

The dimension of cusp forms on Siegel
upper half plane of degree two

東大・理 橋本喜一郎

①. Γ を $G(\mathbb{R}) = Sp(2, \mathbb{R})$ の任意の lattice (i.e., 離散部分群が $Vol(\Gamma \backslash G(\mathbb{R})) < \infty$ なるもの) とし, $\mathcal{S}_k(\Gamma)$ を Γ に属する weight k ($\in \mathbb{N}$) の尖底形式 のなす $\mathbb{C}$ 上の vector space とする。即ち, $\mathcal{S}_k(\Gamma)$ は次の (i) - (ii) を満たす, Siegel 上半平面 $H_2 = \{z = X + iY \in M_2(\mathbb{C}); Y > 0\}$ 上の正則関数の全体である:

$$(i) \quad f(Y\langle z \rangle) = \det(CZ + D)^k f(z) \quad \forall Y = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$$

$$(ii) \quad (\det Y)^{k/2} |f(z)| \text{ は } H_2 \text{ 上有界.}$$

ここで, $Y = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G(\mathbb{R})$ は $Y\langle z \rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ により H_2 に作用している。

[問題] $\mathcal{S}_k(\Gamma)$ の次元を求めよ。特に $Sp(2, \mathbb{Z})$ の合同部分群 Γ に対し, $\dim \mathcal{S}_k(\Gamma)$ を具体的に計算可能な形で求めよ。

1. 結果を述べる前に, まず $G(\mathbb{R}) = Sp(2, \mathbb{R})$ の lattice Γ について2つの注意をしよう: $G(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$ -rank = 2 であるから, Margulis の定理より Γ は arithmetic である。特に, $\Gamma \neq \text{non-uniform}$

(ie $\Gamma \backslash G(\mathbb{R}) \neq \text{compact}$) ならば, $G(\mathbb{R})$ の $\mathbb{Q}$ -form が存在して, Γ は $G(\mathbb{Z})$ と commensurable である。 $G(\mathbb{Q})$ は, $\mathbb{Q}$ 上の不定符号四元数環 B に係数をもつ 2 次の unitary 群 $U(2, B)$ と同型である。従って, $G(\mathbb{Z})$ としては $U(2, \mathcal{O})$, $\mathcal{O}$ は B の最大整環, を取ることもができる。 $G(\mathbb{Q})$ の $\mathbb{Q}$ -rank $= 2$ (resp. 1) $\iff B \cong M_2(\mathbb{Q})$ (resp. $B = \text{division}/\mathbb{Q}$) であり, $\mathcal{O} = M_2(\mathbb{Z})$ とすると, $U(2, \mathcal{O}) \cong Sp(2, \mathbb{Z})$ 。

2. ここまでには知られている結果を復習する。 $\Gamma = Sp(2, \mathbb{Z})$ (および, implicit に主合同変換群 $\Gamma = \Gamma(2)$) の場合には, 井草 [6]; $\Gamma = \Gamma(N)$, $N \geq 3$ の場合には 山崎 [12], 森田 [7] Christian [2] の具体的な公式がある。また, $\text{rank } G(\mathbb{Q}) = 1$ の場合の $\Gamma = \Gamma(N)$ $N \geq 3$ に対して, 荒川 [1], 山口 [11] の具体的な公式がある。更に, $\Gamma(2) < \Gamma < Sp(2, \mathbb{Z})$ なるいくつかの Γ については 井草の結果に基づく 伊吹山 [5] の具体的な公式がある。—— これらのうち, 森田・Christian・荒川 氏の結果は, Selberg の trace-formula に基づくもので, $\Gamma(N)$, $N \geq 3$ なる制限は, 「 $\Gamma = \Gamma(N)$ が torsion free $\iff N \geq 3 \implies$ trace formula の寄与は unipotent conjugacy class in Γ のみ 」 という事情による。次元公式への hyperbolic conjugacy class の寄与はないので, 残る "elliptic" および, elliptic と unipotent の混合型である "p-unipotent (仮称)" なる共役

類からの寄与が, $\Gamma = \Gamma(N)$ $N \geq 3$ では現れず, これらの計算が未解決である。

3. 以下本稿の問題は, Selbergの trace formula を利用して上記の残された部分の計算を実行することにより, (一般の Γ に對して) $\dim \mathcal{S}_k(\Gamma)$ を求めること。Selbergの trace formula による最初の次元公式は次の様に述べられる:

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ は, norm

$$\|f\|^2 = \left(\int_{\Gamma \backslash H_2} (\det \gamma)^k |f(z)|^2 dz \right)$$

$$dz = (\det \gamma)^3 dx dy, \quad z = x + iy \in H_2$$

に關して有限次元の Hilbert space となり, その kernel function が Godement によつて求められた。これより, $k \geq 5$ の時,

$$\dim \mathcal{S}_k(\Gamma) = \frac{a(k)}{\#Z(\Gamma)} \int_{\Gamma \backslash H_2} \sum_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma(z) dz,$$

$$\text{但し, } a(k) = 2^8 \pi^{-3} (2k-2)(2k-3)(2k-4)$$

$$H_\gamma(z) = (\det \gamma)^k \left(\frac{z - \gamma \langle \bar{z} \rangle}{\det \gamma} \right)^{-k} \left(\frac{C\bar{z} + D}{\det \gamma} \right)^{-k}$$

$$Z(\Gamma) =: \Gamma \text{ の中心}$$

4. $H_\gamma(z)$ の基本性質: $H_{g^{-1}\gamma g}(z) = H_\gamma(g \langle z \rangle)$ for $\forall g \in G(\mathbb{R})$. 従つて "逐次積分" が可能であれば ($\Leftrightarrow$

$\Gamma \backslash H_2 = \text{compact}$), 容易に次の形に変形できる:

$$\dim \mathcal{S}_k(\Gamma) = \frac{O(k)}{\#Z(\Gamma)} \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{C_\Gamma(\gamma) \backslash H_2} H_\gamma(z) dz$$

但し, $C_\Gamma(\gamma) =: \Gamma$ に於る γ の中心化群, 和は Γ の共役類 $\{\gamma\}_\Gamma$ 全体にわたる。この変形は $\Gamma \backslash H_2 \neq \text{compact}$ なる場合には不成立。しかし, parabolic な共役類 $\{\gamma\}_\Gamma$ に対し適当な dumping factor をつけることにより正当化できる。次の変形の為, 次の事実に注意する:

[補題] $\gamma \in \Gamma$ に対し, $C_{\mathbb{R}}(\gamma) =: G(\mathbb{R})$ に於る中心化群。

- (i) $\text{rank } G(\mathbb{Q}) = 1 \Rightarrow C_\Gamma(\gamma)$ は $C_{\mathbb{R}}(\gamma)$ の lattice
- (ii) $\text{rank } G(\mathbb{Q}) = 2 \Rightarrow$ 次の例外を除いて $C_\Gamma(\gamma)$ は $C_{\mathbb{R}}(\gamma)$ の lattice となる: $\gamma \sim_{G(\mathbb{Q})} \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -\det S \in (\mathbb{Q}^\times)^2$

(iii) 何れの場合にも, $C_{\mathbb{Q}}(\gamma)$ の $\mathbb{Q}$ -subgroup $C_{\mathbb{Q}}^\circ(\gamma)$ が唯一存在して次の ①-③ を満たす:

- ① $C_{\mathbb{R}}^\circ(\gamma)$ は compact な半直積因子をもたぬ。
- ② $C_\Gamma^\circ(\gamma) = C_{\mathbb{R}}^\circ(\gamma) \cap \Gamma$ は $C_{\mathbb{R}}^\circ(\gamma)$ の lattice である
- ③ $[C_\Gamma(\gamma) : C_\Gamma^\circ(\gamma)] < \infty$

この事実に基づいて, 次の様な同値類を Γ に入れる:

[定義] $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ が同一の family に属する: $[\gamma_1]_\Gamma = [\gamma_2]_\Gamma$

$\Leftrightarrow$ 1) $\gamma_{1s} = \gamma_{2s}$ (i.e. γ_1, γ_2 の semi-simple factor が

一致する. 2) $C_{\mathbb{R}}^{\circ}(\gamma) = C_{\mathbb{R}}^{\circ}(\gamma_2)$

すると, family なる概念は Γ -共役と両立するので, 上記の次元公式を次の如く変形できる: (*) $\dim S_k^{\vee}(\Gamma) =$

$$a(k) \underbrace{\sum_{\{\gamma\}_{\Gamma}} \frac{\text{vol}(C_{\mathbb{R}}^{\circ}(\gamma) \backslash C_{\mathbb{R}}^{\circ}(\gamma))}{[C_{\Gamma}(\gamma) : C_{\mathbb{R}}^{\circ}(\gamma)]}}_{\Gamma \text{ の数論的構造による部分}} \lim_{s \rightarrow +0} \sum_{\delta \in [\delta]_{\Gamma}} \underbrace{\int_{C_{\mathbb{R}}^{\circ}(\gamma) \backslash H_2} H_{\delta}(\hat{z}; s) d\hat{z}}_{\text{解析的部分}} \quad (\Gamma \text{ に independent})$$

但し, $H_{\delta}(\hat{z}; s)$ は $H_{\delta}(z)$ に (必要なら) dumping factor をつけたものである, 左の和は Γ の family $[\gamma]_{\Gamma}$ の Γ -共役類全体にわたる。以下に視る様に, semi-simple でない共役類に対応する寄与は, 1つの family にわたる和を取ることによって数論的にまとめられた表示 (例: zeta 函数の特殊値算) が可能となるのである。 $\gamma = \text{semi-simple}$ なら $[\gamma]_{\Gamma} = \{\gamma\}$ に注意。

5. [定理1] 上記の公式中, $C_{\mathbb{R}}^{\circ}(\gamma) \backslash H_2$ 上の積分が異なる γ の $G(\mathbb{R})$ -共役類を, その中心化群 $C_{\mathbb{R}}^{\circ}(\gamma)$ によって分類すると, 次の12種からなる。各々に属する family の Γ -共役類の個数は有限である。

1) central $\gamma = \pm 1$

2) elliptic = α 型 (regular を含む); $\alpha(\mu, \nu) = \mathbb{R}(\mu) \oplus \mathbb{R}(\nu)$

$$----- k(\mu)^2, k(\nu)^2, k(\mu)k(\nu) \neq 1$$

$$3) \text{ elliptic} = \beta \text{ 型}; \beta(\mu) = k(\mu) \oplus 1_2 \quad \dots k(\mu)^2 \neq 1$$

$$4) \text{ elliptic} = \gamma \text{ 型}; \gamma(\mu) = \begin{pmatrix} k(\mu) & 0 \\ 0 & k(\mu) \end{pmatrix} \quad \dots k(\mu)^2 \neq 1$$

$$\gamma(\mu) \sim k(\mu) \oplus k(-\mu)$$

$$5) \text{ elliptic} = \delta \text{ 型}; \delta = 1_2 \oplus (-1_2)$$

$$6) \text{ p-unipotent} = \hat{\beta} \text{ 型}; \hat{\beta}(\mu, \lambda) = k(\mu) \oplus \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dots k(\mu)^2 \neq 1, \lambda \neq 0$$

$$7) \text{ p-unipotent} = \hat{\gamma} \text{ 型}; \hat{\gamma}(\mu, \lambda) = \begin{pmatrix} k(\mu) & \lambda \cdot k(\mu) \\ 0 & k(\mu) \end{pmatrix}$$

$$\dots k(\mu)^2 \neq 1, \lambda \neq 0$$

$$8) \text{ p-unipotent} = \hat{\delta} \text{ 型}; \hat{\delta}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 & \lambda_2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\dots \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$$

$$9) \text{ p-unipotent} = \hat{\delta} \text{ 型}; \hat{\delta}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus (-1_2)$$

$$\dots \lambda \neq 0$$

$$10) \text{ unipotent} = \text{degenerate 型}; \varepsilon_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus 1_2$$

$$\dots \lambda \neq 0$$

$$11) \text{ unipotent} = \text{definite 型}; \varepsilon_2(S) = \begin{pmatrix} 1_2 & S \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$$

$$\dots S = {}^t S > 0 \text{ or } -S > 0$$

$$12) \text{ unipotent} = \text{indefinite 型}; \varepsilon_3(S) = \begin{pmatrix} 1_2 & S \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$$

$$\dots -\det S \in (\mathbb{Q}^\times)^2$$

$$\left(\text{但し, } g_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \ i=1,2 \mapsto g_1 \oplus g_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \end{pmatrix} \right)$$

6. elliptic の積分 $I_0(\gamma) = \int_{C_R^\circ(\gamma) \backslash H_2} H_\gamma(\hat{z}) d\hat{z}$ とおく。

γ が elliptic なら $[\gamma]_\Gamma = \{\gamma\}$ であり, (γ が $G(\mathbb{Q})$ の parabolic subgroup に属し $z \in \mathbb{H}$) dumping factor は不要である。

[定理 2] $I_0(\gamma)$ は次式で与えられる:

2) $\gamma = \alpha(\mu, \nu) : C_R^\circ(\gamma) = \{1\}$

$$I_0(\gamma) = \frac{1}{a(k)} \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{-k}}{(1-\varepsilon_1^{-2})(1-\varepsilon_2^{-2})(1-\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1})} \quad (\varepsilon_1 = e^{i\mu}, \varepsilon_2 = e^{i\nu})$$

3) $\gamma = \beta(\mu) : C_R^\circ(\gamma) = I_2 \oplus SL_2(\mathbb{R})$

$$I_0(\gamma) = \frac{1}{a(k)} \cdot \frac{i}{2^5 \pi^2 \sin \mu (1 - \cos \mu)} \left\{ (k-1) e^{-\frac{(k-2)\mu i}{2}} - (k-2) e^{-\frac{(k-1)\mu i}{2}} \right\}$$

4) $\gamma = \gamma(\mu) : C_R^\circ(\gamma) = \{S \oplus S \mid S \in SL_2(\mathbb{R})\}$

$$I_0(\gamma) = \frac{1}{a(k)} \cdot \frac{2k-3}{2^5 \pi^2 \sin^2 \mu}$$

5) $\gamma = \delta : C_R^\circ(\gamma) = \{S_1 \oplus S_2 \mid S_1, S_2 \in SL_2(\mathbb{R})\}$

$$I_0(\gamma) = \frac{1}{a(k)} \frac{(-1)^k (2k-2)(2k-4)}{2^9 \cdot \pi^4}$$

7. p-unipotent の積分 $I_0(\gamma; s) = \int_{C_R^\circ(\gamma) \backslash H_2} H_\gamma(\hat{z}; s) d\hat{z}$

かけるべき dumping factor は, γ が 0次元 cusp を固定する時は $(\det \gamma)^{-s}$, 1次元 cusp のみを固定する時は, $(y_1 \det \gamma)^{-s}$.

[定理 3]

$$6) \gamma = \hat{\beta}(\theta, \lambda) : C_{\mathbb{R}}^{\circ}(\gamma) = 1_2 \oplus \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_0(\gamma; s) = - \left(\frac{1}{a(k)} \frac{1}{2^3 \pi \sin \theta \sin \theta/2} + o(s) \right) e^{-[(k-\frac{3}{2})\theta + (\text{sgn } \lambda)\pi(s+1)/2]i} \\ \times \frac{1}{|\lambda|^{s+1}}$$

$$7) \gamma = \hat{\gamma}(\theta, \lambda) : C_{\mathbb{R}}^{\circ}(\gamma) = \left\{ \begin{pmatrix} 1_2 & \mathbb{R} 1_2 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$I_0(\gamma; s) = \left(\frac{1}{a(k)} \frac{1}{\sin^2 \theta \cdot 2^3 \pi} + o(s) \right) e^{(\text{sgn } \lambda) \pi i (1+2s)/2} \times \frac{1}{|\lambda|^{1+2s}}$$

$$8) \gamma = \hat{\delta}(\lambda_1, \lambda_2) : C_{\mathbb{R}}^{\circ}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_0(\gamma; s) = \left(\frac{1}{a(k)} \frac{(-1)^k}{2^3 \pi^2} + o(s) \right) \frac{e^{-(\text{sgn } \lambda_1) \pi i (s+1)/2}}{|\lambda_1|^{s+1}} \frac{e^{+(\text{sgn } \lambda_2) \pi i (s+1)/2}}{|\lambda_2|^{s+1}}$$

$$9) \gamma = \hat{\delta}(\lambda) : C_{\mathbb{R}}^{\circ}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus SL_2(\mathbb{R})$$

$$I_0(\gamma; s) = \left(\frac{1}{a(k)} \frac{(-1)^k (2k-3)}{2^6 \pi^3} + o(s) \right) \frac{e^{-(\text{sgn } \lambda) \pi i (s+1)/2}}{|\lambda|^{s+1}}$$

こゝより, 例えば 6) の場合, family $[\gamma]_n$ は

$$[\gamma]_n = \bar{g}^{-1} \left\{ k(\theta) \oplus \begin{pmatrix} 1 & a+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} n \in \mathbb{Z} \\ a+n \neq 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{if} \quad \begin{pmatrix} \exists a \in \mathbb{Q} \\ \exists g \in G(\mathbb{Q}) \\ 0 \leq a < 1 \end{pmatrix}$$

と一斉に normalize するとき, trace formula の寄与は,

$$\lim_{s \rightarrow +0} \sum_{\gamma \in [\gamma]_n} I_0(\gamma; s) = - \frac{1}{a(k)} \frac{1}{2^3 \pi \sin \theta \sin \theta/2} e^{-(k-\frac{3}{2})\theta i} \times$$

$$\times \lim_{s \rightarrow +0} \left\{ e^{-\pi i(s+1)/2} \zeta(s+1, a) + e^{\pi i(s+1)/2} \zeta(s+1, 1-a) \right\}$$

と $a > 2$, Hurwitz の zeta 函数 $\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}$ の特殊値 (2. 留数) で表示される。他の場合の事情は同様。

8. unipotent の積分

dumping factor は, 10) = 不要, 11) = $(\det Y)^{-s}$, 12) = $(y_1^{-1} \det Y)^{-s}$.

[定理 4]

$$10) \quad Y = \varepsilon_1(\lambda) : C_{\mathbb{R}}^0(Y) = (I_2 \oplus SL_2(\mathbb{R})) \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ & & 1 & * \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$I_0(Y; s) = - \frac{1}{a(k)} \frac{2k-3}{2^4 \pi^3} \frac{1}{|\lambda|^{1/2}}$$

$$11) \quad Y = \varepsilon_2(S) : C_{\mathbb{R}}^0(Y) = \left\{ \begin{pmatrix} 1_2 & * \\ & 1_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$I_0(Y; s) = \left(\frac{1}{a(k)} \frac{1}{2^3 \pi^2} + o(s) \right) \frac{e^{\mp \pi i(s+2s)/2}}{(\det S)^{(s+2s)/2}} \quad \mp \leftrightarrow s \geq 0$$

$$12) \quad Y = \varepsilon_3(S) : C_{\mathbb{R}}^0(Y) = \left\{ \begin{pmatrix} 1_2 & * \\ & 1_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$I_0(Y; s) = - \frac{1}{a(k)} \frac{1}{2^2 \pi^2} \frac{1}{|\det S|^{3/2}} + o(s)$$

unipotent の場合のこれらの結果は [1][2][7] で知られている case であり, 特に 11) の積分の $[Y]_{\Gamma}$ 上の和は, 2元 2次形式の空間の lattice に対する (概均質) zeta 函数 で表示される。

9. 以上の結果を(★)に代入して, 任意の Γ に対する $\mathcal{G}_k(\Gamma)$ の次元公式が得られる。しかし, この公式によつて次元を求めるには, 第一に Γ の元の "family" $[\gamma]_\Gamma$ の共役類を分類しなければならぬ。 $\gamma \neq \text{semi-simple}$ なら, 大雑把に云つて, $[\gamma]_\Gamma$ は $\Gamma \backslash H_2$ の cusp と対応してゐるのが比較的容易であるが, $\gamma = \text{elliptic}$ の時は $[\gamma]_\Gamma = \{\gamma\}_\Gamma$ の共役類の分類は大変めんどろである ($\Gamma = \text{Sp}(2, \mathbb{Z})$ に対する場合には [8], [9] 等の結果がある)。以下で我々は, Γ に関するある条件の下で, この困難を避けられることを示す。

$M_2(\mathbb{B})$ の十分大きな order (ie, lattice であつて 1 を含む ring) R が存在して, $\Gamma = R^\times \cap \text{U}(2, \mathbb{B})$ となつてゐると仮定する。 $\Gamma \ni g = \text{semi-simple}$ に対して, $Z(g) := g$ の $M_2(\mathbb{B})$ に関する commutator algebra とする。この時, 次の図式が成立する:

$$\{\gamma\}_{G(\mathbb{Q})} \cap \Gamma / \sim_\Gamma \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Z(g) \text{ の各 order } \Lambda \text{ に対し,} \\ \Lambda \text{ を } R \wedge \text{ optimal に埋込む} \\ \text{方法の } G(\mathbb{Q})\text{-同値類} \end{array} \right\}$$

(双方向同値)

正確には次の様になる: $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}(g)$

$Z_G(g) = G(\mathbb{Q}) \cap Z(g)$ とおく。 $Z(g)$ の 2 つの order Λ_1, Λ_2 が同値 $\Lambda_1 \sim \Lambda_2 \iff \Lambda_2 = z\Lambda_1 z^{-1}$ ($\exists z \in Z_G(g)$) とする。この時,

$$\{\gamma\}_{G(\mathbb{Q})} = \bigsqcup_{\Lambda/\sim} \{\gamma, \Lambda\} \quad (\text{disjoint})$$

$$M(g, \Gamma) = \bigsqcup_{\Lambda/\sim} M(g, \Gamma, \Lambda)$$

$$\text{但し, } \{g, \Lambda\} = \{\bar{x}gx \mid x \in G(\mathbb{Q}), Z(g) \cap xRx^{-1} \sim \Lambda\}$$

$$M(g, \Gamma) = \{x \in G(\mathbb{Q}) \mid \bar{x}gx \in \Gamma\}$$

$$M(g, \Gamma, \Lambda) = \{x \in M(g, \Gamma) \mid Z(g) \cap xRx^{-1} \sim \Lambda\}$$

$$[\text{補題}] \text{ (i) } \{g, \Lambda\} \cap \Gamma / \sim \xrightarrow{\sim} Z_{\mathbb{Q}}(g) \backslash M(g, \Gamma, \Lambda) / \Gamma$$

$$(ii) \text{ inclusion より引起される 次の写像は } h_0(g, \Lambda) = 1$$

$$Z_{\mathbb{Q}}(g) \backslash M(g, \Gamma, \Lambda) / \Gamma \longrightarrow Z_{\mathbb{Q}}(g)_A \backslash M(g, \mathcal{U}, \Lambda) / \mathcal{U}$$

但し, $h_0(g, \Lambda) = \Lambda$ の両側 G -類数, $\mathcal{U} = \prod_p (R_p^{\times} \cap G(\mathbb{Q}_p)) \times G(\mathbb{R})$, さら $\mathcal{U}$, $M(g, \mathcal{U}, \Lambda)$ は $M(g, \Gamma, \Lambda)$ と同様に定義される。右辺は 直積 $\prod_p Z_{\mathbb{Q}}(g)_p \backslash M(g, (R_p^{\times} \cap G(\mathbb{Q}_p)), \Lambda_p) / (R_p^{\times} \cap G(\mathbb{Q}_p))$ に分解する。

$$(iii) \quad \gamma \in \{g, \Lambda\} \cap \Gamma \text{ に対し,}$$

$$\text{vol}(C_{\Gamma}^{\circ}(\gamma) \backslash C_{\mathbb{R}}^{\circ}(\gamma)) = \text{vol}((\Lambda^{\times} \cap C_{\mathbb{R}}^{\circ}(g)) \backslash C_{\mathbb{R}}^{\circ}(g)) = \text{indep. of } \gamma$$

$$[C_{\Gamma}(\gamma) : C_{\Gamma}^{\circ}(\gamma)] = [(\Lambda^{\times} \cap G(\mathbb{Q})) : (\Lambda^{\times} \cap C_{\mathbb{R}}^{\circ}(g))] = \text{indep. of } \gamma$$

以上を用いて, $\dim \tilde{S}_k(\Gamma)$ の elliptic conjugacy class による寄与 $\dim \tilde{S}_k(\Gamma)|_e$ は次の形に表すことができる

$$(\star\star) \quad \dim \tilde{S}_k(\Gamma)|_e = a(k) \sum_{\{g\} \in G(\mathbb{Q})} I_0(g) \sum_{\Lambda} M_{\mathbb{Q}}(\Lambda) \prod_p c_p(g, \Lambda_p)$$

$$\text{但し, } M_{\mathbb{Q}}(\Lambda) = \frac{h_0(g, \Lambda) \text{vol}(\Lambda^{\times} \cap C_{\mathbb{R}}^{\circ}(g) \backslash C_{\mathbb{R}}^{\circ}(g))}{[(\Lambda^{\times} \cap G(\mathbb{Q})) : (\Lambda^{\times} \cap C_{\mathbb{R}}^{\circ}(g))]} \quad \text{の, } \Lambda =$$

$\Lambda_1, \dots, \Lambda_t$ にわたる和 ($\Lambda_i, 1 \leq i \leq t$, は Λ の genus 内の $\mathbb{Z}_\ell(g)$ -conj. class の代表) で, $M_\ell(\Lambda)$ は 適当な zeta 函数の特殊値で表示される公式をもつ。 Λ は genus の代表を動く。また,

$$c_p(g, \Lambda_p) = \#(\mathbb{Z}_\ell(g)_p \setminus M(g, (R_p^\times \cap G(\mathbb{Q}_p)), \Lambda_p) / (R_p^\times \cap G(\mathbb{Q}_p)))$$

$$= 0 \text{ or } 1 \quad (\text{for almost all } p, \Lambda_p)$$

10. Explicit Formula

具体的な Γ を考えよう。ここでは次の2つの場合を考える。

$$(1) \Gamma = \Gamma_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2, \mathbb{Z}) \mid C \equiv 0 \pmod{p} \right\}$$

ただし, $p = \text{奇素数}$ とする。

$$(2) \Gamma = U(2, 0) \quad \text{--- 記号は 1 参照。}$$

両者ともに $\mathbb{Q}$ の仮定を付してあり, p 以外の素数では $R_\ell := M_2(B_p)$ の極大 order, 更に $\ell + D(B)$ なら $R_\ell \cong M_4(\mathbb{Z}_\ell)$, $(R_\ell^\times \cap G(\mathbb{Q}_\ell)) \cong Sp(2, \mathbb{Z}_\ell)$ である。そこで上記(★★)中の因子 $c_p(g, \Lambda_p)$ の値は筆者と伊吹山氏の [4] における計算と一致する。これらを用いて, (1), (2) の Γ については完全に具体的な次の公式を求めることが可能である。

[注] もちろん, $\Gamma = Sp(2, \mathbb{Z})$ も同様であり, この時我々の方法による結果は #草 [6] と一致することを確認されている。

記号: $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_4$ は上から順に $k \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ の値

を表すものとする。 $k (= \text{weight}) \geq 5$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \dim \tilde{S}_k(\Gamma_0(p)) \\
 &= \frac{1}{2^9 3^3 5} (p+1)(p^2+1)(2k-2)(2k-3)(2k-4) \\
 &+ \frac{7}{2^9 3^2} (-1)^k (p+1)^2 (2k-2)(2k-4) \\
 &+ \frac{5}{2^7 3} (p+2 + \frac{(-1)}{p}) (2k-3) + \frac{1}{2 \cdot 3^3} (2k-3) \begin{cases} p+2 + \frac{(-3)}{p} & \dots p \neq 3 \\ 7 & \dots p = 3 \end{cases} \\
 &- \frac{1}{2^4 3^2} (p+1)(2k-3) - \frac{(-1)^k}{2^3 3} (p+1)(2k-3) \\
 &+ \frac{1}{2^3 3^3} (p+1) \left(1 + \frac{(-3)}{p}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2k-3 \\ -k+1 \\ -k+2 \end{pmatrix}_3 + \frac{1}{2^3 3^2} (p+1) \left(1 + \frac{(-3)}{p}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -k+1 \\ -k+2 \\ 1 \\ k-1 \\ k-2 \end{pmatrix}_6 \\
 &+ \frac{1}{2^5 3} (p+1) \left(1 + \frac{(-1)}{p}\right) \cdot \begin{pmatrix} k-2 \\ -k+1 \\ -k+2 \\ k-1 \end{pmatrix}_4 + \frac{1}{2^7} (-1)^k (p+2 + \frac{(-1)}{p}) \\
 &- \frac{1}{2^2 3^3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_3 \times \begin{cases} p+2 + \frac{(-3)}{p} & \dots p \neq 3 \\ 1 & \dots p = 3 \end{cases} + \frac{1}{2^3 3} (p+3) - \frac{1}{2^3 3} (p+1) \\
 &+ \frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_4 \times \begin{cases} 2 & \dots p \equiv 3, 5 \\ 4 & \dots p \equiv 1 \pmod{8} \\ 0 & \dots p \equiv 7 \end{cases} + \frac{1}{3^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_6 \times \left(1 + \frac{(-3)}{p}\right)^2 \\
 &+ \frac{1}{2^2 3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_3 \times \begin{cases} 1 & \dots p=3 \\ 2 & \dots p \equiv 5, 7 \pmod{12} \\ 4 & \dots p \equiv 1 \\ 0 & \dots p \equiv 11 \end{cases} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_5 \times \begin{cases} 4 & \dots p \equiv 1 \\ 0 & \dots p \equiv 2, 3, 4 \pmod{5} \\ 1 & \dots p \equiv 5 \end{cases} \\
 &+ \frac{1}{2 \cdot 3} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_6 \times \left(1 + \frac{(-3)}{p}\right) - \frac{1}{2 \cdot 3^2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_3 \times \left(1 + \frac{(-3)}{p}\right) - \frac{2}{3^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_3 \times \left(1 + \frac{(-3)}{p}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_4 \times (1 + (\frac{-1}{p})) - \frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_4 \times (1 + (\frac{-1}{p})) \\
& - \frac{1}{2^4} (3 + (\frac{-1}{p})) - \frac{1}{2^4} (3 + (\frac{-1}{p})) - \frac{1}{2^3} (3 + (\frac{-3}{p})) \\
& + \frac{(-1)^k}{2^3} + \frac{(-1)^k}{2^3} + \frac{(-1)^k}{2^3} \cdot \begin{cases} 1 & \dots p \equiv 1 \\ 2 & \dots p \equiv 3 \end{cases} \pmod{4} \\
& + \frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{12} \times (1 + (\frac{-1}{p})) (1 + (\frac{-3}{p}))
\end{aligned}$$

<数值例>

$p \backslash k$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	0	2	0	5	0	10	0	16	0	23	1	35
5	0	5	0	13	0	25	3	44	6	66	16	100
7	0	11	0	25	5	56	15	95	28	145	58	222
11	2	31	9	80	33	164	80	288	158	462	278	694

$p \backslash k$	17	18	19	20	21	22	23	24
3	3	47	4	61	9	81	14	102
5	25	136	45	188	64	242	97	315
7	97	312	143	417	218	561	306	722
11	444	991	666	1365	953	1818	1311	2363

(2) $\Gamma = \cup(2, \theta)$ B : 不定符号四元数体 $\supset \theta$ 極大整環

$D = D(B)$: B の判別式

$$D(i, j) = \{p \mid D; p \equiv i \pmod{j}\}$$

$$\dim \hat{S}_k(\cup(2, \theta)) = \frac{1}{2^9 3^3 5} \prod_{p \mid D} (p-1)(p^2+1)(2k-2)(2k-3)(2k-4)$$

$$+ \frac{1}{2^3 3} \prod_{p \mid D} (p-1) - \frac{1}{2^3} \prod_{p \mid D} \left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\right) - \frac{1}{2^3} \prod_{p \mid D} \left(1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{2^9 3^2} (-1)^k (2k-2)(2k-4) \prod_{p \mid D} (p-1)^2 \times \begin{cases} 7 & \dots 2 \nmid D \\ 13 & \dots 2 \mid D \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{2^3 3^3} \prod_{p \mid D} (p-1) \left(1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right) \times \begin{pmatrix} 2k-3 \\ 1-k \\ 2-k \end{pmatrix}_3$$

$$+ \frac{1}{2^3 3^2} \prod_{p \mid D} (p-1) \left(1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1-k \\ 2-k \\ 1 \\ k-1 \\ k-2 \end{pmatrix}_6$$

$$+ \frac{1}{2^5 3} \prod_{p \mid D} (p-1) \left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\right) \times \begin{pmatrix} k-2 \\ 1-k \\ 2-k \\ k-1 \end{pmatrix}_4$$

$$+ \frac{(-1)^k}{2^7 3} \sum_{D_0^* \mid 2D}^* \prod_{p \mid D_0^*} (p-1) \prod_{p \mid 2D/D_0^*} \left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\right) \times \begin{cases} 3 & \dots 2 \nmid D, 2 \mid D_0^* \\ 5 & \dots 2 \mid D, 2 \mid D_0^* \text{ or } 2 \nmid D, 2 \nmid D_0^* \\ 11 & \dots 2 \mid D, 2 \nmid D_0^* \end{cases}$$

$$+ \frac{2k-3}{2^7 3} \sum_{D_0^* \mid 2D}^* \prod_{p \mid D_0^*} (p-1) \prod_{p \mid 2D/D_0^*} \left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\right) \times \begin{cases} 3 \\ 5 & \dots (\text{同上}) \\ 11 \end{cases}$$

(D_0^* は奇数個の, D_0^* は偶数個の, $2D$ の素因子の積なる
 のの全体にわたる. 次の同様; $2D \rightarrow 3D$.)

$$+ \frac{1}{2^3 3^3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_3 \times \sum_{D_0^* | 3D}^* \prod_{l|D_0^*} (l-1) \prod_{p|3D/D_0^*} \left(1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right) \times \begin{cases} 1 \cdots 3/D_0^* \\ 4 \cdots 3 \nmid D, 3 \nmid D_0^* \\ 16 \cdots 3|D, 3 \nmid D_0^* \end{cases}$$

$$+ \frac{2k-3}{2^3 3^3} \sum_{D_e^* | 3D}^* \prod_{l|D_e^*} (l-1) \prod_{p|3D/D_e^*} \left(1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right) \times \begin{cases} 1 \\ 4 \\ 16 \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{12} \times \prod_{p|D} \left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right) + \frac{1}{2 \cdot 3^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_6 \times \prod_{p|D} \left(1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right)^2 \times \begin{cases} 2 \cdots 2/D \\ 5 \cdots 2|D \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_5 \times \prod_{p|D} 2 \prod_{p \in D(-1;5)} 2 \times \begin{cases} 0 \cdots \bigcup_{i=1}^3 D(i;5) \neq \emptyset \\ 1 \cdots = \emptyset, 5|D \\ 2 \cdots = \emptyset, 5 \nmid D \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_4 \times \prod_{p|D} 2 \prod_{p \in D(1;8)} 2 \times \begin{cases} 0 \cdots D(1;8) \neq \emptyset \\ 1 \cdots D(1;8) = \emptyset \end{cases}$$

$$+ H_{12} ;$$

$$H_{12} = 0 \quad \text{if } D(1;12) \neq \emptyset$$

(以下, $D(1;12) = \emptyset$ とする)

(i) $6 \nmid D$ の時,

$$H_{12} = \frac{(-1)^k}{12} \prod_{p|D} 2 \prod_{p \in D(1;12)} 2 \times \begin{cases} \frac{1}{2} \cdots D(1;12) \neq \emptyset \\ 0 \cdots D(1;12) = \emptyset, \#D(5;12) = \text{even} \\ 1 \cdots = \emptyset, \#D(5;12) = \text{odd} \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_3 \times \prod_{p|D} 2 \prod_{p \in D(-1;12)} 2 \times \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{cases} \dots (\text{同上})$$

(ii) $2 \nmid D$, $3 \mid D$ の時,

$$H_{12} = \frac{(-1)^k}{12} \prod_{p|D} 2 \prod_{p \in D(H;12)} 2 \times \begin{cases} \frac{3}{4} & \dots D(H;12) \neq \emptyset \\ \frac{1}{2} & \dots D(-1;12) = \emptyset, \#D(5;12) = \text{even} \\ 1 & \dots D(-1;12) = \emptyset, \#D(5;12) = \text{odd} \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_3 \times \prod_{p|D} 2 \prod_{p \in D(H;12)} 2 \times \begin{cases} \frac{3}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \dots (\text{同上})$$

(iii) $2 \mid D$, $3 \nmid D$ の時,

$$H_{12} = \frac{(-1)^k}{12} \prod_{p|D} 2 \prod_{p \in D(H;12)} 2 \times \begin{cases} \frac{3}{4} & \dots D(H;12) \neq \emptyset \\ 1 & \dots D(-1;12) = \emptyset, \#D(5;12) = \text{even} \\ \frac{1}{2} & \dots D(-1;12) = \emptyset, \#D(5;12) = \text{odd} \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_3 \times \prod_{p|D} 2 \prod_{p \in D(H;12)} 2 \times \begin{cases} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases} \dots (\text{同上})$$

(iv) $6 \mid D$ の時,

$$H_{12} = \frac{(-1)^k}{12} \prod_{p|D} 2 \prod_{p \in D(H;12)} 2 \times \begin{cases} \frac{9}{8} & \dots D(H;12) \neq \emptyset \\ \frac{5}{4} & \dots D(H;12) = \emptyset, \#D(5;12) = \text{even} \\ 1 & \dots D(H;12) = \emptyset, \#D(5;12) = \text{odd} \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_3 \times \prod_{p|D} 2 \prod_{p \in D(H;12)} 2 \times \begin{cases} \frac{9}{8} \\ 1 \\ \frac{5}{4} \end{cases} \dots (\text{同上})$$

<数値例>

• $D=2.3$ の時

k	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\dim \mathcal{S}_k(\Gamma)$	0	4	2	8	5	15	10	25	15	34	26

• $D=2.5$ の時

k	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\dim \mathcal{S}_k(\Gamma)$	2	13	5	26	19	56	41	98	70	149	123

• $D=3.5$ の時

k	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\dim \mathcal{S}_k(\Gamma)$	8	34	29	86	85	183	178	331	318	536	531

[註] 上記の公式に於ては, Γ の共役類のリストがある場合にはそれを利用した ([8], [9])。その際, 共役類からの寄与はまとめて別々に書いた。この公式に $k=4$ を代入して $\dim \mathcal{S}_k(\Gamma)$ の正しい値が得られると予想される。 $k=3$ についても, 補正項 $+1$ を付加すれば正しい次元の値が得られると予想される。— 最後に, 最近村馬 [10] によって $\Gamma = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})$ の場合の $\mathcal{S}_k(\Gamma)$ の次元が Riemann-Roch の定理の応用により求められたことを付記する。

References

1. Arakawa, T. The dimension of the spaces of cusp forms on the Siegel upper half plane of degree two related to a quaternion unitary group, J. Math. Soc. Japan Vol 33, No. 1, 1981, 125-145.
2. Christian, U. Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$, J. Reine Angew. Math. 277 (1975) 130-154
 _____, Zur Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$, J. Reine Angew. Math. 296 (1977) 108-118.
3. Hashimoto, K. The dimension of the space of cusp forms on the Siegel upper half plane of degree two, to appear.
4. Hashimoto, K. and Ibukiyama, T. On class numbers of positive definite quaternion hermitian forms, J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo, Vol 27-3, 549-601.
5. Ibukiyama, T. On symplectic Euler factors of genus two, (thesis) to appear.
6. Igusa, J. On Siegel modular forms of genus two, (II), Amer. J. of Math. 86 (1964), 392-412.
7. Morita, Y. An explicit formula for the dimension of the space of Siegel modular forms of degree two. J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo, Vol 21 (1974), 167-248.
8. Münchhausen, I. Explizite Bestimmung der Konjugiertenklassen der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades, to appear.

9. Sakamoto, J. On the contribution from the torsion-elements to the dimension formula of the spaces of Siegel modular forms of degree two (incomplete and partially incorrect), Master thesis. 1975, Univ. of Tokyo.
10. Tsushima, R. On the space of Siegel cusp forms of degree two , to appear.
11. Yamaguchi, H. The parabolic contribution to the dimension of the space of cusp forms on Siegel space of degree two, (preprint).
12. Yamazaki, T. On Siegel modular forms of degree two, Amer. J. Math. 98. (1976), 39-53.