

楕円曲線の rank について——いくつかの計算例

名古屋大学教養 中野 伸 (Shin Nakano)

有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線 E に対し、 $E(\mathbb{Q})$ をその有理点全体のなす群 (Mordell-Weil 群) とする。このとき、 $E/\mathbb{Q}$ の Shafarevich-Tate 群 III および、2-descent に対する Selmer 群 S_2 というものが定義され

$$(1) \quad 1 \longrightarrow E(\mathbb{Q})/2E(\mathbb{Q}) \longrightarrow S_2 \longrightarrow \text{III}_2 \longrightarrow 1$$

なる完全系列が成り立つ。ただし III_2 は III の 2-torsion 部分群である。

ここで E の位数 2 の点 (それらは 3 つある) がどれも有理点でないとすると、そのうちのひとつを $\mathbb{Q}$ に添加した体 K は 3 次体であり、他の点を添加した体と $\mathbb{Q}$ 上共役となる。このような場合、以下のようにして S_2 を $K^\times/K^{\times 2}$ の部分群とみなすことができる。まず $E(\mathbb{Q})$ から $K^\times/K^{\times 2}$ への準同型 λ および、局所的な単射準同型 λ_p が定義され、次のような可換図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} E(\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\lambda} & K^\times/K^{\times 2} \\ \wr_p \downarrow & & \downarrow \wr_p \\ E(\mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\lambda_p]{} & K_p^\times/K_p^{\times 2}. \end{array}$$

ここで、 $K_p = K \otimes \mathbb{Q}_p$ 、また、 $\wr_p$ は $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ から induce される自然な準同型

である。このとき

$$S_2 = \{ a \in K^\times / K^{\times 2} ; \ell_p(a) \in \text{Im } \lambda_p \text{ for all } p \leq \infty. \}$$

と定義され、(1)の準同型 $E(Q)/2E(Q) \rightarrow S_2$ は λ によって実現される。

一方、 N を K から Q への norm 写像とし

$$H_2 = \{ a \in K^\times / K^{\times 2} ; (a) = A^2 \text{ for some ideal } A \text{ of } K \text{ and } Na > 0. \}$$

の元 a に対して $A^2 = (a)$ なる K の ideal A をとり、その class を対応させることにより、 H_2 から K の ideal 類群の 2-torsion 部分群 C_2 への全射準同型が定まる。その核を U_2 とすれば

$$(2) \quad 1 \longrightarrow U_2 \longrightarrow H_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow 1$$

なる完全系列を得る。ここで U_2 の rank は K の単数群の free-rank (= 1 または 2) に等しい。

ここでは、 $E(Q)/2E(Q)$ と C_2 との関係を S_2 および H_2 を経由して調べたことを報告する。

I. 上に述べたように、有理点 P に対して $\lambda(P)$ は $K^\times / K^{\times 2}$ に属する。そこで、もし $E(Q)/2E(Q)$ で独立な有理点の集り $\{P, Q, R, \dots\}$ で λ による像が H_2 に含まれるようなものがあれば、 C_2 の rank を大きくすることができる。すなわち、大雑把に言って、大きな rank を持つ Q 上の楕円曲線、およびその Mordell-Weil 群の生成系が与えられれば、それらを使って ideal 類群の 2-rank が大きい 3 次体を構成できることになる。具体的には、そのような無限個の 3 次体を構成するために、一変数（多変数でも良い）関数体 $Q(t)$ 上の“都合の

良い” 楕円曲線を見だし、その特殊化として $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線を作る。これについては本講究録に掲載(予定)の長尾孝一氏の仕事とも関連する。

たとえば、Shioda[6]の例は $\mathbb{Q}(t)$ 上の楕円曲線で、その定義方程式、および Mordell-Weil群の生成系が具体的に与えられているので、上の方法を適用し易い。実際、 $\text{rank } C_2 \geq 7$ なる3次体を無数に構成できる。また、Nakata[5]の楕円曲線は三変数関数体上に定義されているが、これを使えば、 $\text{rank } C_2 \geq 8$ とすることができる。

II. 純3次体(2項方程式で定義される3次体)で $\text{rank } C_2 \geq 6$ なるものを構成するために、[4]では、曲線 $Y^2 = 4X^3 + D$ の有理点に関する Craig[2]の方法を用いた。Craig は関数体上に7つの有理点を持つような D の作り方を示しているが、純3次体に対してはそのうちの6つしか使えなかった。実際に、これら7つの点の間に一次関係があることが計算機によって確かめられる。(これは、いくつかの素数 p について modulo p での計算結果から予想することによって得られた。)したがって、純3次体について $\text{rank } C_2 \geq 6$ より良い評価を得ることは、Craig の方法ではできないことになる。

III. 上の2つのトピックスが定量的であるのに対して、以下では定性的な性質、特に S_2 と H_2 の関係について述べよう。まず、 S_2 の元は K のほとんどすべての素idealについて偶数のorderを持つことから、 S_2 は“ほとんど” H_2 に含まれていると考えられる。もし完全に含まれているならば、(2)の全準

同型 $H_2 \rightarrow C_2$ を S_2 に制限して完全系列

$$1 \longrightarrow U'_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow C'_2 \longrightarrow 1$$

を得る. ここで, U'_2, C'_2 はそれぞれ U_2, C_2 の部分群である. これと (1)

を並べることにより, S_2 を経由して C_2 と $\text{III}_2, E(Q)/2E(Q)$ の関係がつく.

(詳しくは Washington[7], Kawachi & Nakano[3]を参照.)

そこで $S_2 \subset H_2$ となるための条件をさがすことが問題となるが, これについてはまず次のような簡単な十分条件がある.

(3) 楕円曲線 E の判別式の素因子は K で分解しない.

たとえば, Washington[7] は $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$Y^2 = X^3 + mX^2 - (m+3)X + 1$$

で与えられる楕円曲線を扱っているが, そこでは, 右辺の多項式の判別式の平方根 m^2+3m+9 が平方因子を持たないことが条件となっている. このとき, その素因子は K で完全分岐する. 一方 2 は K で惰性するが, 上で与えた楕円曲線の判別式の素因子は 2 を除いて右辺の多項式の判別式の素因子と一致するから, (3)が満たされることになる.

さて, 一般に $\mathbb{Q}$ 上の素点 p に対して, $K_p = K \otimes \mathbb{Q}_p$ は p の上の素点 $\mathfrak{p}$ による K の完備化 $K_{\mathfrak{p}}$ の直和として書ける; $K_p = \bigoplus_{\mathfrak{p}|p} K_{\mathfrak{p}}$. さらにその可逆元全体のなす群は $K_p^\times = \bigoplus_{\mathfrak{p}|p} K_{\mathfrak{p}}^\times$ となるが, 特に p が有限のとき, $K_{\mathfrak{p}}$ の単数群 $U_{\mathfrak{p}}$ を用いて $K_p^\times$ の部分群 $U_p = \bigoplus_{\mathfrak{p}|p} U_{\mathfrak{p}}$ が定義される. このとき, 次のような完全系列が成り立つ.

$$1 \longrightarrow H_2 \cap S_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow \bigoplus_{p \neq \infty} \text{Im } \lambda_p / (U_p K_p^{\times 2} / K_p^{\times 2} \cap \text{Im } \lambda_p).$$

したがって、もし

$$(4) \quad \text{すべての素数 } p \text{ に対して } \text{Im } \lambda_p \subset U_p K_p^{x^2}/K_p^{x^2}$$

が満たされるならば、 $S_2 \subset H_2$ となる。この条件が有効な例として

$$Y^2 = X^3 - a(X-1)$$

なる楕円曲線を考える。ただし $a = (b^2+27)/4$, b は 3 以上の奇数をとる。このとき、判別式は $\Delta = 2^4(ab)^2$ であるが、 b を割る 3 より大きい素数 p は K で分解することがすぐに確かめられるので、条件(3)を使うことはできない。ところで Brumer & Kramer[1]によれば、 p について non-split multiplicative reduction を持ち、さらに $\text{ord}_p(\Delta) \equiv 0 \pmod{4}$ ならば(6)の包含関係が成り立つ。これはさらに、 $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ かつ $\text{ord}_p(b)$ が偶数、という条件に書き直すことができる。このように、各素数 p についての reduction を詳しく調べることで、 $S_2 \subset H_2$ となる条件を書き下すことが可能な場合がある。

また、(4)が(3)から導かれることを注意しておく。したがって、上の例から(4)が(3)よりも真に弱い十分条件を与えていることがわかる。

References

- [1] A. Brumer and K. Kramer, The rank of elliptic curves, Duke Math. J. 44(1977), 715-743.
- [2] M. Craig, A construction for irregular discriminants, Osaka J. Math. 14(1977), 365-402.

- [3] M. Kawachi and S. Nakano, The 2-class groups of cubic fields and the 2-descents on elliptic curves, Preprint series, 1990, no.2, Nagoya Univ., Dept. of Math., College of General Education.
- [4] S. Nakano, Construction of pure cubic fields with large 2-class groups, Osaka J. Math. 25(1988),161-170.
- [5] K. Nakata, On some elliptic curves defined over $\mathbb{Q}$ of free rank ≥ 9 , Manus. math. 29(1979), 183-194.
- [6] T. Shioda, Construction of elliptic curves over $\mathbb{Q}(t)$ with high rank: a preview, Proc Japan Acad. 66A(1990),57-60.
- [7] L. C. Washington, Class numbers of the simplest cubic fields, Math. Comp. 48(1987),371-384.