

Theta functions と domain functions の関係

東工大 理 山田 陽

§. 0. 目的

Finite bordered Riemann surface 上の重要な domain function e.g. Bergmann kernel, Szegő kernel, Rudin kernel 従って Ahlfors function, H_2 -extremal function などはその double 上の theta function と prime form を使って表現できる。これらの間の主な関係式はすべて theta の addition-formula から導びかれる。ここではこれらの事実の説明と、その関数論的応用をいくつか示す。

§. 1. 記号と基本的性質

以下証明は省略するか、詳しいことは J. D. Fay の Springer Lecture note Vol. 352. "Theta functions on Riemann surfaces" (特に 1, 2, 6 章) を参照していただくことにする。簡単のため、 $R \in n$ 重連結平面正則領域, $\hat{R} \in R$ の double, $\phi \in \hat{R}$ の

canonical anti-conformal involution とする. $\Gamma_j \in \partial R$ の成分, $\hat{R}$ の symmetric canonical homology basis ϵ

$$\phi(A_j) = -A_j, \quad \phi(B_j) = B_j \quad \text{in } H_1(\hat{R}, \mathbb{Z}),$$

$$B_j = \Gamma_j \quad (j=1, \dots, n-1)$$

となるように選ぶ. 周期行列

$$\epsilon (2\pi i I, \tau) \quad (I \text{ は単位行列})$$

として, 対応する ω - 種正規

微分を $\omega_1, \dots, \omega_g$ ($g=n-1$) とする.

Riemann の theta function $\theta(z)$ は

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp \left\{ \frac{1}{2} {}^t n \tau n + {}^t n z \right\}, \quad z \in \mathbb{C}^g$$

で定義され, 次の周期を持つ:

$$\theta(z + 2\pi i (\delta_{jk})_{j=1}^g) = \theta(z), \quad (k=1, \dots, g)$$

$$\theta(z + (\tau_{jk})_{j=1}^g) = e^{-\frac{\tau_{kk}}{2} - z_k} \theta(z),$$

ただし δ_{jk} は Kronecker の記号である. Prime-form $E(x, y)$

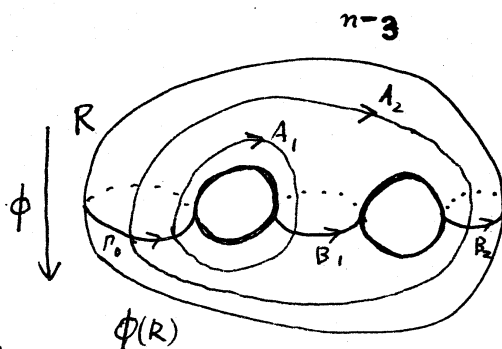
は $\hat{R} \times \hat{R}$ 上の line bundle の section であり, 次の性質を持つ:

$\forall y \in \hat{R}$ を固定した時, x について multiplicative な $1/2$ order holomorphic differential であり, A_j (resp. B_j) cycle 上で multiplier 1 (resp. $\exp\{-\frac{\tau_{jj}}{2} - (x-y)_j\}$) を持つ.

$E(x, y) = -E(y, x)$ で, zero 点は $x=y$ に一位の zero を持つ

のみ.

Prime form の対数微分より, 基本的な微分を得る.



$$\omega_{b-a}(x) = \frac{d}{dx} \ln \frac{E(x,b)}{E(x,a)} dx$$

$$\omega(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln E(x,y) dx dy$$

とある.

$\omega_{b-a}(x)$ は a, b でそれぞれ residue $-1, 1$ を持つ三種正規微分であり, $\omega(x,y)$ は $x \neq y$ で holomorphic, $x=y$ の近傍で

$$\omega(x,y) = \frac{dx dy}{(x-y)^2} + \text{regular terms},$$

また周期は

$$\int_{A_j} \omega(x,y) dy = 0, \quad \int_{B_j} \omega(x,y) dy = v_j(x), \quad (j=1, \dots, g).$$

Prop. 1.1. 両辺を symmetric coordinate で evaluate したとき,

Involution $\bar{x} = \phi(x)$ に関して, 次の対称性かなり立つ.

$$\theta(\bar{z}) = \overline{\theta(z)}, \quad v_j(\bar{x}) = \overline{v_j(x)}, \quad E(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{E(x,y)},$$

$$\omega_{b-a}(\bar{x}) = \overline{\omega_{b-a}(x)}, \quad \omega(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{\omega(x,y)}$$

$$\text{for } z \in \mathbb{C}^g, \quad x, y \in \hat{R}.$$

また $i E(x, \bar{x}) > 0$ for $x \in R$.

Degree 0 の divisor D に対して, $\hat{R}$ の canonical dissection 内の積分 $(\int_D v_j)_{j=1}^g \in \mathbb{C}^g$ を D と略記する. Prop. 1.1. より

$$\theta(\bar{D}) = \overline{\theta(D)}$$

から. 次に canonical homology basis $(A_j, B_j)_{j=1}^g$ と $(\tilde{A}_j, \tilde{B}_j)_{j=1}^g$, $=(B_j, -A_j)_{j=1}^g$ に取替えた時, $\tilde{\theta}, \tilde{v}_j, \tilde{E}, \tilde{\omega}$ がそれぞれ $\theta,$

v_j, E, ω に対応した a とする. Theta の transformation theory より

Prop. 1.2.

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}\left(\int_x^y \tilde{v}\right) &= \text{const} \times \theta\left(\int_x^y v\right) \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{i,j} (\tau^{-1})_{ij} \int_x^y v_i \int_x^y v_j\right\}, \\ \tilde{E}(x,y) &= E(x,y) \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{i,j} (\tau^{-1})_{ij} \int_x^y v_i \int_x^y v_j\right\}, \\ \tilde{\omega}(x,y) &= \omega(x,y) - \sum_{i,j} (\tau^{-1})_{ij} v_i(x) v_j(y).\end{aligned}$$

§ 2. Bergman kernel, Szegő kernel と addition-formula.

Bergman kernel $K(x, \bar{y})$, exact Bergman kernel $\tilde{K}(x, \bar{y})$, Szegő kernel $\hat{K}(x, \bar{y})$ は theta, prime で簡単に表現できる ([1], [2]).

Prop. 2.1.

$$\begin{aligned}K(x, \bar{y}) &= -\frac{1}{\pi} \omega(x, \bar{y}), \quad \tilde{K}(x, \bar{y}) = -\frac{1}{\pi} \tilde{\omega}(x, \bar{y}), \\ \hat{K}(x, \bar{y}) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\theta(x-\bar{y})}{\theta'(0) E(x, \bar{y})}.\end{aligned}$$

証明. K と $\tilde{K}$ の方は両辺の A_j, B_j period と singularity を比較して得られる. $\hat{K}$ に関しては, 右辺が $H_2(R)$ に関する再生性を持つことを $E(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{E(x, y)}$ などを用いて留数定理より示すことで得られる. □

Szegő kernel がわかれば必然的に導関数を最大にする Ahlfors function が theta で書けるか, もっと一般に次の定理が成り立つ. ([1] p.130)

Thm. 2.2. R は plane regular region とする. $a, b \in R$ のとき $F(a) = 0$, $|F(x)| \leq 1$ in R , $|F(b)| = 1$ なる Ahlfors function は

$$F(x) = \varepsilon \frac{\theta(x-\bar{a}-s) E(x, a)}{\theta(x-a-s) E(x, \bar{a})}, \quad (|\varepsilon| = 1, s = \frac{1}{2}(b+\bar{b}-a-\bar{a}) \in \mathbb{R}^2,$$

また b で residue が 1 と正規化した conjugate extremal differential は

$$\frac{\theta^2(x-a-s)}{\theta^2(b-a-s)} \cdot \frac{E(x, \bar{a}) E(b, \bar{b}) E(a, b)}{E(x, b) E(x, \bar{b}) E(x, a) E(b, \bar{a})}$$

で与えられる。

さて, θ と $\prime$ の間に成り立つ最も重要な関係式である addition-formula を書きあげよう. 証明は後述する.

Prop. 2.3. $\forall x, y, a, b \in \hat{R}$, $\forall e \in \mathbb{C}^2$ に対して

$$\frac{\theta(x-a-e) E(x, b)}{\theta(x-b-e) E(x, a)} - \frac{\theta(y-a-e) E(y, b)}{\theta(y-b-e) E(y, a)} = \frac{\theta(e) \theta(x+y-a-b-e) E(x, y) E(b, a)}{\theta(x-b-e) \theta(y-b-e) E(x, a) E(y, b)}.$$

この式はたとえば Ahlfors function の一次変換の計算などに使える. また addition-formula を微分して得られる次の 2 つの Cor. もよく使われる. $y \rightarrow x$ とし

Cor. 2.4. $\forall x, a, b \in \hat{R}$, $\forall e \in \mathbb{C}^2$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\theta(x-a-e) E(x, b)}{\theta(x-b-e) E(x, a)} &= \frac{\theta(e) \theta(2x-a-b-e) E(a, b)}{\theta^2(x-b-e) E^2(x, a)}, \\ \frac{\theta(x-a+e) \theta(x-b-e)}{\theta(e) \theta(e+b-a)} \cdot \frac{E(a, b)}{E(x, a) E(x, b)} &= \omega_{b-a}(x) + \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\partial \theta}{\partial z_j}(e+b-a) - \frac{\partial \theta}{\partial z_j}(e) \right] v_j(x). \end{aligned}$$

$b \rightarrow a$ とし

Cor. 2.5. $\forall x, y \in \hat{R}, \forall e \in \mathbb{C}^2$ に対し

$$\frac{\theta(x-y+e)\theta(x-y-e)}{\theta^2(e)E^2(x,y)} = \omega(x,y) + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 h \theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(e) v_i(x) \bar{v}_j(y).$$

Prop. 1.1, 1.2, 2.1, Cor. 2.5 より Bergman kernel, exact Bergman kernel, Szegő kernel の間の関係式が得られる。

Thm. 2.6. $\forall x, y \in R$ に対し

$$\begin{aligned} 4\pi \hat{K}^2(x, \bar{y}) &= K(x, \bar{y}) - \frac{1}{\pi} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 h \theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0) v_i(x) \bar{v}_j(y) \\ &= \tilde{K}(x, \bar{y}) + \frac{1}{\pi} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 h \tilde{\theta}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0) \tilde{v}_i(x) \bar{\tilde{v}}_j(y), \\ \tilde{K}(x, \bar{y}) &= K(x, \bar{y}) + \frac{1}{\pi} \sum_{i,j} (\tau^{-1})_{ij} v_i(x) \bar{v}_j(y). \end{aligned}$$

この thm. から kernel の間の大小が比較できる。

Cor. 2.7. $\sqrt{\pi \tilde{K}(x, \bar{x})} < 2\pi \hat{K}(x, \bar{x}) < \sqrt{\pi K(x, \bar{x})}$ for $\forall x \in R$.

証明. θ の定義式に戻って, 容易に行列 $\left(\frac{\partial^2 h \theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0)\right)_{i,j=1}^2$, $\left(\frac{\partial^2 h \tilde{\theta}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0)\right)_{i,j=1}^2$ が正定値であることがわかる (Hejhal). あとは thm. 2.6. より明らか. $\square$

ついでながら, prime form は capacity と密接な関係がある。

Sario-Oikawa の記号に従って $C_B(x)$ を R の点 $x \in R$ に関する capacity, $C_{SB}(x)$ を単葉有界関数の導関数の極値とする.

Canonical homology basis $\{\tilde{A}_j, \tilde{B}_j\}_{j=1}^g$ において ρ_0 を除いた境界成分を $\{\tilde{A}_j\}_{j=1}^g$ としたか, ここで ρ_0 のかわりに ρ_k を除いて作った canonical homology basis から同様に構成された prime form を $\tilde{E}_k(x, y)$ と書こう.

Prop. 2.8. $\forall x \in R$ に対し

$$C_B(x) = \frac{1}{i E(x, \bar{x})}, \quad C_{SB}(x) = \max_{0 \leq k \leq n} \left\{ \frac{1}{i \tilde{E}_k(x, \bar{x})} \right\}.$$

証明. $C_B(x)$ に対しては等式

$$e^{-g(x, t) - i g^*(x, t)} = \frac{E(x, t)}{i E(x, \bar{t})}$$

より明らか. ただし $g(x, t)$ は R の t を極とする Green's function とする. 同様に $\frac{\tilde{E}_k(x, t)}{i \tilde{E}_k(x, \bar{t})}$ が境界成分 ρ_k に関する capacity function となることより, Ahlfors-Beurling [3] を使えば $C_{SB}(x)$ に等しいことがわかる. $\square$

Analytic capacity を $C_B(x)$ とすると, Szegő kernel による表現から,

$$C_B(x) = 2\pi \hat{K}(x, \bar{x}) = \frac{\theta(x - \bar{x})}{\theta(0) i E(x, \bar{x})}.$$

Addition-formula (Cor. 2.5.) を書きなおして

$$\theta(2x - 2y - e) \theta(e) = -E^2(x, y) \theta^2(x + y + e) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \frac{\theta(x - y + e)}{E(x, y)}.$$

この式より直ちに

Prop. 2.9. $C_B(x)$ の curvature を $\kappa_B(x)$ とすると,

$$\kappa_B(x) = -4 \cdot \frac{\theta'(0) \theta(2x-2\bar{x})}{\theta^2(x-\bar{x})}, \quad x \in R.$$

Supporting metric 又は Bergman の minimal integral の方法によ
って $\kappa_B(x) < -4$ ($\forall x \in R$) が割合簡単に証明される (岡田 [4] [5]).
Theta-prime の立場からは, Szegő kernel の Schiffer variation (Schiffer-
Hawley [6]) に起源を持つ次の等式がある.

Prop. 2.10. $\forall x, y \in \hat{R}$ に対して

$$\frac{\theta(2x-2y)}{\theta(0)E^2(x,y)} - \frac{\theta^2(x-y)}{\theta'(0)E^2(x,y)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^g \frac{\partial^4 \ln \theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j \partial z_k \partial \bar{z}_l}(0) v_i(x) v_j(x) v_k(y) v_l(y).$$

証明. Cor. 2.5. を 2 度使うことにより,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{\theta^2(x-y)}{\theta'(0)E^2(x,y)} \sum_{i,j} \left[\frac{\partial^2 \ln \theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(x-y) - \frac{\partial^2 \ln \theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0) \right] v_i(x) v_j(y) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\theta^2(x-y)}{\theta'(0)E^2(x,y)} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \ln \frac{\theta(x-y+z)\theta(x-y-z)}{\theta^2(z)E^2(x-y)} \Big|_{z=0} v_i(x) v_j(y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \frac{\theta(x-y+z)\theta(x-y-z)}{\theta^2(z)E^2(x-y)} \Big|_{z=0} v_i(x) v_j(y) = \text{右辺} \quad \square \end{aligned}$$

このことから

$$\kappa_B(x) < -4 \iff \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^4 \ln \theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j \partial z_k \partial \bar{z}_l}(0) v_i(x) v_j(x) \overline{v_k(x) v_l(x)} > 0$$

がわかる. 今度は不幸にして右辺の複二次形式の正値性が,

theta の定義式より直接に計算で求まるかどうかあからない。

§.3. Hardy space $H_2(R)$, $H_2'(R)$ の reproducing kernel.

ここでは Hardy space の reproducing kernel と extremal function を theta で表現しよう。

$t \in R$ を固定して, $\Omega(x) = dg(x, t) + i * dg(x, t)$ とおく。

Canonical homology basis のとりかたにより $\Omega(x) = \omega_{\bar{z}-t}(x)$ となる。 R 上の H_2 -function (H_2 -differential) の作る Hilbert space を $H_2(R)$ ($H_2'(R)$) とおく。ただし内積はそれぞれ

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial R} f \bar{g} \Omega, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{\bar{z} \bar{\eta}}{\Omega} ; \quad f, g \in H_2(R), \quad \bar{z}, \bar{\eta} \in H_2'(R),$$

で与える。Green's function $g(z, t)$ の R 内の critical point を $a_1, \dots, a_g$ とし, $\Lambda_t(x, y)$ を次式で定義する:

$$\Lambda_t(x, y) = \frac{1}{\det (v_i(a_j))_{i,j=1}^g} \cdot \det \begin{pmatrix} \omega_{\gamma-t}(x) & \omega_{\gamma-t}(a_1) & \dots & \omega_{\gamma-t}(a_g) \\ v_1(x) & v_1(a_1) & \dots & v_1(a_g) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_g(x) & v_g(a_1) & \dots & v_g(a_g) \end{pmatrix}.$$

この時, $A = \sum_{j=1}^g a_j$ は positive differential $\Omega(z)$ の R 内の zero divisor であることより index $i(A) = 0$, 従って $\det(v_i(a_j)) \neq 0$ に注意する。まず $\Omega(x)$ と $\Lambda_t(x, y)$ を theta で表現しよう。

Prop. 3.1. $\Delta \in J_{g-1}(\hat{R})$ を Riemann's divisor class として $e = A - t - \Delta \in iR^g$ とおくと,

$$\Omega(x) = \frac{\theta(x-t-e) \theta(x-\bar{t}+e) E(t, \bar{t})}{\theta(e) \theta(t-\bar{t}+e) E(x, t) E(x, \bar{t})} \quad /$$

$$\Lambda_t(x, y) = \frac{\theta(x-t-e) \theta(x-y+e)}{\theta(e) \theta(y-t-e)} \cdot \frac{E(t, y)}{E(x, t) E(x, y)} \quad .$$

証明. $\Omega(x)$ について 両辺の divisor の一致から. $\Lambda_t(x, y)$ について, 両辺の差が正則で $a_j (j=1, \dots, g)$ に zero を持つことより ($i(A)=0$!). □

$H_2(R)$ の reproducing kernel (Rudin kernel) を $R_t(x, \bar{y})$, $H_2'(R)$ の reproducing kernel (differential Rudin kernel) を $\hat{R}_t(x, \bar{y})$ と書くことにする.

Prop. 3.2.

$$\begin{aligned} R_t(x, \bar{y}) &= \Lambda_t(x, \bar{y}) / \Omega(x) \\ &= \frac{\theta(t-\bar{t}+e) \theta(x-\bar{y}+e)}{\theta(x-\bar{t}+e) \theta(t-\bar{y}+e)} \cdot \frac{E(x, \bar{t}) E(\bar{y}, t)}{E(\bar{t}, t) E(x, \bar{y})} \quad / \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_t(x, \bar{y}) &= \Lambda_t(\bar{y}, x) \Omega(x) \\ &= \frac{\theta(x-\bar{y}-e) \theta(x-\bar{t}+e) \theta(t-\bar{y}+e) E(t, \bar{t})}{\theta^2(e) \theta(t-\bar{t}+e) E(x, \bar{y}) E(x, \bar{t}) E(\bar{y}, t)} \quad / \end{aligned}$$

とくに

$$\hat{R}_t(x, \bar{y}) = R_t(\bar{y}, x) \Omega(x) \Omega(\bar{y}) \quad .$$

証明は留数定理より容易に得られる. ついでながら,

$\omega_{a-b}(x) + \omega_{b-c}(x) = \omega_{a-c}(x)$ に注意すると, $\Lambda(x, y)$ の定義式より $\Lambda_a(x, y) + \Lambda_b(x, a) = \Lambda_b(x, y)$ となる. これに prop. 3.1. の theta の式を代入して整理すると addition-formula (prop. 2.3.) が簡単に得られる.

話を元に戻して, $H'_2(R)$ の直交分解を考へる.

$$\{f \in H_2(R) \mid f(t) = 0\} = H_{2,t}(R)$$

とある.

$H_{2,t}(R) \ni f \longmapsto f\Omega = f\omega_{\bar{z}-t} \in H'_2(R)$: into, isometry の対応によって $H_{2,t}(R)$ を $H'_2(R)$ の subspace とみなす. このとき,

Prop. 3.3. $H'_2(R) = H_{2,t}(R) \oplus \{\text{holom. diff. on } \hat{R}\}.$

証明. $\forall \eta$: holom. diff. on $\hat{R}$ に対して, $\overline{\eta(\phi(y))}$ は R で正則より

$$\int_{\partial R} \frac{f(y)\Omega(y)\overline{\eta(y)}}{\Omega(y)} = \int_{\partial R} f(y)\overline{\eta(\phi(y))} = 0 \quad \text{for } \forall f \in H_{2,t}(R).$$

これより直交性は明らか. 逆に, $\eta \in H'_2(R)$ で

$$\int_{\partial R} f\bar{\eta} = 0 \quad \text{for } \forall f \in H_{2,t}(R)$$

と仮定する. Cauchy-Riemann の定理より, t に高々 simple pole を持つほかは R 上で正則な微分 ξ が存在して,

$$\bar{\eta}(y) = \xi(y) \quad \text{for } \forall y \in \partial R.$$

このとき

$$\eta^*(y) = \begin{cases} \eta(y) & , y \in R \\ \overline{\xi(\phi(y))} & , y \in \phi(R) \end{cases}$$

とあくと, η^* は η の extension として $\hat{R}$ 上で正則である. $\square$

この prop. により $\hat{R}_t(x, \bar{y})$ の直和分解を得る. 等式

$$R_t(t, \bar{y}) \equiv 1, \quad R_t(x, \bar{t}) \equiv 1$$

と isometry $f \mapsto f\Omega$ より, $H_{2,t}(R) \subset H_2'(R)$ の reproducing kernel は

$$[R_t(x, \bar{y}) - 1] \Omega(x) \overline{\Omega(y)} = [1 - R_t(x, \bar{y})] \Omega(x) \Omega(\bar{y}).$$

従って

$$(1) \quad \hat{R}_t(x, \bar{y}) = [1 - R_t(x, \bar{y})] \Omega(x) \Omega(\bar{y}) + \sum_{i,j=1}^2 C_{ij} v_i(x) v_j(\bar{y}),$$

ただし (C_{ij}) は正定値な定数行列である. (1) を prop. 3.2. を使って変形すると,

$$(1)' \quad \hat{R}_t(x, \bar{y}) + \hat{R}_t(\bar{y}, x) = \Omega(x) \Omega(\bar{y}) + \sum_{i,j=1}^2 C_{ij} v_i(x) v_j(\bar{y}).$$

(C_{ij}) は theta を explicit に表わされる.

Prop. 3.4. $C_{ij} = \frac{\partial^2 \ln \theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(t - \bar{t} + e) - \frac{\partial^2 \ln \theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(e).$

これは次の公式の直接の結果である.

Prop. 3.5. $F(x, y) = \frac{\theta(x-y-e) \theta(x-a+e) \theta(x-b-e) E(b, a)}{\theta^2(e) \theta(b-a+e) E(x, y) E(x, a) E(y, b)} : x, y \text{ について diff.}$

$$Q(x) = \frac{\theta(x-a+e) \theta(x-b-e) E(b,a)}{\theta(e) \theta(b-a+e) E(x,a) E(x,b)} \quad : x_1 = \dots, \text{diff.}$$

とあくと

$$F(x,y) + F(y,x) = Q(x)Q(y) + \sum_{i,j=1}^r \left[\frac{\partial^2 h \theta}{\partial z_i \partial z_j} (e+b-a) - \frac{\partial^2 h \theta}{\partial z_i \partial z_j} (e) \right] v_i(x) v_j(y).$$

証明. まず $Q(x)Q(y) - F(y,x)$ を変形する. Addition-formula (prop. 2.3.) より

$$\begin{aligned} Q(x)Q(y) - F(y,x) &= \frac{\theta(x-y+b-a+e) \theta(x-b-e) \theta(x-a+e) E(b,a)}{\theta(e) \theta^2(b-a+e) E(x,y) E(x,a) E(y,b)} \\ &= \{e \rightarrow f\}. \end{aligned}$$

ただし $F(x,y)$ の式で e に $f = -(b-a+e)$ を代入したものを $\{e \rightarrow f\}$ と略記した. 従って,

$$\begin{aligned} F(x,y) + F(y,x) - Q(x)Q(y) &= \frac{\theta(x-y-e) \theta(x-a+e) \theta(x-b-e) E(b,a)}{\theta^2(e) \theta(b-a+e) E(x,y) E(x,a) E(y,b)} - \{e \rightarrow f\}, \end{aligned}$$

Addition-formula (cor. 2.4.) より

$$\begin{aligned} &= \frac{\theta(x-a+e) \theta(y-b-e) E(a,b)}{\theta(e) \theta(b-a+e) E(x,a) E(y,b)} \left[\omega_{y-a}(x) + \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial z_i} \ln \frac{\theta(z+y-a)}{\theta(z)} \right]_{z=e} v_i(x) \\ &\quad - \{e \rightarrow f\}, \end{aligned}$$

$\theta(z) : \text{even} \Rightarrow \frac{\partial h \theta}{\partial z_i}(z) : \text{odd}$ を使うと,

$$\begin{aligned} &= \frac{\theta(y-a+e) \theta(y-b-e) E(a,b)}{\theta(e) \theta(b-a+e) E(x,a) E(y,b)} \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} \left[\ln \frac{\theta(z+y-a) \theta(z+b-y)}{\theta(z) \theta(z+b-a)} \right]_{z=e} v_i(x) \\ &= \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} \left[\frac{\theta(y-a+z) \theta(y-b-z) E(a,b)}{\theta(z) \theta(z+b-a) E(x,a) E(y,b)} \right]_{z=e} v_i(x), \end{aligned}$$

再び addition-formula (cor. 2.4.) より,

$$\begin{aligned} &= \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} \left[\omega_{b-a}(y) + \sum_j \left\{ \frac{\partial h \theta}{\partial z_j} (z+b-a) - \frac{\partial h \theta}{\partial z_j} (z) \right\} v_j(y) \right]_{z=e} v_i(x) \\ &= \sum_{i,j} \left[\frac{\partial^2 h \theta}{\partial z_i \partial z_j} (e+b-a) - \frac{\partial^2 h \theta}{\partial z_i \partial z_j} (e) \right] v_i(x) v_j(y). \quad \square \end{aligned}$$

次に H_2 -extremal function を表現しよう. Rudin kernel で表現できるのは当然だが, theta の場合 addition-formula を用いて単項式の形に書けるのが多少の利点と言えろかもしれない.

Prop. 3.6. $a, b \in \mathbb{R}$ として $f \in H_2(\mathbb{R})$, $f(a) = 0$, $\|f\|_2^2 = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \Omega \leq 1$ の条件下で $|f(b)|$ を最大にする extremal function $f_0(z)$ は

$$f_0(z) = A_0 \cdot \frac{\theta(z+a-\bar{a}-b+e) E(z,a) E(z,\bar{e})}{\theta(z-\bar{e}+e) E(z,\bar{a}) E(z,\bar{b})}.$$

ただし A_0 は

$$|A_0|^2 = \frac{\theta(e) \theta(t-\bar{e}+e)}{\theta(a-\bar{a}+e) \theta(a+b-\bar{a}-\bar{b}+e)} \cdot \frac{E(b,\bar{b})}{E(t,\bar{e})}$$

を満足する定数である. また極値は ($\exists \varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon|=1$)

$$|f_0(b)|^2 = \varepsilon \cdot \frac{\theta(e) \theta(t-\bar{e}+e) \theta(a+b-\bar{a}-\bar{b}+e) E^2(a,b) E^2(b,\bar{e})}{\theta(a-\bar{a}+e) \theta^2(b-\bar{e}+e) E^2(b,\bar{a}) E(b,\bar{b}) E(t,\bar{e})}.$$

証明. Kernel function の一般論より

$$f_2(z) = \text{const} \cdot [R_+(a,\bar{a}) R_+(z,\bar{b}) - R_+(a,\bar{b}) R_+(z,\bar{a})]$$

と書けることがわかる. Prop. 3.2. と addition-formula (prop. 2.3)

により, 定数 A_0 を除いて, 上記の $f_0(z)$ の形が求まる. $|A_0|$ を定めるには留数定理を使う.

$$1 = \|f_0\|_2^2 = |A_0|^2 \cdot \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f_0(y)}{A_0} \right|^2 \Omega(y).$$

対称性 (prop. 1.1.) と prop. 3.1. により,

$$1 = |A_0|^2 \cdot \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta(y+a-\bar{a}-b+e) \theta(y+\bar{a}-a-b-e) E(t,\bar{e})}{\theta(e) \theta(t-\bar{e}+e) E(y,b) E(y,\bar{b})}$$

$$\begin{aligned}
&= -|A_0|^2 \operatorname{Res}_{y=b} \left[\frac{\theta(y+a-\bar{a}-\bar{b}+e) \theta(y+\bar{a}-a-b-e) E(t, \bar{t})}{\theta(e) \theta(t-\bar{t}+e) E(y, b) E(y, \bar{b})} \right] \\
&= |A_0|^2 \frac{\theta(a+b-\bar{a}-\bar{b}+e) \theta(a-\bar{a}+e) E(t, \bar{t})}{\theta(e) \theta(t-\bar{t}+e) E(b, \bar{b})}.
\end{aligned}$$

ここで $|A_0|$, 従って $|f_0(b)|$ も求まる. □

同様にして, $a \in \mathbb{R}$ での微係数を最大にする H_2 -extremal function も θ で書ける.

Prop. 3.7. $a \in \mathbb{R}$ とし, $f(a)=0$, $\|f\|_2 \leq 1$ の条件下で $|f'(a)|$ を最大にする extremal function $f_1(z)$ は

$$f_1(z) = A_1 \frac{\theta(z+a-2\bar{a}+e) E(z, a) E(z, \bar{t})}{\theta(z-\bar{t}+e) E^2(z, \bar{a})}$$

$$|A_1|^2 = \frac{\theta(e) \theta(t-\bar{t}+e) E(a, \bar{a})}{\theta(a-\bar{a}+e) \theta(2a-2\bar{a}+e) E(t, \bar{t})}.$$

極値は

$$|f_1'(a)|^2 = \frac{\theta(e) \theta(t-\bar{t}+e) \theta(2a-2\bar{a}+e) |E(a, \bar{t})|^2}{\theta(a-\bar{a}+e) |\theta(a-\bar{t}+e)|^2 i E(t, \bar{t}) (i E(a, \bar{a}))^3}.$$

また $f(a)=0$ を条件にしなければ, extremal function $f_2(z)$ は, A_2 を定数として

$$f_2(z) = A_2 \frac{\theta(z+t-2\bar{a}+e) E(z, t) E(z, \bar{t})}{\theta(z-\bar{t}+e) E^2(z, \bar{a})}$$

極値は

$$|f_2'(a)|^2 = |f_1'(a)|^2 + \frac{\theta^2(e) \theta(t-\bar{t}+e) |\theta(2a-\bar{a}-\bar{t}+e)|^2 |E(a, t)|^2}{\theta(a-\bar{a}+e) |\theta(a-\bar{t}+e)|^4 i E(t, \bar{t}) (i E(a, \bar{a}))^3}.$$

最後に differential Rudin kernel の特殊値 $\hat{R}_t(t, \bar{t})$ と Bergman metric との大きさを比較しよう. Isometry $f \mapsto f|_{\Omega}$ より容易にわかるように, $\hat{R}_t(t, \bar{t})$ は $\|f\|_2 \leq 1$ かつ $\text{divisor}(f) \geq t - A$ なる meromorphic H_2 -function の族に関する $|f'(t)|^2$ の極値になっている. Prop. 3.2. より

$$\hat{R}_t(t, \bar{t}) = \frac{\theta(t - \bar{t} - e) \theta(t - \bar{t} + e)}{\theta^2(e) (iE(t, \bar{t}))^2}.$$

従って prop. 2.1., cor. 2.5. より

$$\hat{R}_t(t, \bar{t}) = \pi K(t, \bar{t}) - \sum_{i,j=1}^g \frac{\partial^2 \ln \theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(e) v_i(t) \overline{v_j(t)}.$$

一般に $\hat{R}_t(t, \bar{t}) > \pi K(t, \bar{t})$ と予想されるが, 今のところ, もっとも簡単な $g=1$ (二重連結領域) の場合しか証明できない.

Prop. 3.8. $g=1$ のとき $\frac{d^2 \ln \theta}{dz^2}(e) < 0$. ゆえに

$$\hat{R}_t(t, \bar{t}) > \pi K(t, \bar{t}).$$

証明. R を両側端を同一視した長方形

(右図), また $t = i t_0$, $0 < t_0 < \pi/2$

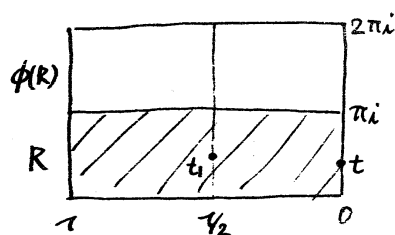
と仮定して一般性を失わない. $g(z, t)$

の唯一の critical point を t_1 とすると (Rudin [7]),

$$t_1 = \pi/2 + i\alpha, \quad t_0 \leq \alpha \leq \pi/2.$$

とくに $t = \pi i/2$ とすると, $t_1 = \pi/2 + \frac{\pi i}{2}$, $\Delta = \frac{2\pi i + \pi}{2} \in J_0$ だから

$$e = t_1 - t - \Delta = \pi i \in J_0.$$



従って楕円関数論 (Hancock [8]) より

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \ln \theta}{dz^2}(\pi i) &= \frac{d^2 \ln \theta[i]}{dz^2}(0) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\vartheta_0''(0)}{\vartheta_0(0)} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q^{2n-1}}{(1-q^{2n})^2} < 0. \quad (q = e^{\frac{\pi}{2}})\end{aligned}$$

ただし ϑ_0 は Jacobi の small theta function である. $\frac{d^2 \ln \theta}{dz^2}(e)$ は実数であり t に関する連続性より, あとは $\frac{d^2 \ln \theta}{dz^2}(e) \neq 0$ を示せばよい. $\frac{d}{dz} \ln \theta[i](z) = F(z)$ とおく. $\Omega(z) = \omega_{\bar{t}-t}(z)$ と cor. 2.4.

$$\text{より } \frac{d \ln \theta}{dz}(t-\bar{t}+e) = \frac{d \ln \theta}{dz}(e), \text{ すなわち}$$

$$F(t_1-\bar{t}) = F(t_1-t).$$

もしも或る t について $\frac{d^2 \ln \theta}{dz^2}(e) = 0$ ならば, $x_0 = t_1 - t$ とおいて

$$F'(x_0) = 0, \quad F(x_0) = F(x_0 + t - \bar{t}).$$

$\operatorname{Re}(x_0) = \operatorname{Re}(x_0 + t - \bar{t}) = \frac{\pi}{2}$ であり, $F(z)$ は $\operatorname{Re}(z) = \frac{\pi}{2}$ 上で real-valued だから Rolle の定理より $\beta \in \mathbb{R}$ が存在して

$$F'(x_0 + i\beta) = 0, \quad 0 < \beta < 2t_0.$$

また $F'(z)$ は周期偶関数だから $F'(2\pi i - x_0) = 0$. 不等式

$$0 < \operatorname{Im}(x_0) < \operatorname{Im}(x_0 + i\beta) < \operatorname{Im}(2\pi i - x_0) < 2\pi$$

により $F'(z)$ は torus $\mathbb{R} \cup \phi(\mathbb{R})$ 上に少なくとも3個の zero 点を持つ. これは $F'(z)$ が2位の有理型関数であることに矛盾する. $\square$

文献

[1] Fay, J. D., "Theta functions on Riemann surfaces." Springer

Lecture Note Vol. 352., 1973.

- [2] Hejhal, D., "Theta functions, kernel functions and Abelian integrals." A.M.S. Memoir 129, 1972.
- [3] Ahlfors, L. - Beurling, A., "Conformal invariants and function-theoretic null-sets." Acta Math. 83 (1950), 101-129.
- [4] 吹田, "On a metric induced by analytic capacity." Kōdai Math. Sem. Rep., 25 (1973), 215-218
- [5] 吹田, "On a metric induced by analytic capacity II", Kōdai Math. Sem. Rep. 27 (1976), 159-162.
- [6] Hawley, N. - Schiffer, M., "Half-order differentials on Riemann surfaces", Acta Math. 115 (1966), 199-236.
- [7] Rudin, W., "Analytic functions of class H_p ", Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 46-66.
- [8] Hancock, H., "Theory of elliptic functions." Dover, 1958.