

3. ある高次元アトラクタの研究 — アトラクタの内と外 —

京大基研, 北大薬^a 池田研介, 松本健司^a

4. 転位の伝播とカオティックな破壊

京大理 後藤 章

Coupled Logistic Map の分岐現象

京大・理 坂口英継, 富田和久

Logistic map は period doubling 分岐をくりかえしてカオスになる例としてよく用いられる。ここでは2つのロジスティックマップを結合させた2次元マップを考える。

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n(1-x_n) + D(y_n - x_n) \\ y_{n+1} = Ay_n(1-y_n) + D(x_n - y_n) \end{cases} \quad (1)$$

この系は A , D , 初期値をかえることによって, さまざまなふるまいを示す。以下では D が小さい時は, 摂動論的な考えで, ある程度相図の見通しがつくことを示したい。

D が 0 の時は 1 次元マップを考えればよい。 A が $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ で周期倍化し, $\dots, A_n^*, A_2^*, A_1^*$ で周期カオスの周期が半減する。図 1 に 4 周期まで分岐がすすんだ時の様子を書いた。周期点の位置を 1 に近い方から 2 進数で番地づけ ($i_1, i_2, \dots, i_m$) をすると, 2^m 周期を巡回する順番 N は i_0 を 0 として

$$N = \sum_{n=1}^m \text{mod}(i_{n-1} + i_n, 2) \times 2^{n-1} + 1 \quad (2)$$

と書ける。2次元相空間 (xy 空間) のアトラクタは,

1 次元マップの 2^m 周期点 $z_1, z_2, \dots, z_{2^m}$ を使って

$$\begin{aligned} & (z_1, z_1), (z_2, z_2), \dots, (z_{2^m}, z_{2^m}) \\ & (z_1, z_2), (z_2, z_3), \dots, (z_{2^m}, z_1) \\ & \vdots \\ & (z_1, z_{2^m}), (z_2, z_1), \dots, (z_{2^m}, z_{2^m-1}) \end{aligned}$$

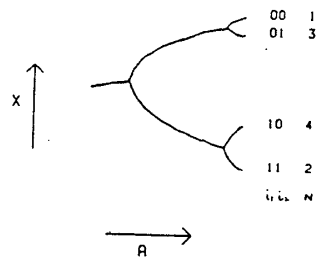


図 1

と x 方向と y 方向の順番のいずれが 1 から 2^m までの全部で 2^m 種類ある。図 2 は $m=2$ の時の 4 つの周期解を示している。

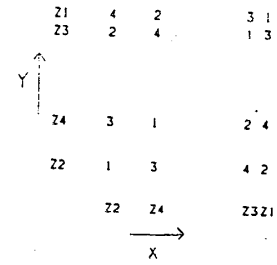


図 2

次に D が 0 ではないが小さい場合を考える。もし A が分岐点 A_n , A_n^* から遠いと ($|D| \ll |A - A_n|$) $D=0$ の性質が保たれる。つまり $A_n < A < A_{n+1}$ では 2^n 種類の 2^n 周期点が存在し、 $A_{n-1}^* < A < A_n^*$ では 2^n 種類の 2^n 周期カオスが存在する。 A が A_∞ に近づき、 D も小さくすると、非常に多くのアトラクタが

共存するようになる。おそらく $A=A_\infty$, $D=0$ からはカオスとノンカオスをわける分岐ラインがフラクタル状にでているのだろう。

A が A_n に近い時は、もう少し複雑になる。周期点の 2^{n-1} 回マップの固有値を λ_1, λ_2 とする。 $D=0$ の時は $\lambda_1 = \lambda_2$ だが、 D によって縮退がとける。実軸上で縮退がとける場合 (Ⅰタイプ) と虚軸方向に分れる場合 (Ⅱタイプ) がある。Ⅰタイプでは A を上げると、固有値がひきつづいて 2 回 -1 をこえる。つまり 2 回 period doubling がおこる。Ⅱタイプでは A を上げると固有値の絶対値が 1 をこえ、Hopf 分岐がおこる。分岐点の近くのふるまいは周期倍化分岐のノーマルフォームを結合させた

$$\begin{cases} x_{n+1} = (-1 - \varepsilon) x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + D(C_{xx} x_n + C_{xy} y_n + B_x) \\ y_{n+1} = (-1 - \varepsilon) y_n + a_2 y_n^2 + a_3 y_n^3 + D(C_{yx} x_n + C_{yy} y_n + B_y) \end{cases} \quad (3)$$

で記述できる。もとの式(1)は x と y の交換に対して対称だったが、 2^{n-1} 回マップをとり座標原点や縮尺をかえているので(3)式は必ずしも x と y の交換に関して対称でない。また 2^{n-1} 種類の周期解がどちらのタイプの分岐をするかわかっていない。対角線上にのっている周期点の場合は、対称性から $C_{xx} = C_{yy}$, $C_{xy} = C_{yx}$, $B_x = B_y = 0$ となるのでⅠタイプであることがわかる。この場合 $\varepsilon_1 = D(C_{xx} - C_{xy})$, $\varepsilon_2 = D(C_{xx} + C_{xy})$ の 2 点で周期倍化し、 $\varepsilon_3 = D(C_{xx} + 2C_{xy})$ で pitchfork 分岐をして、2 種類の倍周期のアトラクタができる (図 3)。

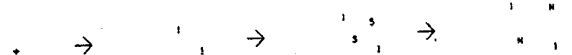


図 3

対角線に対して対称な周期解はⅡタイプと思われる。Hopf 分岐をしトラスとなり、ロッキングで周期が倍の互に対角線に対して鏡像関係の 2 つの周期解が生じる (図 4)。

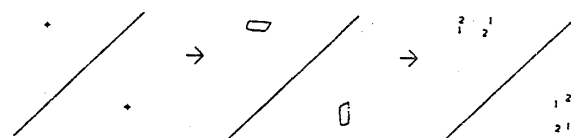


図 4

A が A_n^* に近い時は、 $D=0$ では 2 つの

周期カオスが合併するのだが、 $D \neq 0$ ではまず 1 つのカオスが basin boundary をこえ、消滅し (boundary crisis)、次にもう 1 つのカオスが成長して消えたアトラクタの領域を埋め (interior crisis)、周期が半減した 2 倍の大きさのカオスとなる (図 5)。



図 5

D が大きくなると、上でのべたような分岐線が交差し、周期解とカオスの共存など、さらに複雑になってゆく。

一次元離散力学系を生成する母関数とその導関数

日大・理工 紺野公明, 入江治行
日大・原研 島田一平

最近、力学系を複素化し、その解析的性質より力学系の性質を調べる試みがなされている。複素化の 1 つの方法に微分方程式の独立変数を複素化し、解の解析的性質をもとに方程式の可積分性とか、軌道の規則・不規則性の議論がなされている。ここ我々が新しく議論する力学系の複素化の方法は、山口・畑により導入された力学系を生成する母関数の展開パラメタを複素化し、その母関数の解析的性質より力学系が示す規則・不規則性を考察することである。

力学系が示す軌道の不安定性を表す量に Lyapunov 指数がある。力学系を生成する母関数は軌道の振舞を表すが、その軌道の持つ不安定性までは表現できない。そこで我々はその情報を得るために母関数の形式的高階導関数を導入する。特に一階導関数は軌道不安定性を表す Lyapunov 指数と密接に関係していることが示される。

母関数 F_0 の収束半径とその形式的一階導関数 F_1 の収束半径にはなんら関係はない。もし母関数の収束半径が一階導関数のそれより大きいなら、母関数は連続であるが微分不可能な領域をもち、フラクタルな性質を示す。

この報告では、一次元離散力学系を例に次の事をしめす：

- (1) F_0 と F_1 の解析的性質,
- (2) F_1 の収束半径と Lyapunov 指数との関係,
- (3) F_0 のフラクタル性。