解決からは, ほど遠いものである。

1969年に, Akemann [1] は, もう一つの弱い形の定理を示した。 1970年に, 著者は, von Neumann の reduction theory を使用して, A が可分 C^* -環で, B が nuclear 又は, すべての状態 φ に対し, $\pi_\varphi(A)$ から $\pi_\varphi(B)''$ への 1 対 1 の線型写像 π_φ が存在して, $\pi_\varphi(\pi_\varphi(b)) = \pi_\varphi(b)$ ($b \in B$) ならば, 予想は真である ([9])

このように示した。

この結果の後、多くの研究者は予想は、少なくとも可分 C^* 環については真であると信じるようになったが、非可分 C^* 環については信じていない研究者も多くいるように思われる。

1981年に、Anderson & Bunce は著者の上の結果と使用して多くの興味ある結果を得て居る ([3])。1984年に、Longo [7] と Popa [8] は上の Anderson & Bunce の結果を用いて、独立に、Stone-Weierstrass 問題についての非常に重要な結果を得た。それについて少し述べてみたい。

1971年に、予想に関連したものといて、著者は2つの問題と上げた ([9])。一つは factorial Stone-Weierstrass Conjecture といわれるもので次の通りである。

予想'. $F(A)$ を A の factorial 状態全体の集合とする。
 B が $F(A) \cup \{0\}$ を分離するならば、 $A = B$ 。

この予想'は、本来の予想より弱い形であるが、 A が可換又は type I C^* 環ならば、本来の予想と同等である。また、 C^* 環が type I ではないときは、表現論の Building Block としては、既約表現より Factor 表現の方が適切であるから、予想'が解かれるならば、可成り useful な定理となるものと思われる。

もう一つの問題は次の通りである。

問題. A と C^* 環, B と A の部分 C^* 環とする。 φ と B の factorial 状態とするとき, φ は A の factorial 状態に拡大できるであろうか?

Longo と Popa は, それぞれ独立に, 可分 C^* 環に対し, 予想と問題が肯定的であることを示した。 Longo と Popa の factorial 状態の拡大定理は Stone-Weierstrass 予想とは独立した重要な定理であり, これと非可分に拡大する問題は, きわめて興味深い。 予想に関しては, 重要ではあるが我々の究極の目標とは言ひ難い。 少なくとも, 可分 C^* 環に対し, 本来の予想を解くことは C^* 環研究者に果せられぬ急務のようと思われる。 本文の目的は若い研究者が予想を研究するよう刺激することである。 なお, 最近の研究論文として, Akemann & Shultz [2] と Batty [4] がある。

2. 若干の結果. A と可分 C^* 環, B と A の部分 C^* 環とする。 この節を通じて, B は $P(A) \cup \{0\}$ と分離するものとして仮定する。 一般性を失わず, A が単位元 1 をもち, B が, それを含んでいると仮定できる (cf. [9])。

この場合, " B が $P(A) \cup \{0\}$ を分離する " ということと "
 B が $P(A)$ を分離する " ということは同等である。 したがって,
 次の二つの補題を述べる。

補題 1 ([9])。 $\{\pi, \mathcal{H}\}$ を A の可分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の任意の $*$ -表現で, $\pi(1)$ が $\mathcal{H}$ の単位作用素と取るものとする。
 $\pi(A)'$ ($\pi(B)'$) をそれぞれ $\pi(A)$ ($\pi(B)$) の commutant,
 C を $\pi(A)'$ の任意の極大可換 C^* -部分環, $(\pi(A), C)''$ を $\pi(A)$ と C
 で生成される $B(\mathcal{H})$ の部分 W^* -環とする。 もし, P が $\pi(A)$ の
 selfadjoint portion から $(\pi(A), C)''$ の selfadjoint portion の中への
 real linear mapping で, $P(\pi(b)) = \pi(b)$ ($b \in B^S$), かつ $\|P\| \leq 1$
 とすると, $P(\pi(a)) = \pi(a)$ ($a \in A^S$) である, ことより $A^S(B^S)$ は, それ
 ぞれ A (B) の selfadjoint portion となる。

補題 2 ([3])。 φ を B の factorial 状態, $\{\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi\}$ を
 φ によって与えられる B の GNS-表現, D を $\pi_\varphi(B)$ の commutant
 $\pi_\varphi(B)'$ の任意の極大可換 C^* -部分環, $(\pi_\varphi(B), D)''$ を $\pi_\varphi(B)$ と
 D によって生成された $B(\mathcal{H}_\varphi)$ の部分 W^* -環とする。 このとき,
 A の $*$ -表現 $\{\pi, \mathcal{H}_\varphi\}$ が次の条件を満たすように存在する:
 (i) $\pi(A) \subset (\pi_\varphi(B), D)''$; (ii) $\pi_\varphi(b) = \pi(b)$ ($b \in B$). 更に,
 もし A の $*$ -表現 $\{\pi_1, \mathcal{H}_\varphi\}$ が (i)' $\pi_1(A) \subset (\pi_\varphi(B), D)''$; (ii)' $\pi_1(b) = \pi_\varphi(b)$
 ($b \in B$) とみたすならば $\pi_1(a) = \pi(a)$ ($a \in A$) である。

さて, B が $P(A) \cup (0)$ と分離するから, $B \not\subseteq A$ であることが定まる。このとき, $B^\circ \neq \emptyset$, A の双対空間 A^* に於ける B の polar とし, $S \in B^\circ$ の selfadjoint portion の単位球とし, f と S の一つの端点とすると, $f = f^+ - f^-$ なる直交分解が成り立つ。 $\psi = f^+ + f^-$ とすると, ψ は A の状態である。このとき, 次の2つの補題を示すことができる。

補題 3. $\{\pi_\psi, \mathcal{H}_\psi\}$ を ψ によって作られる A の GNS 表現, $\overline{\pi_\psi(A)} (\overline{\pi_\psi(B)})$ とし, それぞれ, $\pi_\psi(A) (\pi_\psi(B))$ の弱閉包, $Z(\overline{\pi_\psi(A)}) (Z(\overline{\pi_\psi(B)}))$ とし, それぞれ, $\overline{\pi_\psi(A)} (\overline{\pi_\psi(B)})$ の中心とすると, $Z(\overline{\pi_\psi(B)}) \subset Z(\overline{\pi_\psi(A)})$ である。

補題 4. 補題 3 に於ける, A の状態 ψ の B に制限したものは, B の factorial 状態である。

補題 4 から, A の状態 φ で, $[\pi_\varphi(A)1_\varphi] = [\pi_\varphi(A)']1_\varphi$, $\overline{\pi_\varphi(B)} \subsetneq \overline{\pi_\varphi(A)}$, かつ $\overline{\pi_\varphi(B)}$ が factor とする, GNS 表現 $\{\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi\}$ が存在することから判る。 $\mathcal{I}$ は π_φ の kernel とする。一般性を失わずに, $\mathcal{I} = (0)$ と仮定することからできる。実際, $B + \mathcal{I}/\mathcal{I}$ は $P(A/\mathcal{I}) \cup (0)$ と分離し, π_φ は $A/\mathcal{I}$ の $*$ -表現を induce するからである。

さて, A と $\pi_q(A)$ を同一視することにする。このとき, 次の補題を示すことができる。

補題 5. $\{\pi_q(a) \mid a \in A\}$ を A の $\mathcal{H}_q$ 上での $*$ -表現 π , $\pi_q(b) = b$ ($b \in B$) を満たすものの全体とし, $\mathcal{U}$ を $\{\pi_q(A) \mid a \in A\}$ で生成される $B(\mathcal{H}_q)$ の部分 C^* 環とすると, $\mathcal{U}$ から A 上への $*$ -準同型 ρ 次の条件を満たすものが存在する: (i) $\rho(a) = a$ ($a \in A$); (ii) $\mathcal{U} = A + I$, および $A \cap I = (0)$; (iii) I は ρ の kernel である。

補題 6. $\mathcal{U}$ と I の任意の可分部分 C^* 環, C と B' の任意の極大可換部分 C^* 環とする。このとき, C の中にユニタリ元の列 $\{u_n\}$ が存在して, $\mathcal{U}$ の任意の元 x に対し, $\{u_n^* x u_n\}$ は強位相に限り 0 に収束する。

$\mathcal{U}$ を $\mathcal{U}$ と B' によって生成される $B(\mathcal{H}_q)$ の部分 C^* 環, J と I を含む $\mathcal{U}$ の最小の両側閉イデアルとする。このとき, 補題 6 を用いて次の命題を示すことができる。

命題 1. D と B' の任意の極大可換部分 C^* 環, $(B, D)''$ を B と D によって生成される $B(\mathcal{H}_q)$ の部分 W^* 環とする。このとき, $(B, D)'' \cap J = (0)$ である。

次に, D_1, D_2 を任意の2つの B' の極大可換部分 C^* -環とする。

命題 2. もし, $\{(B, D_1)'' + (B, D_2)''\} \cap I = (0)$ ならば

Stone-Weierstrass 予想は真である。

証明。補題 2 により, A の $*$ -表現 π_1, π_2 が存在して,
 $\pi_i(b) = b, \pi_i(A) \subset (B, D_i)''$ ($i=1, 2$)。特に, D_1 を A' の極大可
 換部分 C^* -環とすると, B が $P(A)$ を分離することと, reduction
 理論により D_1 は B' の極大可換部分 C^* -環である。従って, 補題

2 により, π_1 は A の恒等表現, 即ち $\pi_1(a) = a$ ($a \in A$) である。

補題 5 により, 写像 $a \mapsto p(\pi_2(a))$ ($a \in A$) は A の $*$ -表現で

$p(\pi_2(b)) = b$ ($b \in B$) かつ, $p(\pi_2(A)) \subset A \subset (B, D_1)''$ 。故に,

補題 2 により, $p(\pi_2(a)) = a$ ($a \in A$)。従って, $a - \pi_2(a) \in I$ 。

仮定より $a = \pi_2(a)$ 。即ち, 任意の D に対し, $A \subset (B, D)''$ 。

よって, $A' \cap (B, D)' = D$ 。即ち A' は B' の任意の極大可換部分

C^* -環を含む, よって $A' \cap B' = B'$ 。これは $A'' \supsetneq B''$ に矛盾する。(終)。

注意。命題 1 と命題 2 の仮定との間には, かなりの開
 きがある。然しそれから matrix method 等の方法によって命題 1 と
 命題 2 の仮定の形に拡大できるのだろうか?

補題 7. $\phi/J = A \otimes_{\beta} B'$, ここで β は一つの C^* -クロスノルム
 である。

この補題の証明は, B が $P(A)$ を分離することと, 補題 3 を

使用して得られる。

B'' は factor であるから, B と B' で生成される $B(\mathcal{H}_q)$ の部分 C^* 環は $B \otimes_{\delta} B'$ (ここで, δ は一つの C^* クロスノルム) とかける。もし, $\delta \leq \beta$ かつ $B \otimes B'$ で示せば, Stone-Weierstrass 予想は真であることは容易に判る。特に, δ が the least C^* cross norm であれば予想は真である。

次に C^* 環のテンソル積を使用した方法を考えてみよう。

$A \otimes B'$ を A と B' の代数的なテンソル積とする。このとき, $B \otimes B'$ は $A \otimes B'$ の $*$ -部分環と考えられる。 B' が factor であるから, $B \otimes B'$ は, B と B' で生成される $B(\mathcal{H}_q)$ の部分 C^* 環 E の中に, canonically に imbed できる。 $B \otimes B'$ の元 x に対し, x の E におけるノルムを $\|x\|$ で示すことにする。 A^S, B'^S を, それぞれ, A, B' の selfadjoint portion とし, $A^S \otimes B'^S$ 上に新しいノルム $\| \cdot \|$ を定義することとを考える。 $x \in A^S \otimes B'^S$ に対し, $x = \sum_{i=1}^n f_i$, ここで $f_i \in C_i^S \otimes D_i^S$ (C_i は A の可換部分 C^* 環, D_i は B' の可換部分 C^* 環) と表わし, $\|x\| = \inf \sum_{i=1}^n \|f_i\|$ (ここで, $\inf$ は上の表現 x のすべての expression を動くものとし, $\|f_i\|$ は $C_i \otimes_{\lambda} D_i$ に於ける f_i のノルムを示す, λ は the least cross norm である)。このとき, 明らかに, $\alpha(x) \leq \|x\|$ ($x \in A^S \otimes B'^S$) である (ここで, α は the least C^* cross norm)。

命題 3. もし, $\|x\| \leq \|x\|$ ($x \in B^S \otimes B'^S$) ならば

Stone-Weierstrass 予想は真である。

証明. $x \in B^S \otimes B'^S$ に対して, $\tilde{\varphi}(x) = (x1_{\varphi}, 1_{\varphi})$ とおくと $\tilde{\varphi}$

は $B^S \otimes B'^S$ 上の real linear functional である. $|\tilde{\varphi}(x)| \leq \|x\|$

($x \in B^S \otimes B'^S$) より, $\tilde{\varphi}$ は $A^S \otimes B'^S$ 上の real linear functional

f に, $|f(x)| \leq \|x\|$ ($x \in A^S \otimes B'^S$) をみたし拡大できる.

a ($0 \leq a \leq 1$) $\in A$, b' ($0 \leq b' \leq 1$) $\in B'$ に対して, $\|1 \otimes 1 - a \otimes b'\|$

$= \lambda(1 \otimes 1 - a \otimes b') \leq 1$. 従って, $|f(1 \otimes 1 - a \otimes b')| \leq 1$.

故に $f(a \otimes b') \geq 0$. $f_a(b') = f(a \otimes b')$ ($b' \in B'^S$) とおくと,

f_a は B'^S 上の positive, real linear functional である. f_a は

B' 上の positive linear functional $\tilde{f}_a$ に一意に拡大できる.

$f(\|a\|1 - a \otimes b') \geq 0$ ($b' (\geq 0) \in B'$) であるから,

$\tilde{f}_a(b') \leq \|a\|\varphi(b')$ ($b' (\geq 0) \in B'$). 従って, B'' の元

$T(a)$ が存在して, $\tilde{f}_a(b') = (T(a) \otimes b' 1_{\varphi}, 1_{\varphi})$ ($b' \in B'$),

かつ, $\|T(a)\| \leq \|a\|$. $[B' 1_{\varphi}] = \mathcal{H}_{\varphi}$ であるから, このよ

うに $T(a)$ は一意である. また, $b (\geq 0) \in B$ ならば, $T(b) = b$.

線型性により T は A 上に一意に拡大できる. $T(\|a\|1 \pm a)$

$= \|a\|1 \pm T(a)$ であるから, $\|T(a)\| \leq \|a\|$ ($a \in A^S$).

故に, 補題 1 により, $T(a) = a \in B''$ ($a \in A^S$).

即ち $A \subset B''$. これは矛盾である. (終).

いま, 命題 3 の仮定が成立しているとして, A の可換部分 C^* 環 C_i ($i=1, 2, \dots, n$) と B' の可換部分 C^* 環 D_i ($i=1, 2, \dots, n$), 及び $A_i^S \otimes C_i^S$ の元 f_i ($i=1, 2, \dots, n$) が存在して, $f_1 + f_2 + \dots + f_n$

は $B^S \otimes B'^S$ に属し, $\lambda(f_1) + \lambda(f_2) + \dots + \lambda(f_n) < \|f_1 + f_2 + \dots + f_n\|$,
 ここで, $\lambda(f_i)$ は f_i の $C_i \otimes_\lambda D_i$, 即ち C^* -テンソル積 $C_i \otimes_\alpha D_i$
 (可換 C^* -環に於ては $\alpha = \lambda$ に注意) に於ける f_i の, ルール,
 $\|f_1 + f_2 + \dots + f_n\|$ は, $B \times B'$ によって生成される $B(\mathcal{H})$ の部分 C^* -
 環に於ける $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ ($\in B^S \otimes B'^S$) の, ルールである。

$$\begin{aligned} & \text{従って} \quad (\lambda(f_1)1 \otimes 1 \pm f_1) + (\lambda(f_2)1 \otimes 1 \pm f_2) + \dots + (\lambda(f_n)1 \otimes 1 \pm f_n) \\ & = \left(\sum_{i=1}^n \lambda(f_i) \right) 1 \pm (f_1 + f_2 + \dots + f_n) \end{aligned}$$

故に $C_i \otimes_\lambda D_i$ に positive element h_i が存在して, $h_i \in C_i^S \otimes D_i^S$
 かつ, $\sum_{i=1}^n h_i \in B^S \otimes B'^S$, さらに $\sum_{i=1}^n h_i$ は $B \times B'$ で生成される
 $B(\mathcal{H})$ の部分 C^* -環, 即ち, $B \otimes_\delta B'$ で non-positive, self-
 adjoint element $\tau \neq 0$ がある。従って次の予想を解けば "Stone-
 Weierstrass 予想は解決する。

予想". 上の $\sum_{i=1}^n h_i$ は $B \otimes_\delta B'$ で positive element τ
 がある。

References

1. C. Akemann, The Stone-Weierstrass problem of C^* -algebras, J. Functional Analysis 4, 277-294 (1969)
2. C. Akemann and F. Shultz, Perfect C^* -algebras,

Mem. Amer. Math. Soc. 55 (1985), no. 326

3. J. Anderson and Bunce, Stone-Weierstrass theorems for separable C^* -algebras, J. Operator Theory 6, 363-374 (1981)

4. C. Batty, to appear

5. J. Glimm, A Stone-Weierstrass theorem for C^* -algebras, Ann. Math., 72, 216-244 (1960)

6. I. Kaplansky, The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 70, 219-255 (1951)

7. R. Longo, Solution of the factorial Stone-Weierstrass conjecture, Invent. Math. 76, 145-155 (1984)

8. S. Popa, Semiregular maximal abelian $*$ -subalgebras and the solution to the factor state Stone-Weierstrass theorem, Invent. Math., 76, 157-161 (1984)

9. S. Sakai, C^* -algebras and W^* -algebras, Ergebnisse der Math., 60 (1971), Springer-Verlag, Heidelberg