

氏 名	岸 本 大 祐
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2417 号
学位授与の日付	平成 14 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	A topological proof of real and symplectic Bott periodicity theorem (実とシンプレクティックの Bott 周期性定理の位相幾何学的証明)

論文調査委員 (主 査) 教授 河 野 明 教授 西 田 吾 郎 助教授 國 府 寛 司

論 文 内 容 の 要 旨

この論文の目的は、実とシンプレクティックの Bott 周期性定理：

$$BO \simeq (\Omega^4 BSp) \langle 0 \rangle, BSp \simeq (\Omega^4 BO) \langle 0 \rangle$$

(ここで、空間 X に対して $X \langle n \rangle$ は X の n -連結ファイバー空間とする) の別証明を与えることと、それにより、 BO, BSp のホモトピー論的特徴付けを行うことである。複素の Bott 周期性定理は BU の整係数コホモロジーが多項式環であることと周期が 2 であることから簡単に証明できるのだが、実とシンプレクティックの Bott 周期性定理は BO の整係数コホモロジーが複雑なことから容易ではないことがわかる。実とシンプレクティックの Bott 周期性定理の証明は、これまでに、Dyer と Lashof によって与えられた無限古典群の (コ)ホモロジーを計算することによってなされたものや、Dirac 作用素を用いて与えられるものなど幾種類も存在するが、この論文で与えられる証明は BSp の多重ループ構造を使うことでそのどれよりも簡明になっている。更に、その証明を応用することによって BO, BSp のホモトピー論的特徴付けがなされるというのも他の証明方法と違っているといえる。

定理 2.1 は、 BO, BSp のコホモロジーの性質を幾つか持つ空間 X, Y に対して、Bott 写像 (Bott 周期性定理を与える写像) の性質を幾つか持つ写像 $\lambda: S^4 \wedge X \rightarrow Y, \mu: S^4 \wedge Y \rightarrow X$ が与えられたとき、

$$\widetilde{Ad}^4 \lambda: X \simeq (\Omega^4 Y) \langle 0 \rangle, \widetilde{Ad}^4 \mu: Y \simeq (\Omega^4 X) \langle 0 \rangle \pmod{2}$$

(写像 f に対して $\widetilde{f}$ は f の持ち上げを意味する) となることを示している。証明は、path-fibration のスペクトル系列を計算することによって行われている。 $\widetilde{Ad}^4 \mu: Y \simeq (\Omega^4 X) \langle 0 \rangle \pmod{2}$ を示す際には条件 (1) の Steenrod 平方作用素に関するものが使われ、 $\widetilde{Ad}^4 \lambda: X \simeq (\Omega^4 Y) \langle 0 \rangle \pmod{2}$ の際には多重ループ空間のコホモロジー上に存在する工藤 - 荒木作用素を利用し、スペクトル系列の計算がなされている。これらにより、証明は極めて簡明になされる。

mod 2-ホモトピー同値さえ示せば、ホモトピー同値を示すのは容易で、次の補題 2.2 でそれが示されている。補題 2.2 は、前の X, Y に加えて BU に対応する空間 Z と BO, BSp, BU の間に存在するベクトルバンドルの実化、複素化、四元数化と BU の Bott 周期性に対する写像を $\pi_*(X), \pi_*(Y), \pi_*(Z)$ の間に与え、

$$\widetilde{Ad}^4 \lambda: X \simeq (\Omega^4 Y) \langle 0 \rangle, \widetilde{Ad}^4 \mu: Y \simeq (\Omega^4 X) \langle 0 \rangle$$

を示している。

次は上の結果を BO, BSp に応用するために、 X, Y に与えた条件を BO, BSp が満たすことを確認するのだが、定理 2.2 の条件 (3)(a) 以外は自明で、条件 (3)(a) も Chem 類の計算をすることにより補題 3.2 で示されている。これにより実とシンプレクティックの Bott 周期性定理の別証明が与えられた。

次は BO, BSp の特徴付けである。空間 V に対して、 $Q(V) = \varinjlim \Omega^n \Sigma^n V$, 無限ループ空間 W (任意の n で空間 B_n が存在し、 $\varepsilon_n: W \simeq \Omega^n B_n$ となる) に対して、 $E_X = \varinjlim \varepsilon_n^{-1} \Omega^n (Ad^n \varepsilon_n)^{-1}: Q(W) \rightarrow W$ とする。これらを BSp に対してで考えると、Segal-Becker splitting と呼ばれる写像 $\varepsilon: BSp \rightarrow Q(HP^\infty)$ が存在し、 $E_{BSp} \circ Q(i) \circ \varepsilon \simeq id_{BSp} (i: HP^\infty \rightarrow BSp)$ は自然な包含写

像)となり, これによりある空間 F に対して,

$$Q(HP^\infty) \simeq BSp \times F, \quad H_*(F; \mathbb{Z}) \text{ は有限}$$

となることが知られている。定理4.1では, 前の X, Y に $j': HP^\infty \rightarrow Y$ に関するある条件を与えれば,

$$E_Y \circ Q(j') \circ \varepsilon: BSp \simeq Y$$

となることが示されている。即ち, BO, BSp の特徴付けがなされている。

以上が主要論文の概要である。

論文審査の結果の要旨

申請者岸本大祐氏は K -理論を定義する無限ループ空間である BU や BO といった空間の特徴付けや様々な性質を中心とした代数的位相幾何学の問題を研究してきました。

岸本氏の主論文では BO の Bott 周期性定理の単純明快な証明とその特徴付けが行われています。 BO の Bott 周期性定理の位相幾何学的な証明は存在はしますが比較的長く座標を用いる物であり, きれいな物は知られていませんでした。

岸本氏は河野と徳永が与えた BU の場合の証明を検討した結果, BO が充たす, いくつかの性質を仮定するとその空間が周期的になることを示すことでこの場合のかわめて単純な証明を与えることに成功しました。 BU の場合周期が2であることから, 証明は比較的簡単ですが BO の場合は周期が8と大きいので, 証明には多くの工夫が必要ですが, 最終的には非常に単純明快な証明が得られました。又その過程で BO のホモトピー論的な特徴付けも得られました。

参考論文ではやはり BU の外部積を与える写像の特徴付けやさらには実性 K -理論の Bott 周期性定理の位相幾何学的な証明とこの分類空間の特徴付けなどが行われております。この場合には位相幾何学的な証明は知られておらず高い評価を得ております。

このように岸本氏の成果は代数的位相幾何学の内外の研究者から注目される優れた物であり, 博士(理学)の学位論文として十分な物と考え合格と判定しました。