

A note on the order of the Kahn-Priddy map

信大教養 向井純夫 (Juno Mukai)

0. はじめに.

L_p を素数 p を法とする無限次元レンズ空間, $L_p^k \subset L_p$ の k -切片とする. $c = 2m+1$, $m \geq 1$ とおく.

$$\lambda = \lambda_k: E^c L_p^k \rightarrow S^c \quad (2p-3 \leq k \leq 2(m+1)(p-1)-2)$$

の汎関数 ∂^t 作用素 ∂_λ^t に対し, $\partial_\lambda^t \neq 0$ のとき, λ を Kahn-Priddy map (以下, $K-P$ map) という. 定義より, $t \geq 0$ のとき, $E^t \lambda$ も $K-P$ map である. $E^t \lambda$ のホモトピー類を同じ記号 $E^t \lambda$ で表す. コホモトピー群 $\pi^{t+c}(E^{t+c} L_p^k)$ における元 $E^t \lambda$ の位数 $\#(E^t \lambda)$ を決定する問題は, 西田吾郎氏により提起された. p が奇素数で, stable な $K-P$ map に対しては, 西田 [11] により解決された.

これにより, Kahn-Priddy の定理 [5] を使えば, 球面の安定ホモトピー群の p -成分の元の位数の上界が与えられることになる.

[11] における方法は, L_p^k の代数的 K -群を決定し, その応用として結果が得られる. $p=2$ のとき, 筆者は部分的結果を得た [9]. この方法を進めて, 即ち, K -E map の (位相的) K -理論による特徴づけを行い, Adams [2] の d -または e -不変量を用い, 更に stunted レンズ空間の suspension-order [4] の結果を使えば, 問題が解決できることを示せる. これが本報告の目的である.

実数 x に対し, $[x]$ で x を越えない最大整数を表す. $g(n) = \#\{0 < i \leq n, i \equiv 0, 1, 2 \text{ or } 4 \pmod{8}\}$.

$\lambda = \lambda_{2n}: E^c L_p^{2n} \rightarrow S^c$, $\chi = \lambda|_{E^c L_p^{2n-1}}$ (制限) とおく.

$p=2$ のとき, $m=n$ とする. $t \geq 0$.

Theorem. i) p : 奇素数.

$$\#(E^t \lambda) = \#(E^t \chi) = p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]}.$$

ii) $p=2$. $\#(E^t \lambda) = 2^{g(2n)}$.

$$\#(E^t \chi) = \begin{cases} 2^{g(2n)} & , \quad n: \text{even} \\ 2^{g(2n-1)} & , \quad n: \text{odd} \end{cases}$$

1. K - P map の K -理論による特徴づけ.

以下特に断わらない限り, p は奇素数を表す.

Proposition 1.1 (上部 [6]). $n = s(p-1) + r$, $0 \leq r < p-1$.

$$\tilde{K}(L_p^{2n+1}) \approx \tilde{K}(L_p^{2n}) \approx (Z_{p^{s+1}})^r + (Z_{p^s})^{p-r-1},$$

生成元: $\sigma, \dots, \sigma^r, \sigma^{r+1}, \dots, \sigma^{p-1}$.

環構造: $\sigma^p = \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} \sigma^i$, $\sigma^{n+1} = 0$.

$n \geq 3$ のとき, 次のことはよく知られている.

$${}^p\pi_{i+n}(S^n) \approx \begin{cases} 0, & i < 2p-3 \text{ or } i = 2p-2. \\ Z_p, & i = 2p-3, \text{ 生成元 } E^{n-3}\alpha_1 \end{cases}$$

(p -成分)

$M_p^n = S^{n-1} \cup_p e^n$, $\bar{\alpha}_1 \in \pi^3(M_p^{2p+1}) \approx Z_p$ を α_1 の拡張とする. 上の事実より, 次が成り立つ.

Lemma 1.2. $n \geq 3$. $\pi^n(E^n L_p^{2p-4}) = 0$,

$$\pi^n(M_p^{n+2p-2}) = \{E^{n-3}\bar{\alpha}_1\} \approx Z_p.$$

$q: L_p^{2n} \rightarrow L_p^{2n}/L_p^{2n-2} = M_p^{2n}$ を自然な map とするとき,

cofibration

$$L_p^{2n-2} \hookrightarrow L_p^{2n} \xrightarrow{g'} M_p^{2n}$$

と Prop. 1.1 より, 次を得る.

Lemma 1.3 $n = s(p-1)$, $s \geq 1$.

$$\text{Im} \{ g'^*: \tilde{K}(M_p^{2n}) \rightarrow \tilde{K}(L_p^{2n}) \} = \{ p^{s-1} \sigma^{p-1} \} \approx \mathbb{Z}_p.$$

以下, K -理論に関する議論では, 記号の簡略化のため, stable category で考える.

$\alpha \in {}^p\pi_{2p-3}(S^0)$ の拡張を $\bar{\alpha} \in \pi^0(M_p^{2p-2})$ とする. 次のことはよく知られている [2].

Lemma 1.4. $\alpha = a\alpha_1$, $a \equiv 1 \pmod{p}$.

$$\Leftrightarrow \rho_\alpha^1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{\alpha}^*: \tilde{K}(S^0) \rightarrow \tilde{K}(M_p^{2p-2}) \approx \mathbb{Z}_p \text{ onto. i.e.,}$$

$$d_{\mathbb{Q}}(\bar{\alpha}) \equiv a \pmod{p}.$$

$$\Leftrightarrow e_{\mathbb{Q}}(\alpha) \equiv -\frac{a}{p} \pmod{1}.$$

K - P map の定義と Lemmas 1.2, 1.4 より, $k \geq 2p-2$ のとき, $\lambda: L_p^k \rightarrow S^0$ が K - P map であるための必要十分条件は, 次の図式がホモトピー-可換となることである.

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} L_p^k & \xrightarrow{\lambda} & S^0 \\ & \nwarrow i^* & \nearrow \lambda' \\ & L_p^{2p-2} & \\ & \downarrow g' & \nearrow \alpha_1 \\ & M_p^{2p-2} & \end{array}$$

ここで, $\lambda' = \lambda|_{L_p^{2p-2}}$. その他の maps は自然なものである.
次の命題を示すことが本節の目的である.

Proposition 1.5. $k = 2n$ or $2n+1$, $n = s(p-1) + r$, $0 \leq r < p-1$, $s \geq 1$.

$$\lambda: L_p^k \rightarrow S^0 \quad K-P \text{ map.}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im} \{ \lambda^*: \tilde{K}(S^0) \rightarrow \tilde{K}(L_p^k) \} = \{ \sigma^{p-1} \bmod p \tilde{K}(L_p^k) \} \approx \mathbb{Z}_{p^s}.$$

Proof. (1.1), Lemmas 1.3, 1.4 より, $\operatorname{Im} \lambda^* = \operatorname{Im} g'^* = \{ \sigma^{p-1} \} \approx \mathbb{Z}_p$. Prop. 1.1 より, i^* は onto で, $i^{*^{-1}}(\sigma^{p-1}) = \{ \sigma^{p-1} \bmod p \tilde{K}(L_p^k) \}$. 一方, (1.1) より, $i^*(\operatorname{Im} \lambda^*) = \operatorname{Im} \lambda'^*$. 故に, $\operatorname{Im} \lambda^* = i^{*^{-1}}(\sigma^{p-1})$. □

2. レンズ空間の suspension-order,

空間 X に対し, $\mathcal{L}_{EX}$ を EX の identity map のホモトピー類とする. $\#\mathcal{L}_{EX}$ を X の suspension-order [12] という. 記号 $|EX| = \#\mathcal{L}_{EX}$ を使う.

Lemma 2.1 ([4], [15]).

$$|E(L_p^{2n}/L_p^{2k})| = |EL_p^{2(n-k)}| = p^{1 + \lceil \frac{n-k-1}{p-1} \rceil}.$$

Lemma 2.2. ([6], [7]). $\tilde{K}(L_p^{2n}/L_p^{2k}) \approx \tilde{K}(L_p^{2(n-k)})$.

これらの Lemmas と Prop. 1.1 より, 次を得る.

Proposition 2.3. $t \geq 0$.

$$|E^{t+1}(L_p^{2n}/L_p^{2k})| = |E^{t+1}L_p^{2(n-k)}| = p^{1 + \lceil \frac{n-k-1}{p-1} \rceil}.$$

注. $p=2$ のとき, Prop. 2.3 は成り立たない.

3. Proof of Theorem i).

Proposition 3.1. $\lambda: E^c L_p^{2n} \rightarrow S^c$ K-P map,
 $\chi = \lambda|_{E^c L_p^{2n-1}}$. $n \equiv 0 \pmod{p-1}$ のときの χ を除いて,
 $t \geq 0$ のとき,

$$\#(E^t \lambda) = \#(E^t \chi) = p^{\lceil \frac{n}{p-1} \rceil}.$$

Proof. $n = s(p-1) + r$, $0 \leq r < p-1$, $s \geq 1$
 とする. Lemma 1.2 より, 次の図式がホモトピー可換と
 なるような map $\tilde{\lambda}: E^c(L_p^{2n}/L_p^{2p-4}) \rightarrow S^c$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} E^c L_p^{2n} & \xrightarrow{\lambda} & S^c \\ \downarrow \varphi' & & \nearrow \tilde{\lambda} \\ & E^c(L_p^{2n}/L_p^{2p-4}) & \end{array}$$

ここで, φ' は自然な map である.

これと Prop. 2.3 より,

$$\#(E^t \lambda) \mid \#(E^t \tilde{\lambda}) \mid |E^{t+c}(L_p^{2n}/L_p^{2p-4})| = p^{1 + \lceil \frac{n-p+1}{p-1} \rceil} = p^s.$$

一方, Prop. 1.5 より,

$$p^s \mid \#(E^\infty \lambda) \mid \#(E^t \lambda).$$

よって, $\#(E^t \lambda) = p^s$.

次に, $n \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ のとき, $n-1 = s(p-1) + r-1$, $0 \leq r-1$. Prop. 1.5 と上の結果から,

$$p^s \mid \#(E^\infty \chi) \mid \#(E^t \chi) \mid \#(E^t \lambda) = p^s. \quad \square$$

Theorem i) の残された主張をいうには, stable な元 $\chi = \lambda \mid L_p^{2n-1} : L_p^{2n-1} \rightarrow S^0$ に対して, $\# \chi = p^s$ を示せばよい.

$n = s(p-1)$, $s \geq 1$ とする. $\alpha_s \in \pi_{2n-1}(S^0)$ を $e_C(\alpha_s) \equiv -\frac{1}{p} \pmod{1}$ とする Adams-Toda の元 [2] とし, $\bar{\alpha}_s \in \pi^0(M_p^{2n})$ を α_s の拡張とする.

Lemma 3.2. $\lambda: L_p^{2n} \rightarrow S^0$ K-P map, $q': L_p^{2n} \rightarrow M_p^{2n}$ 自然な map. このとき,

$$p^{s-1} \lambda \equiv \bar{\alpha}_s q' \pmod{\text{Ker } d_C}.$$

Proof. $d_C(\bar{\alpha}_s) \equiv -p e_C(\alpha_s) \equiv 1 \pmod{p}$. 従って, Lemma 1.3 と Prop. 1.5 から主張を得る. $\square$

自然な maps に対する次の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccc}
 L_p^{2n-1} & \xrightarrow{g} & S^{2n-1} \\
 \downarrow i & & \downarrow i_1 \\
 L_p^{2n} & \xrightarrow{g'} & M_p^{2n}
 \end{array}$$

Proposition 3.3. $p^{s-1} \lambda' \equiv \alpha_s g \pmod{\text{Ker } e_C}$,
 $\# \lambda' = p^s$.

Proof. Lemma 3.2 と上の図式より,

$$p^{s-1} \lambda' = (p^{s-1} \lambda) \circ i \equiv (\alpha_s g') \circ i = \alpha_s g \pmod{(\text{Ker } d_C) \circ i}$$

i . 米田の積の性質から [2], $(\text{Ker } d_C) \circ i \subset \text{Ker } e_C$,

$$e_C(\alpha_s g) = d_C(Eg) e_C(\alpha_s) \equiv \pm \frac{1}{p} \pmod{1}. \text{ 何となれば,}$$

$(Eg)^*: \tilde{K}^{-1}(S^{2n-1}) \rightarrow \tilde{K}^{-1}(L_p^{2n-1})$ は, [6] より, isom. であ

るから, $d_C(Eg) = \pm 1$. □

4. Proof of Theorem ii).

$p = 2$ のとき, $L_p^k = P^k$ (実射影空間) と表し,

K -群の代りに KO -群を用いる. 以下, 次の事実 は自由に

使われる: $\widetilde{KO}(P^n) \approx \mathbb{Z}_{2^{g(n)}} [1]$, $|E^\infty P^{2n}| = 2^{g(2n)} [12]$.

次の Lemma は Prop. 1.5 の mod 2 version である [9].

Lemma 4.1. $\lambda: P^n \rightarrow S^0$ K-P map.

$$\Leftrightarrow \lambda^*: \widetilde{KO}(S^0) \rightarrow \widetilde{KO}(P^n) \text{ onto.}$$

以上から, Theorem ii) の最初の主張を得る [9].

以下, $\lambda: P^{2n} \rightarrow S^0$ K-P map, $\lambda' = \lambda|_{P^{2n-1}}$ とし, Theorem ii) の残された主張をいえる。(1).

Case I. $n \equiv 3 \pmod{4}$.

$$g(2n-1) = g(2n) \text{ より, } \# \lambda' = 2^{g(2n-1)}.$$

Case II. $n = 4s + 1$, $s \geq 0$.

$g(2n-1) = g(2n-2) + 1$. $\mu_s \in \pi_{2n-1}(S^0)$ を $d_R(\mu_s) \neq 0$ とする位数 2 の元 [2] とする. cofibration

$$P^{2n-2} \xrightarrow{i} P^{2n-1} \xrightarrow{q} S^{2n-1}$$

と Lemma 4.1 より, 次を得る.

Lemma 4.2. $2^{g(2n-2)} \lambda' \equiv \mu_s q \pmod{\text{Ker } d_R},$

$$\# \chi' = 2^{\varphi(2n-1)}.$$

Case III. $n = 4s - 2$ or $4s$, $s \geq 1$.

$$\varphi(2n) = \varphi(2n-2) + 1, \quad \varphi(2n-1) = \varphi(2n-2).$$

$\beta_s \in \pi_{2n-1}(S^0)$ を, $\# \beta_s = 2$ かつ $e'_R(\beta_s) \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$ と
なる元 [2] とする.

注. Adams 予想が解けたから, $n = 4s$ のときも, $\text{Im } J \cong$
 $Z_{m(4s)} [2]$. この生成元を d_{2n-1} と表すとき, $\beta_s = \left(\frac{m(4s)}{2}\right) d_{2n-1}$
とすればよい.

cofibration $P^{2n-2} \xrightarrow{i'} P^{2n} \xrightarrow{g'} M_2^{2n}$ を用いれば, 次の
Lemma (Lemma 3.2 の mod 2 version) が得られる.

$$\text{Lemma 4.3.} \quad 2^{\varphi(2n-2)} \chi \equiv \bar{\beta}_s g' \pmod{\text{Ker } d_R}.$$

$s = 1$ のとき, この結果は [8] で得られた.

$$\text{Proposition 4.4.} \quad 2^{\varphi(2n-2)} \chi \equiv \beta_s g \pmod{\text{Ker } e'_R}$$

$$\# \chi = 2^{\varphi(2n)}.$$

Proof. 最初の主張は, Prop. 3.3 の前半の証明と全く同様
である. [3] によれば, 次の完全列

$$0 \leftarrow \underset{\substack{\text{ss} \\ \mathbb{Z}_2}}{\widetilde{KO}^{-1}(P^{2n-2})} \xleftarrow{i^*} \underset{\substack{\text{ss} \\ \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}}}{\widetilde{KO}^{-1}(P^{2n-1})} \xleftarrow{(Eg)^*} \underset{\substack{\text{ss} \\ \mathbb{Z}}}{\widetilde{KO}^{-1}(S^{2n-1})}$$

において, $(Eg)^*$ は split mono. 従って, $d_R(Eg) = \pm 1$. 故に,

$$e'_R(2^{q(2n-2)}\chi) = e'_R(\beta_S g) = d_R(Eg) e'_R(\beta_S) \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}.$$

□

Example i). 自然な map $P^{n-1} \hookrightarrow SO(n) \hookrightarrow \Omega^n S^n$ の adjoint を $g_n: E^n P^{n-1} \rightarrow S^n$ とする. $g_n|_{E^n P^{n-2}} = E g_{n-1}$ より, Theorem ii) を使えば, 次の通りである.

$$\#(Eg_n) = \begin{cases} 2^{q(2n-1)} & , \quad n: \text{ odd} , \\ 2^{q(2n)} & , \quad n: \text{ even} . \end{cases}$$

これは, [9] の最後の Example の結果を改良したものである.

ii). S^n の symmetric square $S^n \cup_{f_n} C(E^n P^{n-1})$ における attaching map f_n に対しても, i) と同じことがいえる.

iii) [14] の Lemma 8.2 における map $h_m: E^c L_p^{c(p-1)-2} \rightarrow S^c$, $c = 2m+1$, は K-P map である. 故に, Theorem i) より

$$\# h_m = p^{2m}.$$

5. K-P map の mod p Hopf invariant.

主題と離れるが, ここでは, [9] の Theorem 1.2 の mod p

version を考える.

次の Lemma は, $H^*(L_p^k; \mathbb{Z}_p)$ の環構造と, β 作用素 β^i 及び Bockstein の作用素 Δ の性質, Adem の公式より得られる.

Lemma 5.1. $\lambda: E^c L_p^{2k} \rightarrow S^c$, $c = 2m+1$, $p-1 \leq k \leq (m+1)(p-1)-1$ ($\lambda: E^c P^{2k} \rightarrow S^c$, $1 \leq k \leq m$) map.

ここで $i(p-1) \leq k$ ($i \leq k$, resp.) を満たす自然数とする. λ の汎関数 $\beta^i(s_g^{2i})$ - or $\Delta \beta^i(s_g^{2i+1})$ - 作用素が, ある i で nontrivial な S , 任意の i で nontrivial である.

さて, inclusion $S^{2m-1} \hookrightarrow \Omega^2 S^{2m+1}$ の homotopy fibre ε $Q_2^{2m-1} = \Omega(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1})$ とする. K を有限 CW 複体とし, 次の完全列を考える [13]:

$$\cdots \rightarrow [EK, S^{2m-1}] \xrightarrow{E^2} [E^3 K, S^{2m+1}] \xrightarrow{H^{(2)}} [K, Q_2^{2m-1}] \rightarrow \cdots$$

Lemma 5.2. $\lambda \in \pi^{2m+1}(E^3 K)$ に対し, $\beta_\lambda^m \neq 0$.

$$\Rightarrow H^{(2)}(\lambda) \neq 0.$$

Proof. $H^{(2)}(\lambda) = 0$ と仮定すれば, 上の完全列から,

$\exists \theta \in \pi^{2m-1}(EK); \lambda = E^2\theta$. ϕ^m は cohomology suspension isom. と可換で、かつ、 $\phi^m \tilde{H}^{2m-1}(\cdot; \mathbb{Z}_p) = 0$. 故に $\phi_\lambda^m = 0$. $\square$

Lemma 5.3. $K = E^{2m-2} L_p^{2m(p-1)}$, $\lambda \in \pi^{2m+1}(E^3 K)$,

$H^{(2)}(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \phi_\lambda^m \neq 0$. 即ち, λ は K -D map.

Proof. $\lambda' \in \pi^{2m+1}(E^3 K)$ を任意の K -D map とする.

Lemmas 5.1, 5.2 より, $H^{(2)}(\lambda) \neq 0$. $\dim \leq 4mp - 6$ 9 とし, $\mathbb{Q}_2^{2m-1}$ は M_p^{2mp-2} と p -同値 [13] だから, $[K, \mathbb{Q}_2^{2m-1}] \approx [M_p^{2mp-2}, M_p^{2mp-2}] \approx \mathbb{Z}_p$. 従って, 先の完全列から, $\exists \theta \in \pi^{2m-1}(EK); \lambda = a\lambda' + E^2\theta$, $a \equiv 1 \pmod p$. 故に,

$$\phi_\lambda^m = a\phi_{\lambda'}^m + \phi_{E^2\theta}^m = a\phi_{\lambda'}^m \neq 0. \quad \square$$

注. $\pi^{2m+1}(E^{2m+1} L_p^{2m(p-1)})$ において, K -D map が存在することは, 前節 Example iii) で述べた [14] の Lemma 8.2 を使う. 尚, cf. [10] Lemma 7.4.

[13] によれば, $\text{mod } p$ Hopf homo. は $H_p = I \circ H^{(2)}$:

${}^p[E^3 K, S^{2m+1}] \xrightarrow{H^{(2)}} {}^p[K, \mathbb{Q}_2^{2m-1}] \xrightarrow{I} {}^p[E^3 K, S^{2mp+1}]$ と定義されろ. $K = E^{2m-2} L_p^{2m(p-1)}$ のとき, I が isom. であることは,

完全列

$${}^p[K, Q_2^{2m-1}] \xrightarrow{I} {}^p[E^3K, S^{2mp+1}] \xrightarrow{\Delta} {}^p[EK, S^{2mp-1}]$$

において, $[EK, S^{2mp-1}] = [M_p^{2mp-1}, S^{2mp-1}] \approx \mathbb{Z}_p$ であること,
及 Δ は degree p の map である [13] ことから出る.

以上で, 次の主張が証明された.

Proposition 5.4. $\lambda: E^{2m+1} \mathbb{L}_p^{2m(p-1)} \rightarrow S^{2m+1}$ K - P map.
 $\Leftrightarrow H_p(\lambda) \neq 0.$

注. $p=2$ のとき, EHP 列を用い, 全く同様な議論により, 上の結論, 即ち, [9] の Theorem 1.2 を得る.

参考文献

- [1] J. F. Adams, Vector field on spheres, *Ann. of Math.*,
75(1962), 603 - 632.
- [2] ———, On the groups $J(X)$ -IV, *Topology*, 5(1966), 21-71.
- [3] M. Fujii, K_0 -groups of projective spaces, *Osaka J. Math.*,
4(1967), 141 - 149.
- [4] K. Iriye, On the James number of cyclic maps of spheres,
Japan J. Math., 10(1984), 1 - 8.

- [5] D. S. Kahn and S. B. Priddy, Applications of the transfer to stable homotopy theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78(1972), 781-787.
- [6] T. Kambe, The structure of K_1 -rings of the lens space and their applications, *J. Math. Soc. Japan*, 18(1966), 136-146.
- [7] T. Kobayashi, Non-immersion theorems for lens spaces, II, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I*, 32(1968), 285-292.
- [8] J. Mukai, On the stable homotopy of the real projective space of even low dimension, to appear in *Publ. RIMS Kyoto Univ.*
- [9] ———, A characterization of the Kahn-Priddy map, to appear in *Advanced Studies in Pure Math.*
- [10] G. Nishida, The nilpotency of elements of the stable homotopy groups of spheres, *J. Math. Soc. Japan*, 25(1973), 703-732.
- [11] ———, On the algebraic K-group of lens spaces and its applications, *J. Math. Kyoto Univ.*, 23(1983), 211-217.
- [12] H. Toda, Order of the identity class of a suspension space, *Ann. of Math.*, 78(1963), 300-325.
- [13] ———, On iterated suspensions I, *J. Math. Kyoto Univ.* 5(1965), 87-142.
- [14] ———, On iterated suspensions II, *J. Math. Kyoto Univ.* 5(1965), 247-250.
- [15] J. Ucci, On cyclic and iterated cyclic products of spheres, *Osaka J. Math.*, 8(1971), 393-404.