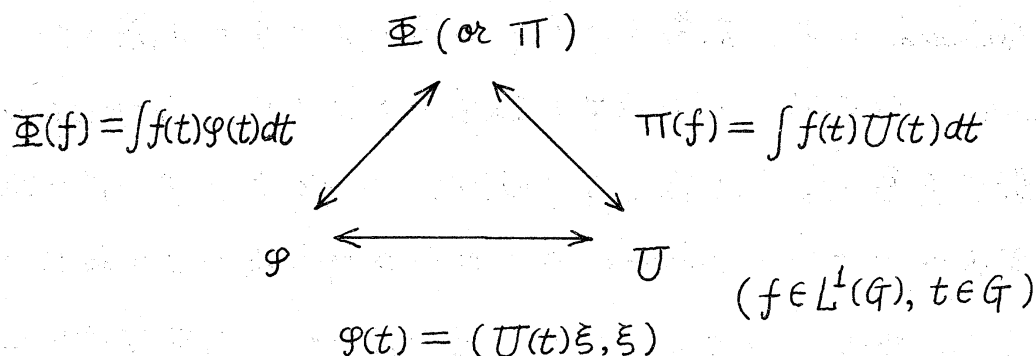


A note on positive definite maps

東工大 理 伊藤 茂

§ 1. 序. G を局所 compact 群, $dt: G$ 上の左 Haar 測度,
 $L^1(G): G$ 上の dt に關する可積分関数 (の同値類) 全体とす
 る. $L^1(G)$ は norm $\|f\| = \int |f(t)| dt$, 積 $(fg)(t) =$
 $\int f(s)g(s^{-1}t)ds$, involution $f^*(t) = \Delta(t^{-1})\overline{f(t^{-1})}$ (Δ は G 上
 の modular 関数) により approximate unit を持つ Banach $*$ -
 algebra. $C^*(G)$ を $L^1(G)$ の enveloping C^* -algebra とする. このと
 き, $C^*(G)$ 上の正線形汎関数 φ (or $C^*(G)$ の $*$ -表現 π), G
 上の連続正定値関数 φ , G の (弱) 連続 unitary 表現 U の間
 には 1 対 1 の対応が成り立つことがわかつている (cf. [2]):

(φ と π の対応は GNS 表現)



φ と U の対応で, ξ は U の表現されている Hilbert 空間の元.

この対応はちが *cyclic* の時同型を除いて一意である。

φ と U の関係を一一般化したものが, Naimark, Sz.-Nagy 等による作用素値正定値関数の *dilation* である (cf. [5], [10]).

$\mathcal{H}$: Hilbert 空間, $B(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体, $\varphi: G \rightarrow B(\mathcal{H})$: (弱連続) 正定値 (簡単のために $\varphi(e) = I$ とする) とすると φ と φ の *dilation* の間には次の関係がある (G は単に位相群でよい):

$\varphi \longleftrightarrow \varphi$ の *dilation*, i.e., $\exists \mathcal{K} \supset \mathcal{H}$: Hilbert 空間,

$\exists U: G \rightarrow B(\mathcal{K})$: (弱連続) unitary 表現で,

$P: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$: 直交射影とすると, $\forall t \in G, \forall x \in \mathcal{H}$,

$$\varphi(t)x = P U(t)x.$$

これの典型的な例としては Hilbert 空間上の *contraction* に付随するものがある: $T \in B(\mathcal{H})$, $\|T\| \leq 1$ のとき, $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow B(\mathcal{H})$ ($\mathbb{Z}$ は整数全体) を $\varphi(n) = T^n$ ($n \geq 0$), T^{*-n} ($n < 0$) で定義すると φ は正定値。

Naimark による広義スペクトル族のスペクトル族への *dilation* を含む形に上の結果を拡張するために, Sz.-Nagy は $\ast$ -半群 Γ を導入した (cf. [5], [10]). このとき, $\varphi: \Gamma \rightarrow B(\mathcal{H})$: 正定値 $\longleftrightarrow \varphi$ の *dilation* なる対応が群の場合と同様に与えられる。但しこの時は φ は正定値条件の他に有界性条件を満たす必要がある。§2 ではこれらの結果をさらに一般化して,

Hilbert module の上で議論を展開する。

次に $A: C^*$ -algebra, $\text{Aut}(A): A$ の $*$ -automorphism 全体,
 $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(A):$ 強連続 homomorphism とする. $L^1(G, A)$ を G
 上の dt に関して Bochner 積分可能な A -値関数 (の同値類)
 全体とすると, $\text{norm } \|f\| = \int \|f(t)\| dt$, 積 $(fg)(t) =$
 $\int f(s) \alpha_s g(s^{-1}t) ds$, involution $f^*(t) = \Delta(t^{-1}) \alpha_t f(t^{-1})^*$ によ
 って approximate unit を持つ Banach $*$ -algebra (以後は α に依
 存することとを明記するため $L^1(G, A, \alpha)$ と書くことにする) に
 なる. $C^*(G, A, \alpha)$ を $L^1(G, A, \alpha)$ の enveloping C^* -algebra とす
 る (α による A と G の C^* -crossed product). このとき, $C^*(G, A, \alpha)$
 の $*$ -表現 π と (A, G, α) の covariant 表現 (π, U) とは 1 対 1 の対
 応がある (Doplicher-Kastler-Robinson [3]). 最近 Pedersen [8] に
 より $C^*(G)$ の場合の正定値関数と同様な概念が $C^*(G, A, \alpha)$ の
 場合に導入され, $C^*(G, A, \alpha)$ 上の正線形汎関数重が特徴付けら
 れた (Pedersen の本を教えて頂いた山形大の富山淳先生に感
 謝します). なお G が discrete の時はすでに Zeller-Meier [11]
 によって与えられている事に注意. $\varphi: G \rightarrow A^*$ (A の dual):
 (norm 連続) α -正定値とすると, $C^*(G)$ の場合と同様な 1
 対 1 の対応は下図のようになっている. なお φ と (π, U) の正
 確な対応関係は, G が discrete の時に Zeller-Meier [11] によ
 って与えられただけである. また重と π の対応は GNS 表現によ

るものである。

$$\begin{array}{ccc}
 & \Phi \text{ (or } \Pi) & \\
 \Phi(f) = \int \langle f(t), \varphi(t) \rangle dt & \swarrow \quad \searrow & \Pi(f) = \int \pi(f(t)) U(t) dt \\
 ([8]) & & ([3]) \\
 \varphi & \longleftrightarrow & (\pi, U)
 \end{array}$$

$$\langle a, \varphi(t) \rangle = (\pi(a) U(t) \xi, \xi)$$

$$(f \in L^1(G, A, \alpha), a \in A, t \in G)$$

φ と (π, U) の対応で， ξ は (π, U) の表現されている Hilbert 空間の元．この対応は ξ が cyclic の時は同型を除いて一意．

§3 ではまず dilation の構成と同様な方法により， φ より直接 (π, U) を構成する．次に，正定値関数から再生核 Hilbert 空間が構成できるように (cf. [1])， φ からある種の“再生核” Hilbert 空間が構成できることを示す．§3 は東工大の小沢正直君との共同研究の一部である．

§2. Hilbert module 上の dilation. B : C^* -algebra, X : right B -module (module action $(x, b) \rightarrow x \cdot b$ ($x \in X, b \in B$)) と compatible な complex field $\mathbb{C}$ 上の vector 空間の構造を持つとする，i.e., $\lambda(x \cdot b) = (\lambda x) \cdot b = x \cdot (\lambda b)$ ($x \in X, b \in B, \lambda \in \mathbb{C}$)) とする．

定義 2.1. X が pre-Hilbert B -module $\stackrel{\text{def}}{\iff} X$: right B -module かつ $\exists \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow B$: 共役線形 $\angle$ (i) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$; (ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$; (iii) $\langle x \cdot b, y \rangle =$

$\langle x, y \rangle_b, (x, y \in X, b \in B)$ を満たす.

$\|x\|_X = \sqrt{\|\langle x, x \rangle\|}$ は X の norm. この norm で完備の時 X を Hilbert B -module と呼ぶ. Hilbert module の概念は Paschke [7], Rieffel [9] によって導入された. 以下 X は Hilbert B -module とする. $B(X)$: X 上の有界線形写像全体, $\mathcal{K}(X) = \{T \in B(X) \mid \exists T^* \in B(X), \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle (\forall x, y \in X)\}$ とする. $\mathcal{K}(X)$ は operator norm $\|\cdot\|_X$ と involution $T \rightarrow T^*$ の unital C^* -algebra.

Γ を unital $*$ -半群とする, i.e., Γ は unit ε を持つ半群で, involution $*$ が定義されていて, $\xi^{**} = \xi, (\xi\eta)^* = \eta^*\xi^* (\xi, \eta \in \Gamma)$ を満たす. 任意の群 G は $t^* = t^{-1}, \varepsilon = e$ (G の unit) により unital $*$ -半群となる. $F(\Gamma, X) = \{f: \Gamma \rightarrow X \mid f(\varepsilon) \neq 0 \text{ となる } f \text{ は有限個}\}$ とおく.

定義 2.2. $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathcal{K}(X)$ が正定値 (positive definite; PD) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall f \in F(\Gamma, X), \sum_{\xi, \eta} \langle \varphi(\eta^*\xi) f(\xi), f(\eta) \rangle \geq 0$. (この時 $\forall \xi \in \Gamma, \varphi(\xi)^* = \varphi(\xi^*)$ となる).

定義 2.3. PD $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathcal{K}(X)$ が有界性条件 (boundedness condition; BC) を満たす $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists c: \Gamma \rightarrow [0, \infty), \forall \alpha \in \Gamma, \forall f \in F(\Gamma, X), \sum_{\xi, \eta} \langle \varphi(\eta^*\alpha\xi) f(\xi), f(\eta) \rangle \leq c(\alpha) \sum_{\xi, \eta} \langle \varphi(\eta^*\xi) f(\xi), f(\eta) \rangle$.

有界性条件は次の様に特徴付けられる.

補題 2.4. $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathcal{K}(X)$: PD の時, 次の条件は同値である:

(i) φ : BC を満たす;

$$(ii) \exists d: \Gamma \rightarrow [0, \infty), \forall \alpha, \xi \in \Gamma, \forall x \in X,$$

$$\langle \varphi(\xi^* \alpha^* \alpha \xi) x, x \rangle \leq d(\alpha) \langle \varphi(\xi^* \xi) x, x \rangle;$$

$$(iii) \exists s: \Gamma \rightarrow [0, \infty), \exists C > 0, \forall \xi, \eta \in \Gamma,$$

$$\|\varphi(\xi)\|_X \leq C s(\xi), \quad s(\xi\eta) \leq s(\xi)s(\eta).$$

$\pi: \Gamma \rightarrow \mathcal{A}(X)$ が表現とは, $\forall \xi, \eta \in \Gamma, \pi(\xi)^* = \pi(\xi^*),$
 $\pi(\xi\eta) = \pi(\xi)\pi(\eta), \pi(\varepsilon) = 1_X$ (X 上の恒等写像) を満たすものとする. Υ を別の Hilbert B -module とし, $T: X \rightarrow \Upsilon$ とする. T が module 写像とは, $\forall x \in X, \forall b \in B, T(x \cdot b) = (Tx) \cdot b$ を満たすものと言う. T が isometric embedding $\Leftrightarrow \forall x, y \in X,$
 $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle.$

定理 2.5. $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathcal{A}(X): PD$ で BC を満たすとする. すると

(i) $\exists \Upsilon: \text{Hilbert } B\text{-module}, \exists r: X \rightarrow \Upsilon, \exists q: \Upsilon \rightarrow X: \text{有界線形 module 写像で } qr = \varphi(\varepsilon), \exists \pi: \Gamma \rightarrow \mathcal{A}(\Upsilon): \text{表現で}, \forall \xi \in \Gamma,$
 $\varphi(\xi) = q\pi(\xi)r.$ また $\{\pi(\xi)r x \mid x \in X, \xi \in \Gamma\}$ が張る線形空間は Υ で稠密である.

(ii) さらに $\varphi(\varepsilon) = 1_X$ の時は, $r: \text{isometric embedding}$ で, X と $r(X)$ を同一視すると, q は $\mathcal{A}(\Upsilon)$ に属する射影になる.

A を unital C^* -algebra とすると, $\langle x, y \rangle = y^* x \ (x, y \in A)$ で A は Hilbert A -module になり, $\mathcal{A}(A) = \{L_x \mid x \in A\}$ となる. 但し $L_x y = xy \ (y \in A)$ である. $\mathcal{A}(X)$ は unital C^* -algebra だから Hilbert $\mathcal{A}(X)$ -module になり, $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathcal{A}(X): PD$ に対して,

$\psi: \Gamma \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{A}(X))$ を $\psi(\xi) = L_{\varphi(\xi)}$ で定義すると, ψ は PD. また φ が BC を満たせば, $\|\psi(\xi)\|_{\mathcal{A}(X)} = \|L_{\varphi(\xi)}\|_{\mathcal{A}(X)} = \|\varphi(\xi)\|_X$ だから補題 2.4 より ψ も BC を満たす.

定理 2.6. $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathcal{A}(X): \text{PD}$ が BC を満たす. すると

(i) $\exists \Upsilon: \text{Hilbert } \mathcal{A}(X)\text{-module}, \exists \pi: \Gamma \rightarrow \mathcal{A}(\Upsilon): \text{表現},$
 $\exists z \in \Upsilon$ で, $\forall \xi \in \Gamma, \varphi(\xi) = \langle \pi(\xi)z, z \rangle$. また $y_\xi = \pi(\xi)z$ とおくと, $\varphi(\eta^*\xi) = \langle y_\xi, y_\eta \rangle$ で, $\{y_\xi \cdot a \mid \xi \in \Gamma, a \in \mathcal{A}(X)\}$ の張る線形空間は Υ の稠密部分である.

(ii) さらに $\varphi(e) = 1_X$ の時は, $\exists p \in \mathcal{A}(\Upsilon): \text{射影}, \exists \iota: \mathcal{A}(X) \rightarrow p\mathcal{A}(\Upsilon)p: \text{onto } *-isomorphism$ で, $\forall \xi \in \Gamma, \iota\varphi(\xi) = p\pi(\xi)p$.

§3. Covariant 表現と Vector 値 PD 関数. $G: \text{位相群}, A: C^*\text{-algebra}, \text{Aut}(A): A \text{ の } *-automorphism \text{ 全体}, A^*: A \text{ の dual}, \langle \cdot, \cdot \rangle: A \times A^* \text{ の duality pairing とする. } \alpha: G \rightarrow \text{Aut}(A): \text{homomorphism と強連続, i.e., } \forall a \in A, \alpha_t a \text{ が } t \text{ について norm 連続, とする. } \alpha \text{ の dual を同じ } \alpha \text{ と書く, i.e., } \langle a, \alpha_t p \rangle = \langle \alpha_t a, p \rangle (\forall a \in A, \forall t \in G, \forall p \in A^*).$

定義 3.1. $\varphi: G \rightarrow A^*$ が α -正定値 (α -PD) $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall n, \forall \{t_1, \dots, t_n\} \subset G, \forall \{a_1, \dots, a_n\} \subset A, \sum_{i,j} \langle \alpha_{t_i}^{-1}(a_i^* a_j), \varphi(t_i^{-1} t_j) \rangle \geq 0.$
 $\varphi: G \rightarrow A^*$ が弱連続 $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall a \in A, \langle a, \varphi(t) \rangle$ が t について連続.

補題 3.2. (Zeller-Meier [11]) $\varphi: G \rightarrow A^*$ が α -PD $\Rightarrow \forall s, t \in G, \alpha_{s^{-1}} \varphi(s^{-1} t)^* = \alpha_t^{-1} \varphi(t^{-1} s), \|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(e)\|.$

定義3.3. $(\pi, U, \mathfrak{A})$ が (A, G, α) の covariant 表現 $\stackrel{\text{def}}{=}$.
 $\mathfrak{A}$ は Hilbert 空間, $\pi: A \rightarrow B(\mathfrak{A}): *$ -表現, $U: G \rightarrow B(\mathfrak{A}):$ 連続 unitary 表現で, $\forall t \in G, \forall a \in A, U(t)\pi(a)U(t^{-1}) = \pi(\alpha_t a)$. $\xi \in \mathfrak{A}$ が (π, U) の cyclic vector $\stackrel{\text{def}}{=}$ $\{\pi(a)U(t)\xi \mid a \in A, t \in G\}$ の張る線形空間が $\mathfrak{A}$ で稠密.

定理3.4. $\varphi: G \rightarrow A^*$ が弱連続, α -PD とする. すると
 $\exists (\pi, U, \mathfrak{A}, \xi): (A, G, \alpha)$ の cyclic covariant 表現で, $\forall a \in A, \forall t \in G, \langle a, \varphi(t) \rangle = (\pi(a)U(t)\xi, \xi)$. また $(\pi, U, \mathfrak{A}, \xi)$ は同型を除いて一意である.

系3.5. $\varphi: \alpha$ -PD, 弱連続 $\Rightarrow \varphi: \text{norm 連続}$.

再生核 Hilbert 空間の考え方を一般化して次の結果を得る.

定理3.6. $\varphi: \alpha$ -PD と同じ. すると, $\exists (\pi, U, \mathfrak{A}, \xi): (A, G, \alpha)$ の cyclic covariant 表現, $\mathfrak{A}: \text{norm 連続}$ な $P: G \rightarrow A^*$ の一部のつくる vector 空間より成る, $\exists [\cdot, \cdot]: \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow A^*: \text{共役線形}$ で, $\forall t \in G, K_t: G \rightarrow A^* \ni K_t(s) = \alpha_{s^{-1}}\varphi(s^{-1}t)$ とおくと, $K_t \in \mathfrak{A}, K_e = \xi$. さらに $\forall t \in G, \forall P, Q \in \mathfrak{A}, \forall a \in A, \mathfrak{A}$ の内積 $(P, Q) = \lim_i \langle u_i, [P, Q] \rangle$ ($\{u_i\}: A$ の approximate unit), $[P, K_t] = P(t), \varphi(t) = [U(t)\xi, \xi], \langle a, \varphi(t) \rangle = (\pi(a)U(t)\xi, \xi)$.

最後に $C^*(G, A, \alpha)$ 上の正線形汎関数と α -PD 関数の関係を簡単に書いておこう (cf. Pedersen [8]). G は局所 compact 群とする. $\forall t \in G, \forall a \in A$ に対して $L^1(G, A, \alpha)$ 上の有界線形作用素

$V(t), \rho(a) \in (V(t)f)(s) = \alpha_t f(t^{-1}s), (\rho(a)f)(s) = af(s)$
 $(f \in L^1(G, A, \alpha))$ で定義する.

定理 3.7. (i) $\varphi: \alpha$ -PD, 弱連続とする. $\Phi: L^1(G, A, \alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ $\in \Phi(f) = \int \langle f(t), \varphi(t) \rangle dt$ で定義すると, Φ は $L^1(G, A, \alpha)$ 上の (連続) 正線形汎関数 (従って Φ は $C^*(G, A, \alpha)$ 上の正線形汎関数に一意に拡張できる).

(ii) 逆に $\Phi: C^*(G, A, \alpha)$ 上の正線形汎関数とする. $\varphi: G \rightarrow A^*$ $\in \langle a, \varphi(t) \rangle = \lim_j \Phi(\rho(a)E_j V(t)E_j)$ ($a \in A, t \in G$) で定義すると, $\varphi: \alpha$ -PD, 弱連続. 但し $\{E_j\}: L^1(G, A, \alpha)$ の approximate unit. (実際 Φ に対応する GNS 表現 $(\pi, \mathfrak{H}, \xi)$ とし, さらに後者に対応する cyclic covariant 表現 $(\pi, U, \mathfrak{H}, \xi)$ とすると, 上の極限は $(\pi(a)U(t)\xi, \xi)$ に等しい).

参考文献

- [1] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 337-404.
- [2] J. Dixmier, C^* -Algebras, (English transl.), North-Holland, 1977.
- [3] S. Doplicher, D. Kastler, D.W. Robinson, Covariance algebras in field theory and statistical mechanics, Commun. Math. Physics 3 (1966), 1-28.
- [4] S. Itô, A note on dilations in modules over C^* algebras,

Res. Rep. Inf. Sci. No. A-70, 1979.

- [5] W. Mlak, *Dilations of Hilbert Space Operators*, *Dissertationes Mathematicae* 153, PWN, 1978.
- [6] M. Orawa, *Hilbert $B(H)$ -modules and stationary processes*, *Kodai Math. J.* (to appear).
- [7] W. L. Paschke, *Inner product modules over B^* -algebras*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 182(1973), 443-468.
- [8] G. K. Pedersen, *C^* -Algebras and their Automorphism Groups*, Academic Press, 1979.
- [9] M. A. Rieffel, *Induced representations of C^* -algebras*, *Advances in Math.* 13(1974), 176-257.
- [10] F. Riesz, B. Sz. Nagy, *Functional Analysis and Appendix*, Ungar, 1960.
- [11] G. Zeller-Meier, *Produits croisés d'une C^* -algèbre par un groupe d'automorphismes*, *J. Math. Pures Appl.* 47(1968), 101-239.