

# 調和写像と複素フィンスラー計量 — 変分問題の視点から —

東北大学大学院理学研究科数学専攻 西川 青季 (Seiki Nishikawa)  
Mathematical Institute, Tohoku University

1975 年に小林昭七氏 ([2]) により, コンパクト複素多様体上の正則ベクトル束  $E$  が負であることと,  $E$  上に負曲率をもつ強擬凸な複素フィンスラー計量が存在することが同値であることが見いだされ, 複素フィンスラー計量は正則ベクトル束の研究にとって基本的な道具であることがあきらかになった.

正則接ベクトル束に複素フィンスラー計量があたえられた複素多様体を複素フィンスラー多様体という. 複素フィンスラー多様体間の写像に対しても, リーマン多様体間の写像の場合 ([5]) と同様に, エネルギー汎関数が自然に定義され, その臨界点として調和写像を考えることができる ([3, 4, 6]).

本稿では, まず複素エルミート多様体内の測地線 (実 1 次元の曲線) の定義方程式の導出について, 変分問題の立場から簡単に復習した後, その一般化として閉リーマン面から複素フィンスラー多様体への調和写像 (複素 1 次元の曲線) の定義方程式がどのように導かれるのかについて, できるだけフィンスラー幾何学の一般論をもちださずに解説する. また, その際にもちいられるエネルギー汎関数の性質について, リーマン多様体間の調和写像の定義にもちいられる  $L^2$  エネルギー汎関数 ([5]) と比較して, その違いをみてる.

## 1 複素フィンスラー計量

$M$  を  $m$  次元複素多様体とし,  $\pi: T^{1,0}M \rightarrow M$  を  $M$  の正則接ベクトル束とする.  $M$  の点  $z \in M$  の局所複素座標を  $(z^1, \dots, z^m) = (z^\alpha)$  とするとき, 点  $z \in M$  における正則接ベクトル  $v$  は

$$v = v^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right)_z$$

とあらわされ,  $(z^1, \dots, z^m, v^1, \dots, v^m) = (z^\alpha, v^\alpha)$  が正則接ベクトル束  $T^{1,0}M$  の点  $(z, v) \in T^{1,0}M$  の局所複素座標をあたえる.

**定義 1.** 正則接ベクトル束  $T^{1,0}M$  上の実数値連続関数  $F : T^{1,0}M \rightarrow \mathbb{R}$  がつぎの条件をみたすとき,  $F$  を  $M$  の**複素フィンスラー計量**という.

- (1) (非負性) 任意の  $(z, v) \in T^{1,0}M$  に対して  $F(z, v) \geq 0$ , かつ  $F(z, v) = 0$  となるのは  $v = 0$  のときにかぎる.
- (2) (微分可能性)  $F \in C^\infty(T^{1,0}M \setminus \{0\})$ , すなわち  $F$  は  $T^{1,0}M$  の零断面の補集合上で  $C^\infty$  級である.
- (3) (斉次性) 任意の  $\lambda \in \mathbb{C}$  と  $(z, v) \in T^{1,0}M$  に対して

$$F(z, \lambda v) = |\lambda| F(z, v) \quad (1)$$

がなりたつ.

**定義 2.**  $M$  の複素フィンスラー計量  $F : T^{1,0}M \rightarrow \mathbb{R}$  に対して,  $F^2$  の Levi 行列

$$\left( \frac{\partial F^2}{\partial v^\alpha \partial \bar{v}^\beta}(z, v) \right), \quad (z, v) \in T^{1,0}M \setminus \{0\}$$

が  $T^{1,0}M$  の零断面の補集合上でつねに正定値のとき,  $F$  を**強擬凸**な複素フィンスラー計量という.

以後,  $F$  自身よりも  $F^2$  を考えることが多いので,  $G(z, v) = F^2(z, v)$  とおく. また,  $G(z, v)$  の偏微分を添字をもちいて

$$G_\alpha = \frac{\partial G}{\partial v^\alpha}, \quad G_{,\alpha} = \frac{\partial G}{\partial z^\alpha}, \quad G_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 G}{\partial v^\alpha \partial \bar{v}^\beta}, \quad G_{\alpha,\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 G}{\partial v^\alpha \partial \bar{z}^\beta}$$

などとあらわし,  $T^{1,0}M$  の底方向の座標  $(z^\alpha)$  に関する偏微分とファイバー方向の座標  $(v^\alpha)$  に関する偏微分をコンマをもちいて区別する. とくに,  $G_{\alpha\bar{\beta}}(z, v)$  は複素フィンスラー計量  $F$  の**基本テンソル**とよばれ, 複素フィンスラー幾何学において基本的な役割を果たす.

**例 1.**  $M$  のエルミート計量  $g = g_{\alpha\bar{\beta}}(z) dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta$  に対して

$$F(z, v) = \sqrt{g(v, v)} = \sqrt{g_{\alpha\bar{\beta}}(z) v^\alpha \bar{v}^\beta}, \quad (z, v) \in T^{1,0}M$$

と定義すると,  $F : T^{1,0}M \rightarrow \mathbb{R}$  は  $M$  の強擬凸な複素フィンスラー計量をあたえる. この場合,  $F$  の基本テンソル  $G_{\alpha\bar{\beta}}(z, v)$  は計量テンソル  $g_{\alpha\bar{\beta}}(z)$  に他ならない.

**注意 1.** 強擬凸な複素フィンスラー計量  $F$  に対して

$$G(z, v) = G_{\alpha\bar{\beta}}(z, v) v^\alpha \bar{v}^\beta \quad (2)$$

がなりたつ。実際 (1) 式より,  $G$  について

$$G(z, \lambda v) = \lambda \bar{\lambda} G(z, v)$$

をえる。この式を  $\lambda$  と  $\bar{\lambda}$  について偏微分すると

$$G_{\alpha\bar{\beta}}(z, \lambda v) v^\alpha \bar{v}^\beta = G(z, v). \quad (3)$$

よって  $\lambda = 1$  とおいて (2) 式をえる。

(2) 式において, 基本テンソル  $G_{\alpha\bar{\beta}}(z, v)$  は一般に  $v$  に依存するので,  $G(z, v)$  は例 1 のエルミート計量の場合のように,  $v$  について 2 次式であるわけではないことに注意。

**注意 2.**  $G \in C^2(T^{1,0}M)$ , すなわち  $G$  が  $T^{1,0}M$  の零断面上も含めて  $C^2$  級であるとすると, (3) 式において  $\lambda \rightarrow 0$  とするとき

$$G(z, v) = G_{\alpha\bar{\beta}}(z, 0) v^\alpha \bar{v}^\beta$$

をえる。よって,  $g_{\alpha\bar{\beta}}(z) = G(z, 0)$  とおけば,  $G(z, v)$  は結局エルミート計量から定義された複素フィンスラー計量に他ならないことがわかる。

実は, エルミート計量から定義されない複素フィンスラー計量  $F$  に対して,  $G$  の微分可能性は  $C^{1,1}$  級, すなわち

$$G \in C^{1,1}(T^{1,0}M)$$

であることが確かめられる。

## 2 調和写像

以下,  $M$  を閉リーマン面すなわちコンパクトな 1 次元複素多様体とし,  $(N, F)$  を  $n$  次元複素フィンスラー多様体, すなわち強擬凸な複素フィンスラー計量  $F : T^{1,0}N \rightarrow \mathbb{R}$  があたえられた一般次元の複素多様体としよう。

$f : M \rightarrow N$  を  $M$  から  $N$  への  $C^\infty$  級写像とする。このとき,  $f$  の微分  $df : TM \rightarrow TN$  は実接ベクトル束の間の束写像を定めるが, 複素化された接ベクトル束の間の束写像

$$df_{\mathbb{C}} : T_{\mathbb{C}}M \rightarrow T_{\mathbb{C}}N$$

に自然に拡張され、正則接ベクトル束と反正則接ベクトル束への分解

$$T_{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M, \quad T_{\mathbb{C}}N = T^{1,0}N \oplus T^{0,1}N$$

に対応して、

$$df_{\mathbb{C}}|_{T^{1,0}M} = \partial f + \bar{\partial} f, \quad df_{\mathbb{C}}|_{T^{0,1}M} = \partial \bar{f} + \bar{\partial} \bar{f}$$

と分解される。実際、 $M$  の局所複素座標  $z$  と  $N$  の局所複素座標系  $(w^1, \dots, w^n) = (w^\alpha)$  をもちいて、 $f$  を

$$f(z) = (f^1(z), \dots, f^n(z)) = (f^\alpha(z))$$

とあらわすとき、 $df_{\mathbb{C}}$  の分解における

$$\partial f : T^{1,0}M \rightarrow T^{1,0}N, \quad \bar{\partial} f : T^{0,1}M \rightarrow T^{1,0}N$$

はそれぞれ

$$\partial f \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial z} \frac{\partial}{\partial w^\alpha}, \quad \bar{\partial} f \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial w^\alpha}$$

であたえられる。

そこで、例えば  $\partial f$  について、図式

$$\begin{array}{ccc} (z, \partial/\partial z) \in T^{1,0}M & \xrightarrow{\partial f} & T^{1,0}N \ni (f(z), \partial f(\partial/\partial z)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ z \in M & \xrightarrow{f} & N \ni f(z) \end{array}$$

に注目して、 $f$  の  $\partial$ -エネルギーがつぎで定義される。

**定義 3** (エネルギー汎関数)。

$$E'(f) = \int_M F^2 \left( f(z), \partial f \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) \frac{\sqrt{-1}}{2} dz \wedge d\bar{z}$$

を  $f$  の  $\partial$ -エネルギーという。また、

$$E''(f) = \int_M F^2 \left( f(z), \bar{\partial} f \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \right) \frac{\sqrt{-1}}{2} dz \wedge d\bar{z} \quad (4)$$

を  $f$  の  $\bar{\partial}$ -エネルギーという。

フィンスラー計量  $F$  の斉次性 (1) 式から、これらの定義式は  $M$  の局所複素座標  $z$  の選び方によらないことが容易に確かめられる。実際、 $z'$  を  $M$  の別の局所複素座標として、 $E'(f)$  についてみると

$$F^2 \left( f(z'), \partial f \left( \frac{\partial}{\partial z'} \right) \right) \frac{\sqrt{-1}}{2} dz' \wedge d\bar{z}'$$

$$\begin{aligned}
&= F^2 \left( f(z), \frac{\partial z}{\partial z'} \partial f \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) \frac{\sqrt{-1}}{2} dz' \wedge d\bar{z}' \\
&= F^2 \left( f(z), \partial f \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) \frac{\partial z}{\partial z'} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z'} \frac{\sqrt{-1}}{2} dz' \wedge d\bar{z}' \quad (1) \text{より} \\
&= F^2 \left( f(z), \partial f \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) \frac{\sqrt{-1}}{2} dz \wedge d\bar{z}
\end{aligned}$$

をえる.

定義より,  $E'(f) = 0$  となるのは  $f$  が反正則写像のとき, また  $E''(f) = 0$  となるのは  $f$  が正則写像のときに他ならない.

閉リーマン面  $M$  から複素フィンスラー多様体  $(N, F)$  への  $C^\infty$  写像のなす集合を  $C^\infty(M, N)$  であらわすとき,  $E'(f)$  と  $E''(f)$  は写像空間  $C^\infty(M, N)$  上の汎関数

$$E' : C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}, \quad E'' : C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}$$

を定義する. 以下, とくに  $\bar{\partial}$ -エネルギー汎関数  $E''$  の第1変分について考え,  $E''$  の臨界点となる  $f$  を  $M$  から  $N$  への調和写像 (harmonic map) とよぶ.

## 2.1 測地線の定義方程式

まず, 古典的によく知られた場合である, エルミート多様体の測地線の場合について, その定義方程式がどのようにして導きだされたかを簡単に復習しておこう.

以下,  $(N, F)$  をエルミート多様体とする. ここで  $F : T^{1,0}N \rightarrow \mathbb{R}$  は,  $N$  のエルミート計量

$$g = g_{\alpha\bar{\beta}}(z) dw^\alpha \otimes \overline{dw^\beta}$$

が定義する強擬凸な複素フィンスラー計量をあらわす.

$$c : [a, b] \rightarrow N, \quad t \mapsto c(t) = (c^1(t), \dots, c^n(t))$$

を  $C^\infty$  正則曲線とし,

$$\dot{c}(t) = \frac{dc^\alpha}{dt}(t) \left( \frac{\partial}{\partial w^\alpha} \right)_{c(t)} \in T_{c(t)}^{1,0}N$$

を曲線  $c$  の複素接ベクトルとする.

このとき,  $c$  のエネルギー (作用積分)  $E(c)$  が

$$E(c) = \int_a^b F^2(c(t), \dot{c}(t)) dt = \int_a^b G(c(t), \dot{c}(t)) dt$$

で定義される。この作用積分  $E$  の臨界点となる曲線  $c$  を  $N$  の測地線という。さて、作用積分  $E$  の第1変分を計算するために、 $c = c_0$  の両端点を固定した  $C^\infty$  正則曲線からなる変分

$$H : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N, \quad (t, s) \mapsto H(t, s) = c_s(t)$$

を考える。このとき、変分法の基本補題としてつぎがなりたつ。

**命題 1.**  $c$  が  $E$  の臨界点である、すなわち上記の任意の変分に対して

$$\left. \frac{d}{ds} E(c_s) \right|_{s=0} = 0$$

となるための必要十分条件は、 $c$  がつぎのオイラー・ラグランジュの方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} G_\alpha(c(t), \dot{c}(t)) - G_{,\alpha}(c(t), \dot{c}(t)) = 0 \quad (5)$$

(およびその複素共役な式) をみたすことである。

そこで (5) 式を具体的に計算してみると、

$$G(c(t), \dot{c}(t)) = g_{\alpha\bar{\beta}}(c(t)) \frac{dc^\alpha}{dt}(t) \overline{\frac{dc^\beta}{dt}}(t)$$

であるから、まず

$$\frac{\partial}{\partial t} G_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \left( g_{\alpha\bar{\beta}} \frac{dc^\beta}{dt} \right) = \frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial w^\gamma} \frac{dc^\gamma}{dt} \frac{dc^\beta}{dt} + \frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \overline{w^\gamma}} \frac{d\overline{dc^\gamma}}{dt} \frac{dc^\beta}{dt} + g_{\alpha\bar{\beta}} \frac{d^2 c^\beta}{dt^2}.$$

ここで、 $g$  から定まるエルミート接続のクリストッフエルの記号を  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  とするとき

$$\frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \overline{w^\gamma}} = g_{\alpha\bar{\sigma}} \cdot g^{\bar{\sigma}\tau} \frac{\partial g_{\tau\bar{\beta}}}{\partial \overline{w^\gamma}} = g_{\alpha\bar{\sigma}} \overline{\Gamma_{\beta\gamma}^\sigma}$$

であることに注意。つぎに

$$-G_{,\alpha} = -\frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial w^\alpha} \frac{dc^\gamma}{dt} \frac{d\overline{dc^\beta}}{dt}$$

であるから、結局

$$\frac{\partial}{\partial t} G_\alpha - G_{,\alpha} = \left( \frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial w^\gamma} - \frac{\partial g_{\gamma\bar{\beta}}}{\partial w^\alpha} \right) \frac{dc^\gamma}{dt} \frac{dc^\beta}{dt} + g_{\alpha\bar{\sigma}} \left( \frac{d^2 c^\sigma}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \frac{dc^\gamma}{dt} \frac{dc^\beta}{dt} \right) = 0 \quad (6)$$

をえる。

ここで、とくに  $g$  がケーラー計量であるならば、 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  は添字  $\beta$  と  $\gamma$  について対称、いいかえると

$$\frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial w^\gamma} = \frac{\partial g_{\gamma\bar{\beta}}}{\partial w^\alpha}$$

がなりたつから、(6) 式よりつぎをえる。

**命題 2.**  $(N, F)$  がケーラー多様体ならば, 測地線  $c: [a, b] \rightarrow N$  は 2 階非線形常微分方程式系

$$\frac{d^2 c^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dc^\beta}{dt} \frac{dc^\gamma}{dt} = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq n \quad (7)$$

の解に他ならない.

**注意 3.** (7) 式の右辺は, 曲線  $c$  の接ベクトル場  $\dot{c}(t)$  が, ケーラー計量  $g$  から定まるエルミート接続 (レビ・チビタ接続と一致する) に関して,  $c$  に沿って平行であることを示している. しかし,  $g$  が一般のエルミート計量である場合には, (6) 式からわかるように, 作用積分  $E$  の臨界点となる曲線の定義方程式は,  $g$  から定まるエルミート接続の捩率にも依存する.

## 2.2 調和写像の定義方程式

(4) 式で定義される  $\bar{\partial}$ -エネルギー汎関数  $E''$  の第 1 変分の計算も, 同様の手続きで行うことができる.

以下, この節の最初の状況にもどって,  $M$  を閉リーマン面,  $(N, F)$  を  $n$  次元複素フィンスラー多様体とし,  $f: M \rightarrow N$  を  $M$  から  $N$  への  $C^\infty$  写像とする.  $E''$  の第 1 変分を求めるために

$$\Delta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \epsilon\}$$

を複素パラメータ集合として,  $f = f_0$  の  $C^\infty$  級変分<sup>1</sup>

$$H: M \times \Delta \rightarrow N, \quad (z, t) \mapsto H(z, t) = f_t(z)$$

を考える. このとき, 命題 1 に対応してつぎがなりたつ.

**命題 3.**  $f$  が  $E''$  の臨界点である, すなわち上記の任意の変分に対して

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} E''(f_t) \right|_{t=0} = 0$$

となるための必要十分条件は,  $c$  がつぎのオイラー・ラグランジュの方程式

$$\frac{\partial}{\partial z} G_{\bar{\alpha}} \left( f(z), \bar{\partial} f \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) - G_{,\bar{\alpha}} \left( f(z), \bar{\partial} f \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) = 0 \quad (8)$$

(およびその複素共役な式) をみたすことである. ただし  $\bar{\partial} f(\partial/\partial \bar{z}) = 0$  となる点において, 左辺の各項は 0 と考える.

<sup>1</sup>第 2 変分を計算する際, 変分パラメータとして複素数を持ちいる方が便利である ([3, 4, 6]).

ここで  $G$  の斉次性に留意して, (8) 式を具体的に計算することにより, (6) 式に対応してつぎがえられる.

$$\frac{\partial}{\partial z} G_{\bar{\alpha}} - G_{,\bar{\alpha}} = G_{\sigma\bar{\alpha}} \left( \frac{\partial^2 f^\sigma}{\partial z \partial \bar{z}} + \Gamma_{\beta,\gamma}^\sigma \frac{\partial f^\gamma}{\partial z} \frac{\partial f^\beta}{\partial \bar{z}} \right) - \overline{G^{\sigma\nu} G_\rho (\Gamma_{\mu,\nu}^\rho - \Gamma_{\nu,\mu}^\rho)} \frac{\partial f^\mu}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (9)$$

ただし,  $\Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha$  は複素フィンスラー計量  $F$  から定まるチャーン・フィンスラー接続のクリストッフェルの記号に対応し, 実際

$$\Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha(w, v) = \begin{cases} G^{\bar{\tau}\alpha} (G_{\beta\bar{\tau},\gamma} - G^{\bar{\rho}\sigma} G_{\bar{\rho},\gamma} G_{\beta\bar{\tau}\sigma}) (z, v), & v \neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & v = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

であたえられる. ここで,  $\Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha$  が  $v = 0$  において特異性をもつのは, 注意 2 でみたように,  $G$  が一般に  $C^{1,1}$  級の微分可能性しかもたないことの反映である.

ここで, つぎの定義に注意しよう.

**定義 4** ([1, 7]).  $F : T^{1,0}N \rightarrow \mathbb{R}$  を強擬凸な複素フィンスラー計量とする. このとき

(1)  $F$  が**強ケーラー・フィンスラー計量**であるとは

$$\Gamma_{\mu,\nu}^\rho(w, v) - \Gamma_{\nu,\mu}^\rho(w, v) = 0, \quad (w, v) \in T^{1,0}N \setminus \{0\}$$

がなりたつときをいう.

(2)  $F$  が**弱ケーラー・フィンスラー計量**であるとは

$$G_\rho(w, v) (\Gamma_{\mu,\nu}^\rho(w, v) - \Gamma_{\nu,\mu}^\rho(w, v)) v^\mu = 0, \quad (w, v) \in T^{1,0}N \setminus \{0\}$$

がなりたつときをいう.

これより, とくに  $F$  が弱ケーラー・フィンスラー計量である場合には, (9) 式から直ちにつぎがなりたつことがわかる.

**定理 1.**  $(N, F)$  を弱ケーラー・フィンスラー多様体とする. このとき, 調和写像  $f : M \rightarrow N$  は 2 階非線形楕円型偏微分方程式系

$$\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial z \partial \bar{z}}(z) + \Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha \left( f(z), \bar{\partial} f \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \right) \frac{\partial f^\gamma}{\partial z}(z) \frac{\partial f^\beta}{\partial \bar{z}}(z) = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq n$$

の解に他ならない. よって, とくに  $M$  から  $N$  への正則写像および反正則写像は調和写像である.

### 3 エネルギー汎関数の性質

前節で定義した  $\partial$ -エネルギー  $E'(f)$  や  $\bar{\partial}$ -エネルギー  $E''(f)$  は、幾何学的には非常に自然な汎関数であるが、通常の意味での凸性をもたない。そのため、変分問題の従来の手法がそのまま適用できるわけではない。この節では、このような汎関数の性質について考察する。

#### 3.1 関数の場合

まず最初に、複素関数の場合についてみてみよう。そこで、 $\Omega \subset \mathbb{C}$  を複素平面内の領域とし、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  を  $C^\infty$  関数とする。領域  $\Omega$  の点および  $f$  の像を

$$z = x^1 + \sqrt{-1}x^2 \in \Omega, \quad f(z) = u^1(x^1, x^2) + \sqrt{-1}u^2(x^1, x^2) \in \mathbb{C}$$

とあらわす。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \right) + \sqrt{-1} \left( \frac{\partial u^2}{\partial x^1} - \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \right) \right], \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^1} - \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \right) + \sqrt{-1} \left( \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned}$$

であるから、

$$4 \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 = \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^2}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^1} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} \right)$$

をえる。ここで、 $u^1(x^1, x^2)$  および  $u^2(x^1, x^2)$  の偏微分について

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla u^1 \\ \nabla u^2 \end{pmatrix} = (\nabla_1 u \quad \nabla_2 u)$$

とかくことにすると、

$$4 \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 = |\nabla u^1|^2 + |\nabla u^2|^2 + 2 \det(\nabla u^1, \nabla u^2)$$

とあらわされる。同様に

$$4 \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 = |\nabla u^1|^2 + |\nabla u^2|^2 - 2 \det(\nabla u^1, \nabla u^2)$$

とあらわされるから、結局つぎがわかる。

## 補題 1.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 = \frac{1}{2} (|\nabla u^1|^2 + |\nabla u^2|^2) = e(f),$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 = \det(\nabla u^1, \nabla u^2) = J(f).$$

一方,

$$\Psi(z) = 4 \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = |\nabla_1 u|^2 - |\nabla_2 u|^2 - \sqrt{-1} \langle \nabla_1 u, \nabla_2 u \rangle$$

は, 写像  $f = (u^1, u^2) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が (弱) 共形写像からどの程度ずれているかをあらわす量であり, つぎがなりたつ.

**補題 2.**  $f$  が調和関数ならば,  $\Psi$  は正則関数である.

実際,  $f$  が調和関数ならば  $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$  であるから,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Psi(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

をえる.

## 3.2 調和写像の場合

さて, 今度は写像の場合を考察してみよう. 前節と同様に,  $M$  を閉リーマン面,  $(N, F)$  を  $n$  次元複素フィンスラー多様体とし,

$$f : M \rightarrow N, \quad z \mapsto f(z) = (f^1(z), \dots, f^n(z)) = (f^\alpha(z))$$

を  $M$  から  $N$  への  $C^\infty$  写像とする.  $z$  と  $f^\alpha(z)$  の実部と虚部をそれぞれ

$$z = x^1 + \sqrt{-1}x^2, \quad f^\alpha(z) = u^\alpha(x^1, x^2) + \sqrt{-1}u^{n+\alpha}(x^1, x^2)$$

とあらわし, また強擬凸複素フィンスラー計量  $F$  の基本テンソル  $G_{\alpha\bar{\beta}}(w, v)$  の実部と虚部を

$$G_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\alpha\beta} + \sqrt{-1}g_{\alpha, n+\beta}$$

とあらわす.

さらに、関数の場合の結果を参考にして

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= (g_{AB}) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & g_{\alpha, n+\beta} \\ -g_{\alpha, n+\beta} & g_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq A, B \leq 2n, \\ \mathbf{b} &= (b_{AB}) = \begin{pmatrix} -g_{\alpha, n+\beta} & g_{\alpha\beta} \\ -g_{\alpha\beta} & -g_{\alpha, n+\beta} \end{pmatrix}, \\ \nabla u &= \left( \frac{\partial u^A}{\partial x^i} \right), \quad 1 \leq A \leq 2n, \quad 1 \leq i \leq 2, \\ \nabla u^A &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u^A}{\partial x^1} & \frac{\partial u^A}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \quad \nabla_i u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^i} \\ \vdots \\ \frac{\partial u^{2n}}{\partial x^i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と定める。ここで、 $\mathbf{g}$  は正定値対称行列、 $\mathbf{b}$  は歪対称行列であることに注意しておこう。  
このとき、補題 1 に対応してつぎをえる。

**命題 4.**

$$\begin{aligned} \Phi'(z) &= 4G_{\alpha\bar{\beta}} \left( f(z), \bar{\partial}f \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \right) \frac{\partial f^\alpha}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}^\beta}{\partial z} = g_{AB} \nabla u^A \cdot \nabla u^B + b_{AB} \det(\nabla u^A, \nabla u^B), \\ \Phi''(z) &= 4G_{\alpha\bar{\beta}} \left( f(z), \bar{\partial}f \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \right) \frac{\partial f^\alpha}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{f}^\beta}{\partial \bar{z}} = g_{AB} \nabla u^A \cdot \nabla u^B - b_{AB} \det(\nabla u^A, \nabla u^B), \\ \Psi(z) &= 4G_{\alpha\bar{\beta}} \left( f(z), \bar{\partial}f \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \right) \frac{\partial f^\alpha}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}^\beta}{\partial \bar{z}} = |\nabla_1 u|_g^2 - |\nabla_2 u|_g^2 - 2\sqrt{-1} \langle \nabla_1 u, \nabla_2 u \rangle_g. \end{aligned}$$

ここでつぎの定義をおく。

**定義 5** (2 次微分).

$$\tilde{\Psi}(z) = \begin{cases} \Psi(z) dz^2, & \bar{\partial}f \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & \bar{\partial}f \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

このとき、補題 2 に対応してつぎがなりたつ。

**定理 2.**  $f: M \rightarrow N$  が調和写像ならば、 $\tilde{\Psi}$  は  $M$  上の正則 2 次微分である。

これより、閉リーマン面から複素フィンスラー多様体への調和写像の基本的性質として、つぎがえられる。

**系 1.**  $f: M \rightarrow N$  を閉リーマン面  $M$  から複素フィンスラー多様体  $(N, F)$  への調和写像とする。このとき、 $f$  が正則写像でないならば

$$S = \{z \in M \mid \bar{\partial}f(\partial/\partial\bar{z}) = 0\}$$

は有限集合である。

つぎに、補題 1 のエネルギー密度関数  $e(f)$  およびヤコビ行列式  $J(f)$  に対応する量を考えよう。

**定義 6.**

$$\tilde{\Phi}'(z) = \begin{cases} \Phi'(z), & \bar{\partial}f\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right) \neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & \bar{\partial}f\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right) = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\tilde{\Phi}''(z) = \begin{cases} \Phi''(z), & \bar{\partial}f\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right) \neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & \bar{\partial}f\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right) = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

以上の定義のもとに、つぎを示すことができる。

**定理 3.**

$$K(f) = \frac{1}{2} \int_M \left\{ \tilde{\Phi}'(z) - \tilde{\Phi}''(z) \right\} \frac{\sqrt{-1}}{2} dz \wedge d\bar{z}$$

とおくとき、 $F: T^{1,0}N \rightarrow \mathbb{R}$  が強ケーラー・フィンスラー計量ならば、 $K(f)$  は  $f$  の任意の  $C^\infty$  級変分  $f_t$  のもとで不変である。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t} K(f_t) = 0$$

がなりたつ。

また、つぎを確かめることは容易である。

**命題 5** ( $L^2$  エネルギー汎関数)。

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_M \left[ g_{AB} \frac{\partial u^A}{\partial x^1} \frac{\partial u^B}{\partial x^1} + g_{AB} \frac{\partial u^A}{\partial x^2} \frac{\partial u^B}{\partial x^2} \right] \frac{\sqrt{-1}}{2} dz \wedge d\bar{z} \\ &= E''(f) + K(f). \end{aligned}$$

定理 3 と命題 5 から、つぎをえる。

**定理 4.**  $(N, F)$  が強ケーラー・フィンスラー多様体ならば、調和写像  $f: M \rightarrow N$  は  $L^2$  エネルギー汎関数  $E(f)$  の臨界点であり、逆もなりたつ。

## 参考文献

- [1] M. Abate and G. Patrizio, *Finsler Metrics — A Global Approach with applications to geometric function theory*, Lecture Notes in Math. Vol. 1591, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1994.
- [2] S. Kobayashi, Negativity of vector bundles and complex Finsler structures, Nagoya J. Math. 57 (1975), 153–166.
- [3] S. Nishikawa, Harmonic maps in complex Finsler geometry, *Variational Problems in Riemannian Geometry*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 59, 113–132, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
- [4] 西川青季, 複素フインスラー計量と調和写像, 日本数学会 2005 年度秋季総合分科会・幾何学分科会講演集, 134–155, 2005.
- [5] 西川青季, 幾何学的変分問題, 岩波書店, 2006.
- [6] S. Nishikawa, Harmonic maps of Finsler manifolds, *Topics in Differential Geometry*, 207–247, Editura Academiei Române, 2008.
- [7] H. L. Royden, Complex Finsler metrics, Contemp. Math. 49 (1986), 119–124.