

$\mathrm{su}(N)$ 対称性を用いた2次元流の有限自由度モデルの性質

東大理 服部裕司 (Yuji Hattori)
神部 勉 (Tsutomu Kambe)

§1 動機

流れを、例えば psuedo-spectral 法によって数値シミュレーションする場合、通常高波数のモードを 0 に固定して有限自由度の常微分方程式系に truncate して計算を行なう。この truncation の方法については、扱う問題によってはこれが最適であるとは必ずしも言えない。特に、非粘性流は Hamilton 力学系であり、2次元の場合には無限個の保存量を持つ。ところがこのとき、上の truncation によって得られる系（ここでは truncated system と呼ぶことにする）は、Hamilton 力学系としての性質をもたず、その結果自由度の大小に拘らず、2個の保存量（エネルギーとエントロフィーに対応する量）しかもたない。無論、truncated system は有限自由度であるため、無限個の保存量は有しえないが、極限で無限個の保存量を持つためには、モード数を大きくするにしたがって保存量の個数も大きくなることを期待したい。つまり Hamilton 系としての構造を壊さずに、かつ保存量をモード数に応じてたくさん持つような有限自由度系を作りたい。

近年、上の要請を満たす方程式系が Zeitlin によって提案された（Zeitlin's system と呼ぶ）。Zeitlin の方法は、2次元完全流体による流体粒子運動（周期境界条件）が面積保存微分同相写像群 $\mathrm{SDiff}T^2$ の測地

線になる (Arnold 1966) という性質に着目し、無限次元 Lie 群である $\text{SDiff}T^2$ の代わりに有限次元 Lie 群 $\text{SU}(N)$ を用いるというものである。この Zeitlin's system は奇数 N に対して、 $N \times N - 1$ の自由度を持ち、 N 個の独立な保存量を持つ。

ここでは、Zeitlin's system の性質を review し、数値計算、特にエネルギー・スペクトルについて調べた結果を報告する。

§2 Zeitlin's system とその性質

ここでは、Zeitlin (1989, 1990) にしたがって Zeitlin's system の性質について述べる。

Zeitlin's system は次のような常微分方程式系である：

$$\frac{d}{dt}\omega_n = - \sum_{\mathbf{k} \in C} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \sin \frac{2\pi}{N} (\mathbf{n} \times \mathbf{k}) \right\} \omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{n}-\mathbf{k}|_{\text{mod } N}}. \quad (2-1)$$

ここで、 N はある奇数で、整数 $n = (N-1)/2$ により $C = [-n, n] \times [-n, n] \subset \mathbf{Z}^2$ である。つまり $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^2$ は $-n$ から n までの整数を成分に持つ2次元の波数ベクトルである。 $\omega_{\mathbf{k}}$ を渦度の波数 $\mathbf{k}$ に対応する Fourier 成分と考える。 $\omega_0 = 0$ とおくので、独立変数の個数は $N \times N - 1$ となる。 $\mathbf{n} - \mathbf{k}|_{\text{mod } N}$ に現われる $\text{mod } N$ は各成分に kN を加えて $m + kN \in [-n, n]$ となるようにしたものである。つまり、

$$p_i|_{\text{mod } N} = \left(\frac{p_i + n}{N} - \left[\frac{p_i + n}{N} \right] \right) \cdot N - n \in C$$

である ($[]$ は Gauss 記号)。

一方、2次元非粘性流の方程式すなわち Euler 方程式を Fourier 空間で書いたものは次のようになる：

$$\frac{d}{dt}\omega_n = - \sum_{\mathbf{k}} \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^2} \omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{n}-\mathbf{k}} \quad (2-2)$$

ここで ω_k は渦度場の Fourier 成分であり、 $\omega(x) = \sum_n \omega_n e^{ik \cdot x}$ である。(2-1) 式と (2-2) 式を比較してみると、係数に $\sin$ の有無の違い、波数に $\text{mod } N$ の有無の違いがあることがわかる。また、固定した n, k に対しては、(2-1) 式の係数に $N/2\pi$ を乗じて $N \rightarrow \infty$ とすれば、(2-2) 式の係数に一致する:

$$\frac{N}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{N} (n \times k) \rightarrow n \times k. \quad (2-3)$$

次に (2-1) と (2-2) の Hamilton 系としての構造について述べる。 $\S 1$ で述べたように、(2-1)(2-2) とともに Lie 群の測地線方程式と結びついている。いま、Lie 群 G に Riemann 計量 $\langle, \rangle$ を与え、それにより決まる Levi-Civita 接続 ∇ を接続とする。このとき G 上の曲線 $\sigma = \sigma(t)$ は、

$$\nabla_{\sigma'} \sigma' = 0$$

を満たすとき、測地線であるという。ここで $\sigma'(t)$ は $\sigma(t)$ における接空間 $T_{\sigma(t)}G$ のベクトルになっている。これを右移動により原点 = 単位元における接空間 $T_e G$ 、すなわち G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上で表現してやる。結果は、

$$\dot{x}_i = a^{lm} c_{im}^k x_l x_k \quad (2-4)$$

となる (Abraham and Marsden 1978)。ここで x_i は $\mathfrak{g}$ の双対空間における適当な基底 $\{e_i\}$ に関する座標、 a^{lm} は Riemann 計量、 c_{im}^k は $\mathfrak{g}$ における構造定数である。つまり、

$$\langle e_l, e_m \rangle = a_{lm}$$

$$[e_i, e_m] = c_{im}^k e_k$$

であり、 $a^{lm} = (a_{lm})^{-1}$ である。ただし縮約の規則に従い、 $\sum$ を省略した。

すると、(2-2) の Euler 方程式は、

$$\begin{aligned} e_k &= (ik_2, -ik_1)e^{ik \cdot x} \\ a^{lm} &= \frac{1}{|l|^2} \delta(l+m) \\ c_{lm}^k &= (l \times m) \delta(k-l-m) \end{aligned} \quad (2-5)$$

の場合である。 ($|k|^2 = k_1^2 + k_2^2$, $l \times m = l_1 k_2 - l_2 k_1$, $\delta(k) = 1$ if $k = 0$, 0 otherwise.) また、Zeitlin's system は a^{lm} は同じで、構造定数が

$$c_{lm}^k = \sin \frac{2\pi}{N} (l \times m) \delta(k-l-m \bmod N) \quad (2-6)$$

であり、基底 $\{e_k\}$ は行列 $\{J_k\}$ で表現される場合である:

$$J_{(j_1, j_2)} = \zeta^{\frac{1}{2} j_1 j_2} g^{j_1} h^{j_2}. \quad (2-7)$$

ここで、 $\zeta = e^{4\pi i/N}$ は 1 の原始 N 乗根であり、さらに

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \zeta^{N-1} \end{pmatrix} \\ h &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。この構造定数 c_{lm}^k はそれぞれ $\text{sdiff}T^2$ と $\text{su}(N)$ のそれになっている。すなわち、(2-2) は群 G が $\text{SDiff}T^2$ の場合で、(2-1) は $\text{SU}(N)$ の場合なのである。

Poisson 構造については、Poisson 括弧は次の Kirillov 括弧

$$\{f, g\} = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

により与えられ、これを用いて方程式系は

$$\dot{x}_k = \{x_k, H\}$$

と書くことができる。H が Hamiltonian で、

$$H = \frac{1}{2} a^{ij} x_i x_j$$

である。

保存量については、まず 2 次元 Euler 方程式は渦度の任意関数の積分を保存量として持つことが知られている。Zeitlin's system の場合は、上の行列表現を用いて方程式を Lax 表示すると保存量の存在が明らかとなる。つまり、(2-1) は以下の式と同値である：

$$\dot{\Omega} = [\Omega, \Phi] = \Omega\Phi - \Phi\Omega. \quad (2-8)$$

ここで、

$$\Omega = \sum_k \omega_k J_k$$

$$\Phi = a^{ij} \omega_i J_j.$$

この (2-8) 式の形から任意の自然数 m に対して Ω^m の trace $\text{tr}(\Omega^m)$ が保存することがわかる。 $I_m = \text{tr}(\Omega^m)$ のうち関数として独立なものは $N-1$ 個であり、エネルギー E とあわせて N 個の保存量が存在することになる。 I_m の具体的な形は以下の通りである。

$$(I_1 = 0)$$

$$I_2 = \sum_{\mathbf{k}} |\omega_{\mathbf{k}}|^2$$

$$I_3 = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} e^{\frac{2\pi i}{N} \mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2} \omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2} \omega_{-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \bmod N}$$

$$I_m = \sum e^{\frac{2\pi i}{N} \{\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2 + \dots + (\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_{m-2}) \times \mathbf{k}_{m-1}\}} \omega_{\mathbf{k}_1} \dots \omega_{\mathbf{k}_m}$$

$$\sum = \sum_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_m \bmod N = 0}$$

truncated system についてであるが、それが Hamilton 系としての構造を壊していることは、Jacobi の恒等式が成り立たないことに表われる。実際、例えば $\mathbf{k} + \mathbf{l} \notin C, \mathbf{l} + \mathbf{m} \in C, \mathbf{m} + \mathbf{k} \in C$ となるような波数ベクトルの組が存在するが、これに対して

$$[e_{\mathbf{k}}, [e_{\mathbf{l}}, e_{\mathbf{m}}]] + [e_{\mathbf{l}}, [e_{\mathbf{m}}, e_{\mathbf{k}}]] + [e_{\mathbf{m}}, [e_{\mathbf{k}}, e_{\mathbf{l}}]] \neq 0$$

である。その結果、truncated system は 2 個の保存量しか持たない。

§3 エネルギー・スペクトル

ここでは Zeitlin's system と Euler 方程式の数値計算による比較を行なった結果について述べる。このとき、(2-3) の性質に注意して (2-1) の数値シミュレーションにおいては右辺を $N/2\pi$ 倍しておく。モード数は $N = 65$ とし、 $\Delta t = 10^{-2}$ で $t = 12$ まで計算した。

図1 はエネルギー・スペクトル $E(k)$ の時間発展を Zeitlin's system の場合について調べたものである。ただし、

$$E(k) = \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{k}|=k} |\mathbf{u}(\mathbf{k})|^2$$

であり、ここで $\mathbf{u}(\mathbf{k}) = (ik_2, -ik_1)\omega_{\mathbf{k}}$ である。初期のスペクトルは $E(k) \propto k^2 \exp(-k/k_0)$ のように与えた。 $k = 32$ 付近で折れ曲っているのは、いま波数成分の大きさが $n = 32$ に限られているためである。

図2 は Zeitlin's system と Euler 方程式に対して同じ初期条件を与えたときの各モードのエネルギー $|\mathbf{u}(\mathbf{k})|^2$ を波数の大きさに対して平均したものである。初期条件は $E(k) \propto k^2 \exp(-k/k_0)$ とし、 $k_0 = 4.0$ の場合を図2-1に、 $k_0 = 2.0$ の場合を図2-2に示した。Zeitlin's system、Euler 方程式どちらの場合も大きい k に対しては $|\mathbf{u}(\mathbf{k})|^2 \propto k^{-2}$ となっていることがわかる。図は流線を $t = 0$ のとき（共通）と、最終状態 $t = 12$ のときに描いたものである。

非粘性流のエネルギー・スペクトルについては、統計力学による議論ができる (Kraichnan 1975, Kraichnan and Montgomery 1980)。

まず次式が成り立つ:

$$\frac{\partial \dot{a}_{\mathbf{k}}}{\partial a_{\mathbf{k}}} + \frac{\partial \dot{b}_{\mathbf{k}}}{\partial b_{\mathbf{k}}} = 0. \quad (3-1)$$

ここで、 $\omega_k = a_k + ib_k$ ($a_k, b_k \in \mathbf{R}$) である。式 (3-1) は $\{a_k, b_k\}$ を独立変数として相空間を考えたとき、相空間の体積要素が保存される (Liouville property) ことを意味する。したがって統計力学的平衡状態を考えることができる (Lee 1952)。分配関数は

$$Z = \int \exp(-2\alpha E - \beta\Omega) d\Pi \quad (3-2)$$

($\Omega = \sum_k |\omega_k|^2$) のようになる。 Ω が入ってくるのはこれが保存されるためである。この分配関数は

$$Z = \int \exp\left\{\sum_k -(\alpha + \beta|k|^2)|u(k)|^2\right\} d\Pi \quad (3-3)$$

のように各モードについて変数分離でき、その結果

$$|u(k)|^2 = \frac{C'}{\alpha + \beta|k|^2}$$

というスペクトルを与えることになる。

この議論は truncated system については十分であるが、Zeitlin's system 及び Euler 方程式の場合については E と Ω 以外にも保存量が存在するので、それを分配関数に取り入れるべきである。しかし、数値計算の結果によると E と Ω 以外の保存量の影響はないようである。これは E と Ω が正定値であり各モードの「エネルギー」、その他の保存量は「相互作用」の役割を果たしており、おおよその様子は E と Ω によって決まってしまうためと考えられる。

§4 まとめと展望

Zeitlin の方程式は 2 次元非粘性流の有限自由度近似として提案されたが、その収束性には問題がある。群 $\text{SDiff}T^2$ の代数 $\text{sdiff}T^2$ を群 $\text{SU}(N)$ の代数 $\text{su}(N)$ の極限と見るのは新しい着想ではなく、素粒子理論における超弦理論との関連で研究されており、 $\text{sdiff}T^2$ はその意味でしばしば $\text{su}(\infty)$ と書かれる。これは $\text{sdiff}T^2$ と $\text{su}(N)$ の構造定数の類似性に根拠を求めている。但し、 $\text{su}(N)$ の $N \rightarrow \infty$ の極限が $\text{sdiff}T^2$ になるのかという点については、測地線方程式の意味では大いに疑問がある。あくまでも、Zeitlin's system は 2 次元非粘性流の方程式と同じタイプの方程式 (Obukhov (1969) の言う hydrodynamic system) であるといっておいた方がよさそうである。

ただし、統計力学の立場からは §3 で述べたようにスペクトルの形と保存量の関係については非常に興味ある力学系である。今回の計算では、例えば I_3 の大きさは

$$L \frac{I_3}{I_2^{\frac{3}{2}}} = \begin{cases} 1.1 \times 10^{-1} & (\text{図 2-1}) \\ 1.2 \times 10^{-1} & (\text{図 2-2}) \end{cases}$$

($L = 2\pi$: 空間周期の長さ) のように、エネルギーとエントロピー以外の保存量が比較的小さい値であった。値が大きいためにどのような影響が表われるのかは今後の課題である。

参考文献

R. Abraham and J. Marsden, Foundations of Mechanics, second edition (Addison-Wesley, Reading Mass. 1978)

V.I.Arnold, Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfait, Ann. Inst. Fourier Grenoble 16 (1966) 319-361.

R.H.Kraichnan, Statistical dynamics of two-dimensional flow, J. Fluid. Mech. 67 (1975) 155-175.

R.H.Kraichnan and D.Montgomery, Two-dimensional turbulence, Rep. Prog. Phys. 43 (1980) 547-619.

T.D.Lee, On some statistical properties of hydrodynamical and magneto-hydrodynamical fields, Quart. Appl. Math. 10 (1952) 69-73.

A.M.Obukhov, Integral invariants in hydrodynamic systems, Sov. Phys. Doklady 14 (1969) 32-35.

V.Y.Zeitlin, Algebraization of 2-D Ideal Fluid Hydrodynamical Systems and Their Finite-Mode Approximations, Preprint (1989).

V.Y.Zeitlin, Finite-mode analogs of 2-D ideal hydrodynamics: coadjoint orbits and local canonical structure, Preprint (1990).

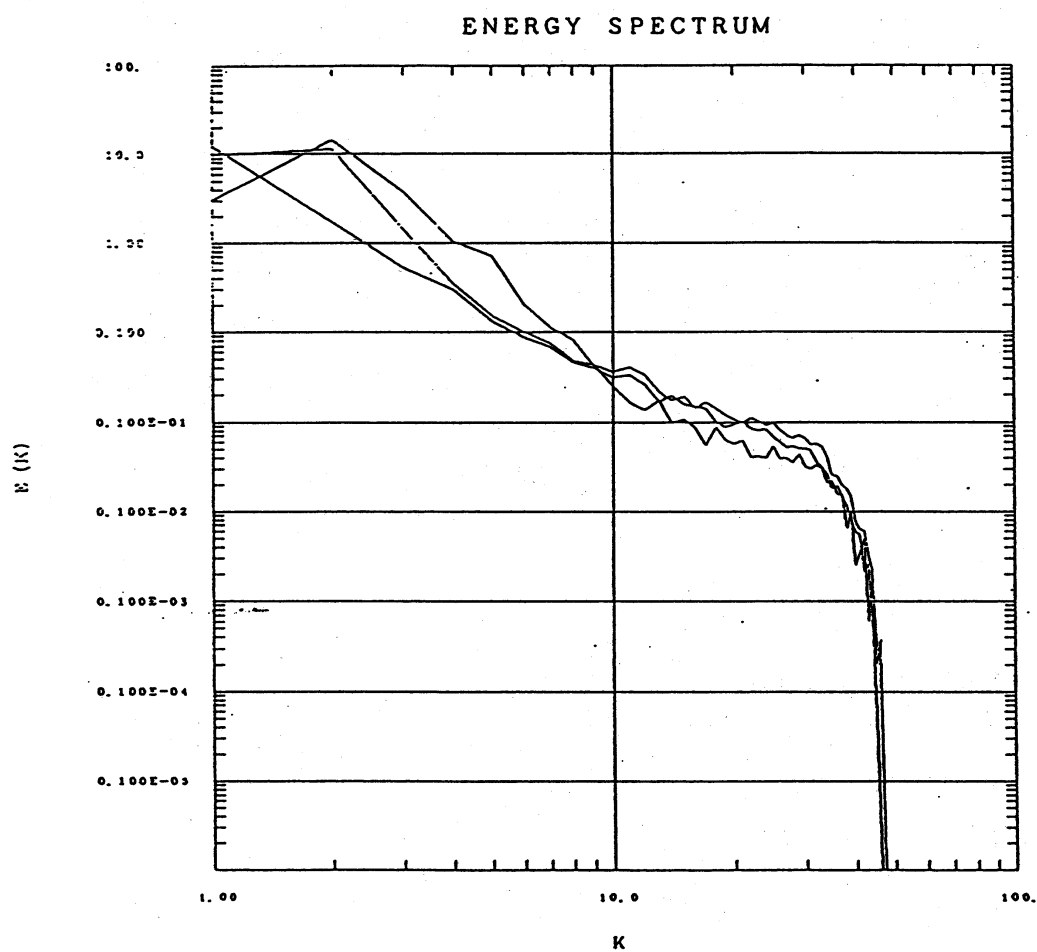
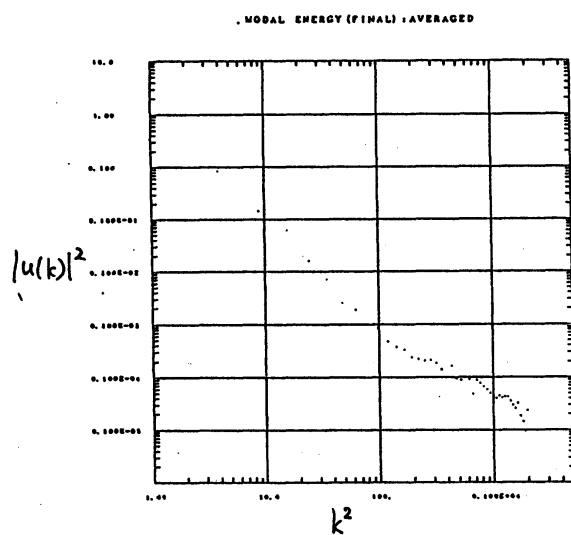
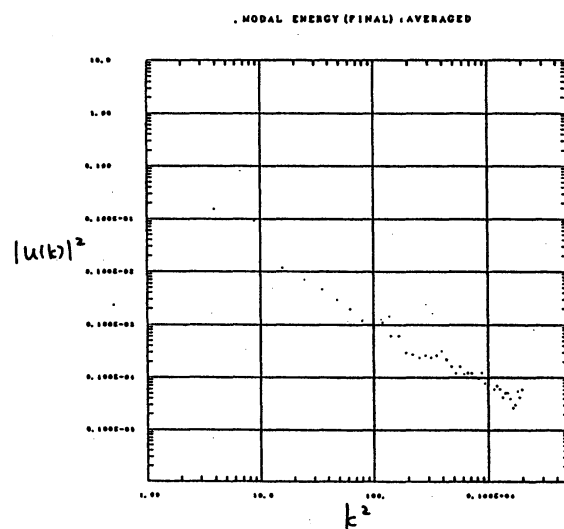


図1 Zeitlin's system による エネルギー・スペクトル

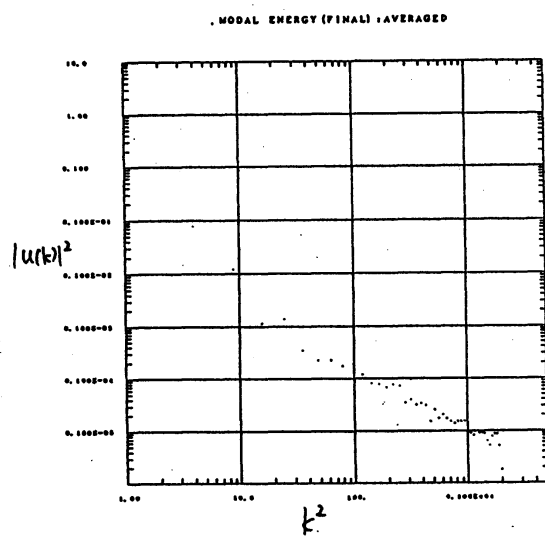


Euler 方程式

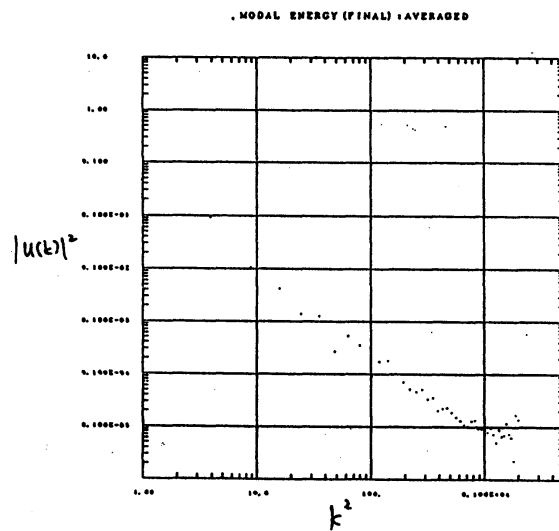


Zeitlin's system

図 2-1

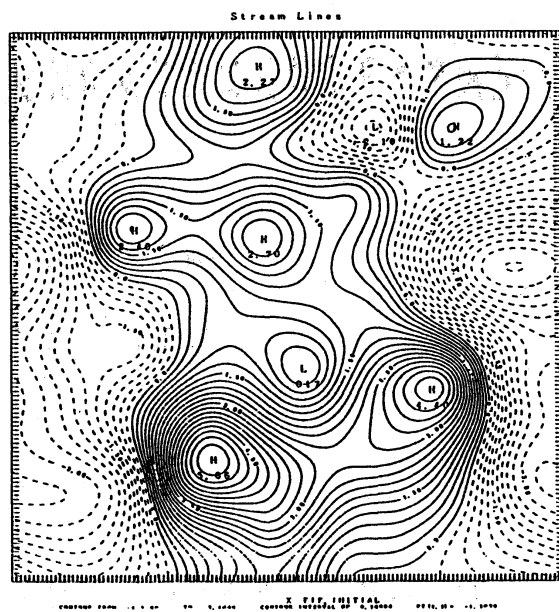


Euler 方程式

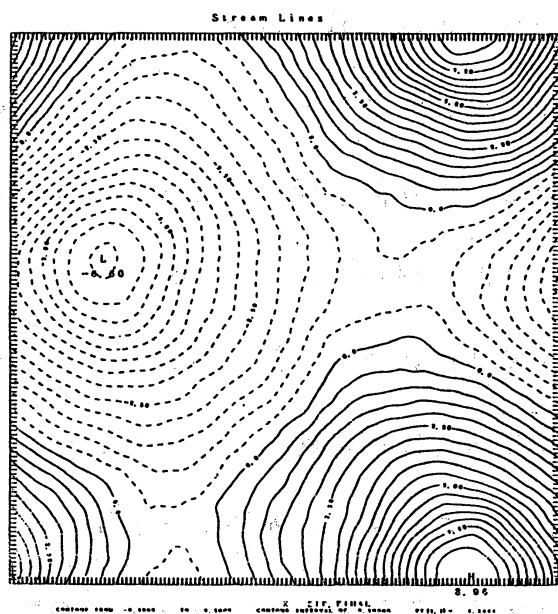


Zeitlin's system

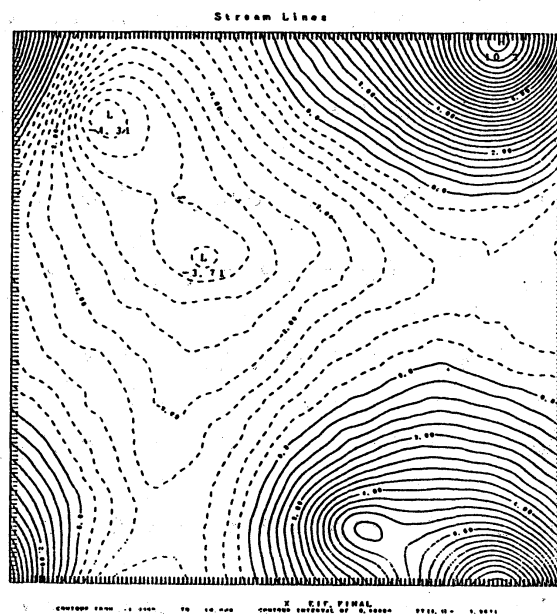
図 2-2



$t=0$ (普通)



$t=12$ Euler 方程式



$t=12$ Zeitlin's system

図3. 流線