

The Norm of Pre-Schwarzian and Schwarzian Derivatives of Spiral-like Functions

奥山裕介 (Yûsuke Okuyama)

Department of Mathematics, Graduate School of Science

Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

E-mail; okuyama@kum.kyoto-u.ac.jp

単位円板を $\mathbb{D}$ と表す. また $\mathbb{D}$ 上の正則函数 f で, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ と正規化されたものの全体の集合を A と表す. さらに f が $\mathbb{D}$ 上単葉であるものの全体を S で表す.

定数 $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ に対し, $f \in A$ が β -spiral-like であるとは, $f \in S$ かつ任意の $z \in \mathbb{D}$ に対して, 原点と $f(z)$ を繋ぐ対数螺旋 $f(z) \exp(-e^{-i\beta}t)$ ($0 \leq t < \infty$) が $f(\mathbb{D})$ に含まれることと定義する. これは $\Re(zf'(z)/e^{i\beta}f(z)) > 0$ が任意の $z \in \mathbb{D}$ で成り立つことと同値である.

次に, D 上の非定数有理型函数 f に対して, その pre-Schwarz 微分及び Schwarz 微分をそれぞれ

$$T_f = \frac{f''}{f'}, S_f = (T_f)' - \frac{1}{2}(T_f)^2$$

と定義する. 次に, $\mathbb{D}$ 上局所単葉な函数 f に対し, T_f と S_f のノルムをそれぞれ

$$\|T_f\|_1 = \sup_{z \in \mathbb{D}} |T_f(z)|(1 - |z|^2), \|S_f\|_2 = \sup_{z \in \mathbb{D}} |S_f(z)|(1 - |z|^2)^2$$

と定義する. これらのノルムは Teichmüller 空間論において重要な意味を持つ. 例えば, Astala-Gehring [1], Zhuravlev [2] を見よ.

以下では Spiral-like 函数の pre-Schwarz 微分ならびに Schwarz 微分のノルムについて新しく得られた結果を述べる.

Theorem. $|\beta| < \pi/2$ とする. f が β -spiral-like 函数ならば以下が成り立つ.

- (i) $0 \leq |\beta| \leq \pi/3$ の時, $\|T_f\|_1 \leq 2|2 + e^{2i\beta}|$. 等号は f が β -spiral Koebe 函数 $f_\beta(z) := z/(1-z)^{-2e^{-i\beta}\cos\beta}$ の時少なくとも成り立つ.
- (ii) $\pi/3 < |\beta| < \pi/2$ の時, $\|T_f\|_1 \leq \|T_{f_\beta}\|_1 (\geq 2|2 + e^{2i\beta}|)$. 等号は f が β -spiral Koebe 函数の時, その時に限り成り立つ.

Remark. β -対数螺旋の部分弧 $\Gamma_\beta := \{z = f_\beta(-e^{2i\beta}) \exp(e^{i\beta}t); 0 \leq t < \infty\}$ とおくと, $f_\beta(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \Gamma_\beta$. また $\|S_{f_\beta}\|_2 = 6$ である.

参考文献

- [1] ASTALA, K. and GEHRING, F. W. Injectivity, the *BMO* norm and the universal Teichmüller space, *J. Analyse Math.*, **46** (1986), 16–57.
- [2] ZHURAVLEV, I. V. A model of the universal Teichmüller space, *Siberian Math. J.*, **27** (1986), 691–697.