

偏心 2 円筒間の流れにおけるカオス混合

京大・工 市田良夫 (Yoshio ICHIDA)

京大・工 船越満明 (Mitsuaki FUNAKOSHI)

Abstract

2次元非定常流の一つの例として、周期的に回転する偏心 2 円筒間の流れが挙げられる。この流れは、ラグランジアンカオスの代表例として、これまでいろいろな研究がなされてきた。しかしながら、流体の混合問題に直接注目した研究は少なく、また直接的な方法で混合の定量化を行っている研究がほとんどなかった。そこで、本研究ではまず混合のパラメーター依存性を調べた。とくに、効率的な混合の妨げになる島状領域を消去する、円筒付近の規則領域を小さくする、という 2 つの目標に向けてパラメータをどう調整すればよいかを調べた。さらに、流れ領域全体を等面積の N 個のセルに分割し、推移行列を定義することにより混合の定量化を行った。これにより、混合の一様性や効率などある程度定量化でき、その結果がポアンカレプロットなどとよく対応していることが確認できた。

1 序章

工学への応用を考えると、システムのカオス的振る舞いは未来予測を困難にするため、しばしば喜ばしくない性質としてとらえられがちである。しかしながら、カオスの複雑な振る舞いが利点として働く場合もありえる。その 1 つの例としてカオス混合がある。簡単な流れ場においても、その中での流体粒子の運動はカオス的となり得る。このような、流体をラグランジュ的に記述した場合に確認できるカオスを特にラグランジアンカオスといい、これまで様々な研究がなされてきた。周期的に回転する偏心 2 円筒間の遅い流れにおけるカオス的な振る舞いは、ストークス近似の下で解析的な解が存在し^[1]、実験も可能であるという理由からたくさんの研究がある。例えば、Chaiken *et al.* ^[2] は流れ領域が規則領域とカオス領域に分割されることを実験で調べた。規則領域内では、2 円筒の運動の 1 周期ごとの流体粒子の位置はある閉軌道上を規則的に運動し、一方カオス領域では複雑な振る舞いを示す。彼らはさらにこれらの結果が数値シミュレーションとよく合うことを示した。Swanson と Ottino ^[3] は、実験において初期に置かれた染料が速く広がる領域がこのカオス領域とよく一致することを示し、流体の微小部分の引き延ばしと折り畳みのプロセスを調べた^[4]。

これらの研究は定性的性質を調べたものが多く、混合の効率化を定量的に詳しく調べた研究がこれまでほとんど見あたらない。それ故、本研究では偏心 2 円筒間の流れにおける混合の効率を調べ、効率的な混合を実現するための適切なパラメータ値の選択について述べる。さらに、推移行列を定義することにより、混合の効率と一様性などを定量的に調べる。

2 章では、2 円筒の半径比 α 、離心率 ϵ 、そして 1 周期あたりの回転量 T_{out} と T_{in} という流れを決定するパラメータについて説明し、ストークス近似の下で得られる流れ関数を説明する。3 章では、ポアンカレプロットと混合のシミュレーション図について説明する。4 章では、混合の効率のパラメーター依存性について調べる。島状領域を消去するためには ϵ の値の調整が重要であり、円筒付近の規則領域を小

さくするためには T_{out} と T_{in} の値の調整が重要であることを述べる。5章では、混合の効率と一様性を定量化するために、マルコフ性の仮定の下で、1周期後の流体粒子の位置から得られる推移行列を定義する。6章は結論である。

2 基礎方程式

図1に示すように外円筒、内円筒の半径をそれぞれ R_{out} 、 R_{in} とし、 (x, y) 空間におけるそれぞれの中心を $(0, 0)$ 、 $(-d, 0)$ とする。半径比 α と離心率 ϵ は以下で定義される

$$\alpha \equiv \frac{R_{in}}{R_{out}}, \quad \epsilon \equiv \frac{d}{R_{out} - R_{in}}. \quad (1)$$

外円筒と内円筒は角速度 $\Omega_{out}(t)$ と $\Omega_{in}(t)$ で交互に周期的な回転をするものとする。ここで t は時間を表す。 T_{out} と T_{in} は、それぞれ外円筒と内円筒の1周期あたりの回転角を 2π で割った量である。例えば $T_{out} = 1$ の場合は1周期あたり外円筒が正の方向に1回転するという意味である。

2次元非圧縮流を仮定すると、流れ関数 ψ が定義でき、 (x, y) 方向の速度 (u_x, u_y) は

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2)$$

と表せる。このとき、ナビエ・ストークス方程式は、

$$\nu \nabla^4 \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} - \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (3)$$

と表せる。ここで、 ν は動粘性係数である。また、2つの円筒上で滑りがないという境界条件は、

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -y\Omega_{out}(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -x\Omega_{out}(t), \quad (\text{外円筒}) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -y\Omega_{in}(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -(x+d)\Omega_{in}(t), \quad (\text{内円筒}) \quad (5)$$

と表すことができる。

ここで、円筒が十分ゆっくりと回転し、流れが十分に遅く、かつ流れ場の時間変化も小さくて、

$$R_e \equiv \frac{\max(R_{out}^2 |\Omega_{out}(t)|, R_{in}^2 |\Omega_{in}(t)|)}{\nu} \ll 1, \quad R_c \equiv \frac{R_{out}^2}{\nu t_c} \ll 1, \quad (6)$$

が成り立つと仮定する。ここで、 t_c は流れ場の時間的な変化を特徴づける時間スケールである。このストークス近似の下では、式(3)の右辺は無視でき、

$$\nabla^4 \psi = 0. \quad (7)$$

が得られる。境界条件(4)、(5)を満たす、式(7)の解析解はすでに知られており^[1]、以下で定義される双極座標系 (ξ, η) を用いて表されている。

$$x = -b \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta} + b \coth \xi_{out}, \quad y = b \frac{\sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}, \quad (8)$$

ここで、

$$b = \frac{1}{2d} \sqrt{(R_{out}^2 + R_{in}^2 - d^2)^2 - 4R_{out}^2 R_{in}^2}, \quad (9)$$

である。また、 $\xi = \xi_{out}$ と ξ_{in} はそれぞれ外円筒と内円筒を表し、関係

$$R_{out} = -\frac{b}{\sinh \xi_{out}}, \quad R_{in} = -\frac{b}{\sinh \xi_{in}}, \quad (10)$$

を満たす。 η は周方向を表す変数であり 0 から 2π の値をとる。流れ関数 ψ の具体的な形は付録に示してある。双極座標系における流体粒子の位置 (ξ, η) は以下の式から数値計算される:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{H^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{H^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \quad (11)$$

ここで、 H は (ξ, η) の関数であり、付録に示されている。流体粒子の位置 (ξ, η) がわかれば、 (x, y) 平面におけるその位置は変換式 (8) を用いて計算される。

3 混合の評価

偏心 2 円筒間の遅い流れにおける、流体の混合問題を考察する。ポアンカレプロットと混合のシミュレーション図を用いて流体粒子の運動の大域的な振る舞いを調べ、そのパラメータ（半径比 α 、離心率 ϵ 、回転量 T_{out}, T_{in} ）依存性を調べる。ポアンカレプロットは流体粒子の位置を円筒回転の 1 周期ごとにプロットすることにより得られる。本研究では外円筒が 1 周期分のちょうど半分回転したタイミングでプロットしてある。流体粒子の位置は式 (11) を積分することにより得られる。数値計算は Adams-Bashforth 法を用いて、 $10^{-12} - 10^{-8}$ の精度で行った。

ポアンカレプロットのいくつかの例を図 2-5 で示す。これらは図 6 のように対称線上に配置された 20 個の初期点の運動を 300 周期にわたってプロットした図である。2 円筒間の領域にはカオス領域と規則領域が存在し、規則領域では各流体粒子は 1 つの閉曲線上を規則的に動き続ける。そのため、規則領域内では流体は効率よく混合されない。一方、カオス領域では流体粒子は領域全体を不規則に運動する。一般的に初期にカオス領域に存在する流体はカオス領域全体に素早く広がるため混合に適していると考えられる。また規則領域とカオス領域は互いに混合されることはない。図 4 と 5 に示されているようなカオス領域に囲まれた規則領域は特に島状領域と呼ばれる。また、図 3 では大きなカオス領域が存在する。このようにポアンカレプロットは流体粒子の運動の大域的な振る舞いを調べるのに適しているといえる。しかしながら、 n 周期後の混合の効率をはかる場合には n 周期後の流体粒子の位置さえ分かれば十分なのだが、ポアンカレプロットではそれ以前の時刻での情報も含んでしまう。また、カオス領域内における混合の効率の場所による違いなどの構造もポアンカレプロットでは見つけることができない。そのためポアンカレプロットは混合の直接的な指標とはいえない。

次に、上記のようなポアンカレプロットのみでは分からない短時間での混合の様子を確認するために、シミュレーション図も用いた。図 7-10 は混合のシミュレーション図の例であり、図 11 に示すように領域の下半分に 3600 個の初期点をおき、5 周期後の各流体粒子の位置をプロットした。これらの図により短時間での混合の様子を直接理解することができる。しかし、2 流体の異なる初期配置に対して異なる結果が得られるため、一般的な混合の議論には適さないといえる。

4 混合の効率のパラメータ依存性

本研究ではポアンカレプロットを用いて流体粒子の運動の大域的振る舞いを調べ、短時間での混合の効率と一様性を確認するために混合のシミュレーション図を用いる。この章では、適切なパラメータ値を選ぶことによる効率の良い混合の実現について述べる。

4.1 島状領域の消去

混合の効率を高めるために、カオス領域のなかに存在する島状領域を消去することを考える。島状領域の例が図12に示されている。図12からもわかるように、島状領域の中心には、1周期ごとの流体粒子の位置を対応づけるポアンカレ写像の楕円型固定点が存在するので、島状領域を消すためにはこの固定点を消去すればよい。ポアンカレ写像の固定点は条件

$$\xi_{n+1} = \xi_n, \quad \eta_{n+1} = \eta_n, \quad (12)$$

を満たす。ここで (ξ_n, η_n) は双極座標系における n 周期後の流体粒子の位置を表す。すべての点が式(12)を満たさなければ、固定点は存在しなくなる。そこで、4つのパラメータ $\alpha, \epsilon, T_{out}, T_{in}$ を変化させて、流体粒子の位置の1周期後の η 方向の変化量 $\Delta\eta = \eta_{n+1} - \eta_n$ を計算する。図13-16は、図6のように初期配置した20の点に対して $\Delta\eta$ を計算した結果である。ここで $\hat{x} = 0.0$ と $\hat{x} = 1.0$ は、それぞれ外円筒と内円筒の位置を意味する。 $\alpha = 0.3, \epsilon = 0.7$ を固定し、回転量 T_{out} と T_{in} を変化させた場合の $\Delta\eta$ を縦軸に示してある(単位はラジアン)。調べた範囲内では、回転量 T_{out} と T_{in} の値に関わらず $\Delta\eta = 0$ となる点が存在し、円筒付近を除く他の初期点に対しても、 T_{out} と T_{in} を変えたときの $\Delta\eta$ の変化は小さく η 方向の変化量が小さいことが分かった。さらに、 α, ϵ を他のいろいろな値にした場合も調べたが、いずれにおいても回転量の変化による $\Delta\eta$ の値の変化は円筒付近を除いては小さく、回転量を変化させることで $\Delta\eta = 0$ となる点を取り除くことはできなかった。

次に、図17は $\alpha = 0.3, T_{out} = 1.0, T_{in} = 1.0$ の場合に、いくつかの ϵ に対して $\Delta\eta$ の値をプロットしたものである。 ϵ が小さいときには $\Delta\eta$ の値はクエット流の場合に似ており、ほとんどの流体粒子は η 方向にだいたい 2π だけ動く。 ϵ が小さいときには、流れ領域において内円筒の右側と左側の面積の差が小さいので、円筒が回転するとき、各流体粒子は右側の広い領域から左側の狭い領域にスムーズに動き、そのため流れ領域中には大きな規則領域が形成される。一方、 ϵ が1に近い場合には、内円筒の右側と左側の面積差が大きいため、円筒が回転するとき、多くの流体粒子は η 方向にあまり移動できない。これらの点は固定点になる可能性があり、楕円型固定点が存在すると島状領域が形成される。そこで、図17からも分かるように、0にも1にも近くない適切な ϵ の値を選ぶことにより、この固定点を取り除くことができる。

また、 α 依存性に関しては、調べた限りにおいて α による $\Delta\eta$ の値の差はあまり見られなかった。上の考察で述べたように、島状領域の形成においては、内円筒の右側と左側の面積比が重要であった。この面積比は内円筒の右側と左側の対称軸上

の2つの線分の長さの比で代表され、

$$\frac{[\text{右側}]}{[\text{左側}]} = \frac{R_{out} - R_{in} + d}{R_{out} - R_{in} - d} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}, \quad (13)$$

と、 ϵ のみに依存する形に書ける。それ故、島状領域の形成には α の値の選択はそれほど重要でないと考えられる。

混合の効率のパラメータ依存性はポアンカレプロットと混合のシミュレーション図を用いて確認できる。図18-20は $\alpha = 0.3, T_{out} = 1.0, T_{in} = 1.0$ と固定し、 ϵ を0.2, 0.5, 0.9と変化させた場合のポアンカレプロットである。小さい ϵ に対しては大きな規則領域が存在し、大きい ϵ に対しては大きな島状領域が形成される。 $\epsilon = 0.5$ の場合には領域のほとんどがカオス領域となる。離心率 ϵ の値はカオス領域の面積を大きくするために重要であると思える。同様の依存性は、図21-23の混合のシミュレーション図でも見られる。パラメーターの値は図18-20と同様である。 $\epsilon = 0.2$ に対する図21では、ほとんどの流体粒子は規則的に動き、効率的な混合は期待できない。 $\epsilon = 0.5$ のときは、図22に示すように、ほとんどの流体粒子は不規則に動き、領域内に散らばっていく。 ϵ がさらに大きいときには、図23に示すように島状領域の存在のために効率的な混合は得られない。

図24-26は、 $\epsilon = 0.7, T_{out} = 1.0, T_{in} = 1.0$ と固定したときに、 $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6$ と変化させた場合のポアンカレプロットである。これらの図では島状領域の形成に関して大きな違いは見られない。上で述べたように、島状領域の消去には半径比 α は重要でないことがわかる。このことは図27-29で示すように、混合のシミュレーション図でも確認できる。図30-32は、 $\alpha = 0.3, \epsilon = 0.7$ とし、回転量 T_{out} と T_{in} を変化させた場合のポアンカレプロットである。すべての場合に比較的大きい島状領域が存在し、 T_{out} と T_{in} を変化させることでは島状領域を消去できない。このことは図33-35で示すように混合のシミュレーション図でも確認できる。これらの図は図30-32と同じパラメータの値に対するものである。他の多くの T_{out} と T_{in} に対しても調べたが、どの場合にも島状領域を消去することはできなかった。

4.2 円筒付近の規則領域を小さくする

次に、混合の効率をさらに高めるために円筒付近の規則領域を小さくすることを考える。ここでは外円筒付近の規則領域に限って議論する。はじめに $T_{in} = 1.0, \alpha = 0.3, \epsilon = 0.45$ の場合に、ポアンカレプロットの0.1–1.0の範囲の回転量 T_{out} の値に対する依存性を考察する。図36-45は初期に $\eta = 0$ （内円筒の右側の対称軸の線分）上に ξ に関して外円筒側の1/5の線分上に20個の初期値を置き、600周期にわたりプロットした図である。 T_{out} が条件

$$T_{out} \times I = J + \Delta, \quad (14)$$

を満たすとき、外円筒付近に島を見つけることができる。ここで I, J は整数であり、 Δ は正の微小量である。外円筒のすぐ近くの流体粒子は I 周期後 η 方向に $2\pi T_{out} \times I$ だけ移動するので、外円筒付近には η 方向に $2\pi \times J$ だけ移動する流体粒子が存在する。これらの点はポアンカレ写像の周期点となりえる。一般的に I が小さいほど外円筒付近の規則領域は大きくなる。例えば図37に示すように、 $T_{out} = 0.9$ のとき外円筒付近の規則領域は小さくなり、図39に示すように、 $T_{out} = 0.7$ のとき規則領域は大きくなる。

5 推移行列を用いた混合の定量化

5.1 推移行列の定義

まず、2円筒間の流れ領域を N 個の等面積のセルに数値的に分割する。具体的には、まず η 方向に等面積になるように 8 個の部分領域に分ける。次いで、各部分領域を ξ 方向にさらに分割する。最後に、もう一度 η 方向に分割して、最終的に各セルを等面積にする。この際、最終的に得られるセルの形がなるべく正方形に近くなるように工夫する。図46は $N = 960$ の場合の分割例である。このセル分割に基づいて推移行列

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

を以下のように定義する。ここで各成分 p_{ij} はセル i から出発した流体のうち 1 周期後にセル j に入るものの割合を表す。数値計算においては、各セル内に 2500 個の初期点を配置し、それぞれの流体粒子の 1 周期後の位置から p_{ij} を計算する。ストークス近似の下では流体粒子の運動はマルコフ的である。セル分割を行うとマルコフ性は成り立たなくなるが、ここでは推移行列 P に対してマルコフ性を仮定して流体の混合問題を考察する。推移行列を定義することの利点は、マルコフ性の仮定の下では 1 周期の情報がわかれば 2, 3, ... 周期後の情報も比較的簡単な計算で得られるということである。いま、非圧縮性流体を仮定しているので、 p_{ij} の定義より、

$$\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad \sum_{i=1}^N p_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad p_{ij} \geq 0, \quad (16)$$

が成り立ち、 P は確率行列であることがわかる。いま流体 A と流体 B の混合を考え、全体の中で流体 A の占める割合を γ_A とする。正規化された流体 A の濃度ベクトルを $q^{(n)} = (q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, \dots, q_N^{(n)})$ とする。ここで $q_j^{(n)}$ は円筒回転の n 周期後のセル j における流体 A の割合を $N\gamma_A$ で割ったものである。このとき、

$$\sum_{j=1}^N q_j^{(n)} = 1, \quad 0 \leq q_j^{(n)} \leq 1, \quad (17)$$

が成り立つ。そして、マルコフ性を仮定すると、任意の 0 以上の整数 n に対して

$$q^{(n)} = q^{(0)} P^n, \quad (18)$$

と表せる。

5.2 混合効率の指標

P は分解不可能であって、かつ対角化できると仮定すると、ある正規行列 B を用いて、

$$P = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \lambda_2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix} B^{-1}, \quad (19)$$

と書ける。そして、このとき

$$P^n = \lambda_1^n H_1 + \lambda_2^n H_2 + \cdots + \lambda_N^n H_N, \quad (20)$$

ただし、

$$H_l = [\alpha_{il} \beta_{lj}] \quad (l = 1, 2, \dots, N), \quad B = [\alpha_{ij}], \quad B^{-1} = [\beta_{ij}], \quad (21)$$

と表せる。フロベニウスの定理より、 P の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ は関係

$$\lambda_1 = 1, \quad |\lambda_i| \leq 1 \quad (i = 2, 3, \dots, N), \quad (22)$$

を満たすことが知られている。実際に計算したデータでは、 λ_2 以降の絶対値は1より小さいので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = H_1, \quad (23)$$

となる。そして H_1 は、固有値1に対する P の固有ベクトルから容易に計算できて、どの成分も N^{-1} の行列である。したがって、正規化された濃度ベクトル $q^{(n)}$ の漸近状態 π は、

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{(0)} P^n = q^{(0)} H_1 = \left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N} \right) \quad (24)$$

という様に混合された状態になる。この漸近状態は、規則領域とカオス領域が互いに混合されないという性質に反するが、これは各セル内の流体の動きにマルコフ性を仮定したことに伴ってある種の拡散効果が入ったためである。したがって、この推移行列に基づく解析は、拡散効果の存在下での混合を調べていると考えた方がよい。ここで、(20)の形より、混合効率の1つの指標として、 $|\lambda_2|, |\lambda_3|, \dots$ を考えることができる。これらの値の1との差が大きいほど、速く一様混合状態に到達し、混合の効率が高いと考えられる。

図47は大きいものから並べた $|\lambda_i|$ の値の分布を表している。 ϵ の値を変えた場合に得られた結果は3章の結果と整合性がある。すなわち、図18と20で示されるように、 ϵ が0に近い場合と1に近い場合には、領域内に比較的大きな規則領域ができ効率的な混合が期待できないが、この場合には、図47の $|\lambda_i|$ の減少のしかたが遅く、混合効率が悪いといえる。一方、図19の $\epsilon = 0.5$ の場合は、流れ領域が大きなカオス領域からなり、流体がよく混合されることが期待できるが、その場合には $|\lambda_i|$ が他の ϵ のときに比べて速く減少していることがわかる。Ottino^[5]は $\alpha = \frac{1}{3}, \epsilon = 0.45, T_{out} = 1.0, T_{in} = 3.0$ の場合に流体はよく混合されることを示した。図48は同じパラメータの値に対して $|\lambda_i|$ をプロットしたものである。 $|\lambda_i|$ の値は確かに速く減少し、よく混合されるということがわかる。

5.3 混合の一様性の指標

n 周期後の混合の一様性の指標として、エントロピー

$$M_n = -\frac{1}{\log N} \sum_{i=1}^N q_i^{(n)} \log q_i^{(n)}, \quad (25)$$

を定義する。 M_n の値は2流体の初期分布に依存し、流体が領域全体に一様に分布するようになれば、 $M_n = 1$ となる。図49は、それぞれカオス領域、規則領域内の

1つのセルだけに流体Aを置いた配置から出発した場合の M_n の値をプロットしたものである。初期位置がカオス領域に存在する場合は一様混合状態に近づくのが速く、規則領域に存在する場合は遅い。

5.4 局所的な混合効率の指標

この節では局所的な混合効率の指標について考察する。各セル i に対して、

$$K_i = -\frac{1}{\log N} \sum_{j=1}^N p_{ji} \log p_{ji}, \quad L_i = -\frac{1}{\log N} \sum_{j=1}^N p_{ij} \log p_{ij}, \quad (26a,b)$$

という量を定義する。 K_i が大きな値を取るとき、流体は多くのセルからセル i に集まり、 L_i が大きいときはセル i から多くのセルへと散らばっていく。 K_i と L_i は時間反転的な量を表すので、本研究では L_i のみについて考察する。図50-52は最も L_i の大きかった1/5のセルを表している。図52の L_i の大きい領域は、同じパラメータに対する図12のカオス領域内に入っている。

6 結論

偏心2円筒間の遅い周期的流れによる混合の効率や一様性を調べ、以下のような結論を得た。

1. 島状領域を消去し、混合の効率を高めるためには、離心率 ϵ が最も重要なパラメータである。
2. 円筒付近の規則領域を小さくするには、回転量 T_{out} と T_{in} の値を適切に選ぶことが重要である。
3. 流れ領域全体がカオス領域で占められる場合、推移行列 P の2番目以降の固有値の絶対値 $|\lambda_2|, |\lambda_3|, \dots$ は速く小さくなっていき、一様混合状態への収束が速い。一方、大きな規則領域が存在するときは、 $|\lambda_2|, |\lambda_3|, \dots$ の減少は遅く、混合が遅い。
4. 式(25)で定義される混合の一様性の指標 M_n は、初期に一方の流体が規則領域内に局在している場合には、ゆっくりと一様混合状態に対応する値に近づいていき、初期にカオス領域内に局在している場合には、一様混合状態に対応する値に速く近づく。
5. 式(26b)で定義される局所的な混合効率の指標 L_i が大きな値をとる領域は、ポアンカレプロットにおけるカオス内に入っている。

参考文献

- [1] B.Y.Ballal and R.S.Rivlin, *Flow of a Newtonian fluid between eccentric rotating cylinders*, Inertial effects, Archs. Rat. Mech. Anal. **62** (1976) 237-294.

- [2] J. Chaiken, R. Chevray, M. Tabor and Q. M. Tan, *Experimental study of Lagrangian turbulence in a Stokes flow*, Proc. R. Soc. Lond. A **408** (1986) 687-694.
- [3] P. D. Swanson and J. M. Ottino, *A comparative computational and experimental study of chaotic mixing of viscous fluids*, J. Fluid Mech. **213** (1990) 227-249.
- [4] P. D. Swanson and J. M. Ottino, *The statistics of stretching and stirring in chaotic flows*, Phys. Fluids A **3** (1991) 822-834.
- [5] J. M. Ottino, *Unity and deversity in mixing: Stretching, diffusion, breakup, and aggregation in chaotic flows*, Phys. Fluids A **3** (1991) 1417-1430.
- [6] T. Atobe and M. Funakoshi, *Chaotic Motion of Fluid Particles Due to the Alternate Rotation of Two Eccentric Cylinders*, J. Phys. Soc. Jpn. **63** (1994) 1738-1753.
- [7] H. Aref, *Stochastic particle motion in laminar flows*, Phys. Fluids. **5** (1991) 1009-1016.
- [8] J. G. Franjione, C. Leong, and J. M. Ottino, *Symmetries within chaos: A route to effective mixing*, Phys. Fluids. **11** (1989) 1772-1783.
- [9] 森村 英典, 高橋 幸雄: 『マルコフ解析』, 日科技連 出版, (1979).

付録

方程式(7) と境界条件(4)、(5) を満たす流れ関数 ψ は以下のように表される^[1]:

$$\begin{aligned}
 \psi(\xi, \eta, t) &= H(\xi, \eta) \{ \varphi_1(\xi, \eta) \Omega_{out}(t) + \varphi_2(\xi, \eta) \Omega_{in}(t) \}, \\
 \varphi_j &= I_j(\xi) + J_j(\xi) \cos \eta, \quad [j = 1, 2], \\
 I_j(\xi) &= (A_{0j} + C_{0j}\xi) \cosh \xi + (B_{0j} + D_{0j}\xi) \sinh \xi, \\
 J_j(\xi) &= A_{1j} \cosh 2\xi + B_{1j} \sinh 2\xi + C_{1j}\xi + D_{1j}, \\
 H &= \frac{b}{\cosh \xi - \cos \eta},
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 A_{01} &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\bar{\Delta}}{\Delta} h_1 h_7 + h_3 \right) R_{out}, & A_{02} &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\bar{\Delta}}{\Delta} h_2 h_7 + h_4 \right) R_{in}, \\
 B_{01} &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\bar{\Delta}}{\Delta} h_1 h_8 + h_5 \right) R_{out}, & B_{02} &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\bar{\Delta}}{\Delta} h_2 h_8 + h_6 \right) R_{in}, \\
 C_{01} &= \frac{1}{\Delta} h_1 R_{out} \cosh \xi_-, & C_{02} &= \frac{1}{\Delta} h_2 R_{in} \cosh \xi_-, \\
 D_{01} &= -\frac{1}{\Delta} R_{out} \sinh \xi_2 \sinh^2 \xi_-, & D_{02} &= -\frac{1}{\Delta} R_{in} \sinh \xi_1 \sinh^2 \xi_-, \\
 A_{11} &= -\frac{1}{2\Delta} h_1 R_{out} \sinh \xi_+, & A_{12} &= -\frac{1}{2\Delta} h_2 R_{in} \sinh \xi_+, \\
 B_{11} &= \frac{1}{2\Delta} h_1 R_{out} \cosh \xi_+, & B_{12} &= \frac{1}{2\Delta} h_2 R_{in} \cosh \xi_+, \\
 C_{11} &= -\frac{1}{\Delta} h_1 R_{out} \cosh \xi_-, & C_{12} &= -\frac{1}{\Delta} h_2 R_{in} \cosh \xi_-, \\
 D_{11} &= \frac{1}{2\Delta} h_1 (\sinh \xi_- + 2\xi_{in} \cosh \xi_-) R_{out}, & D_{12} &= \frac{1}{2\Delta} h_2 (\sinh \xi_- + 2\xi_{in} \cosh \xi_-) R_{in},
 \end{aligned}$$

は定数であり、さらに

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \xi_-^2 - \sinh^2 \xi_-, \\
 \bar{\Delta} &= \xi_- \cosh \xi_- - \sinh \xi_-, \\
 \Delta^* &= \sinh \xi_- [2 \sinh \xi_{out} \sinh \xi_{in} \sinh \xi_- - \xi_- (\sinh^2 \xi_{out} + \sinh^2 \xi_{in})], \\
 \xi_+ &= \xi_{out} + \xi_{in}, \\
 \xi_- &= \xi_{out} - \xi_{in}, \\
 h_1 &= \xi_- \sinh \xi_{out} - \sinh \xi_{in} \sinh \xi_-, \\
 h_2 &= -\xi_- \sinh \xi_{in} + \sinh \xi_{out} \sinh \xi_-, \\
 h_3 &= \xi_{out} \sinh \xi_{in} \sinh \xi_- - \xi_{in} \xi_- \sinh \xi_{out}, \\
 h_4 &= -\xi_{in} \sinh \xi_{out} \sinh \xi_- + \xi_{out} \xi_- \sinh \xi_{in}, \\
 h_5 &= -\xi_{out} \sinh \xi_{in} \sinh \xi_- + \xi_{in} \xi_- \cosh \xi_{out}, \\
 h_6 &= \xi_{in} \sinh \xi_{out} \sinh \xi_- - \xi_{out} \xi_- \cosh \xi_{in}, \\
 h_7 &= \sinh \xi_{in} \cosh \xi_{out} \sinh \xi_- + \frac{1}{2} \xi_{out} \sinh 2\xi_{in} - \frac{1}{2} \xi_{in} \sinh 2\xi_{out} - \xi_{in} \xi_-, \\
 h_8 &= -\cosh \xi_{out} \cosh \xi_{in} \sinh \xi_- + \xi_{in} \cosh^2 \xi_{out} - \xi_{out} \cosh^2 \xi_{in}.
 \end{aligned}$$

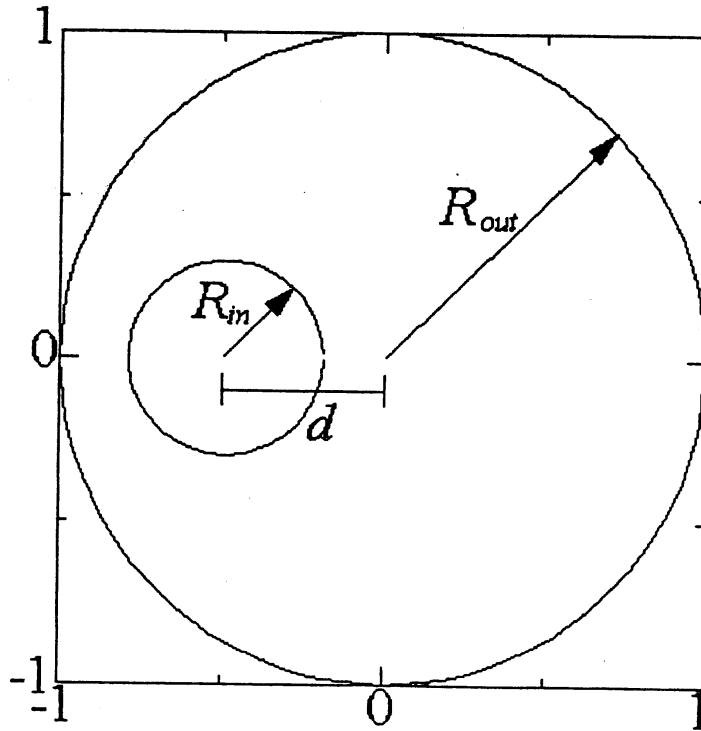


Fig.1 Eccentric cylinders

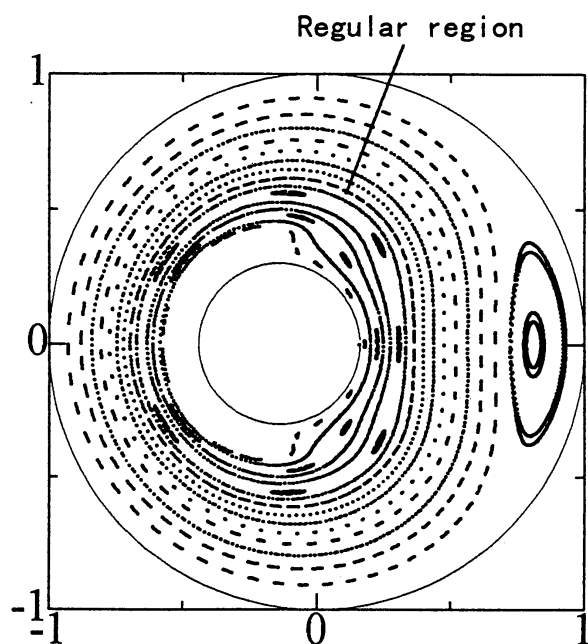


Fig.2 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.2$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

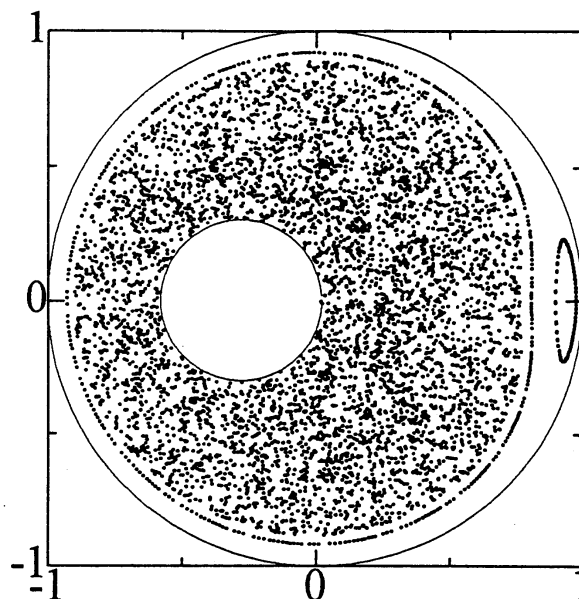


Fig.3 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.4$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

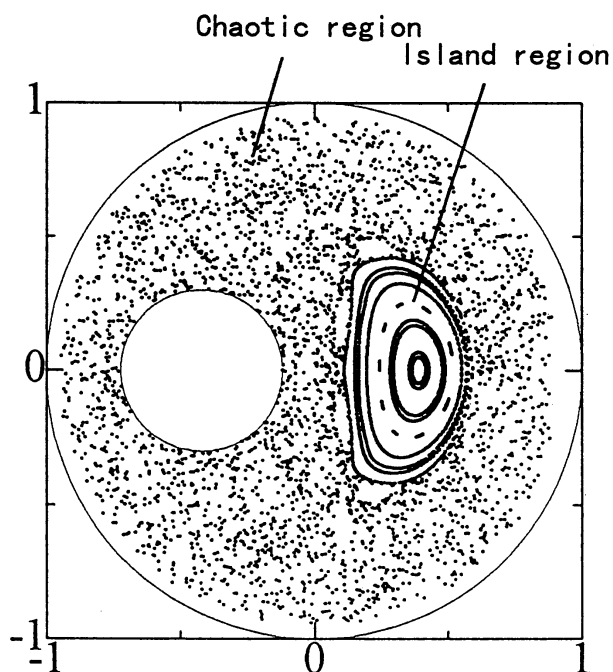


Fig.4 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.6$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

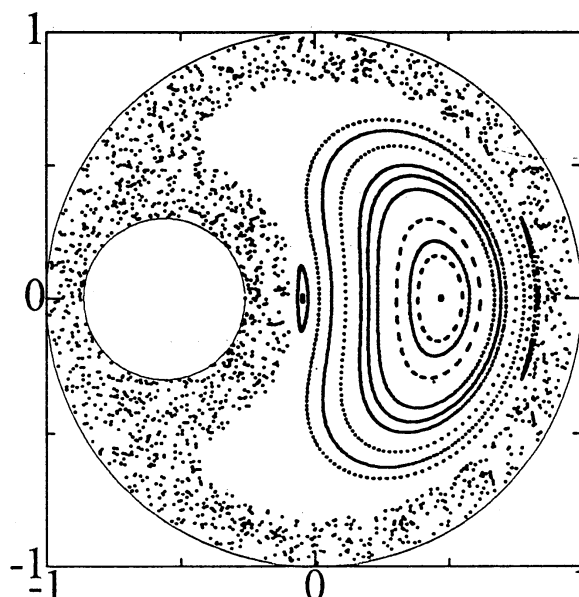


Fig.5 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.8$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

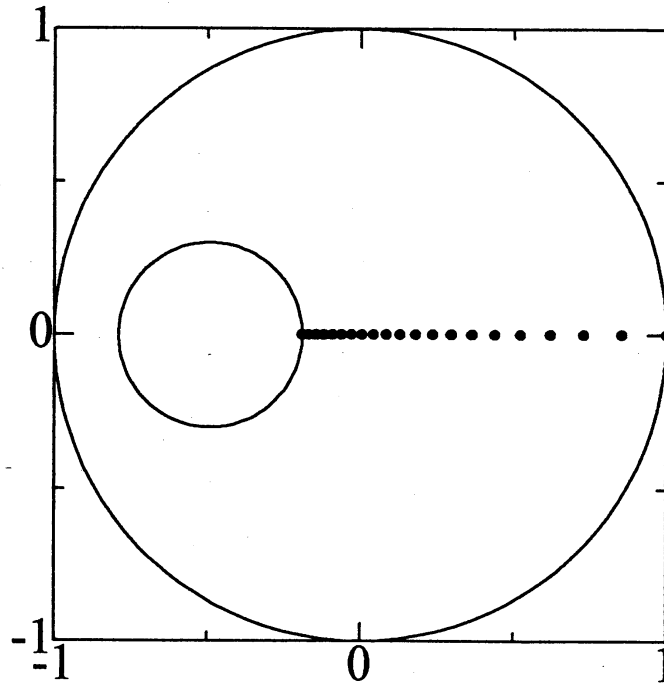


Fig.6 Initial positions of Poincaré plot

$$\alpha = 0.3,$$

$$\epsilon = 0.7$$

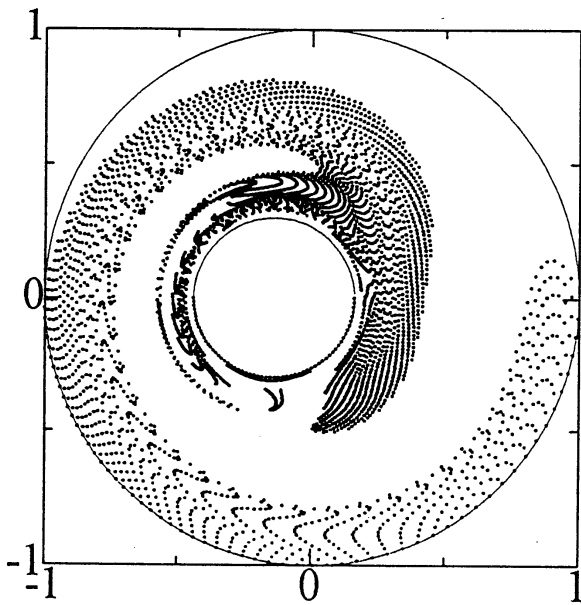


Fig.7 Mixing simulation

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.2$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

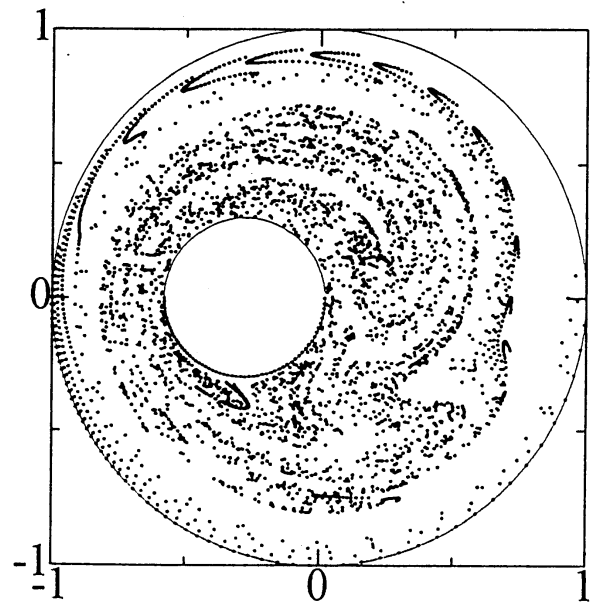


Fig.8 Mixing simulation

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.4$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

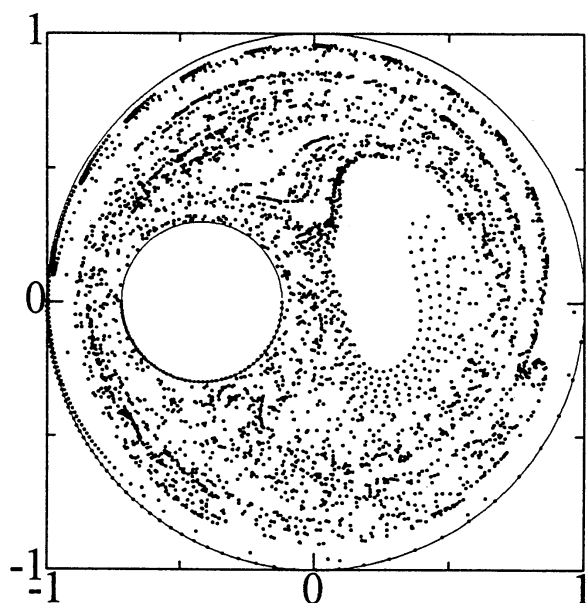


Fig.9 Mixing simulation

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.6$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

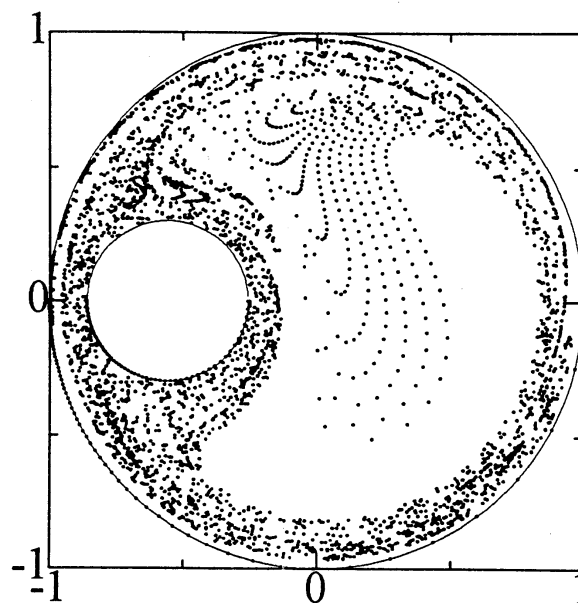
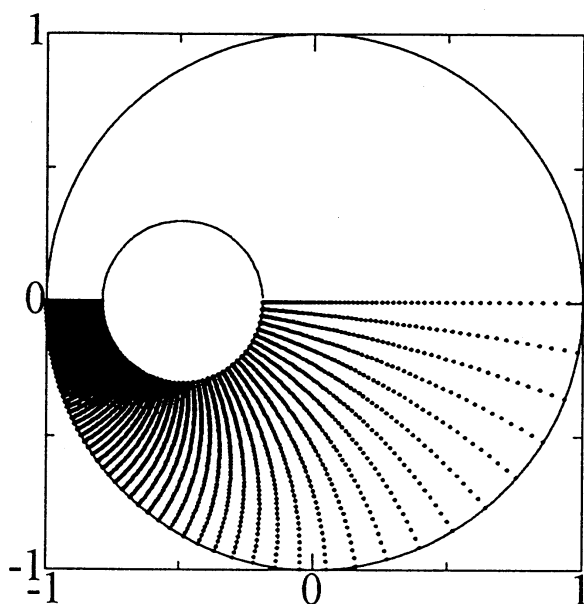


Fig.10 Mixing simulation

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.8$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

Fig.11 Initial positions of
mixing simulation

$$\alpha = 0.3,$$

$$\epsilon = 0.7$$

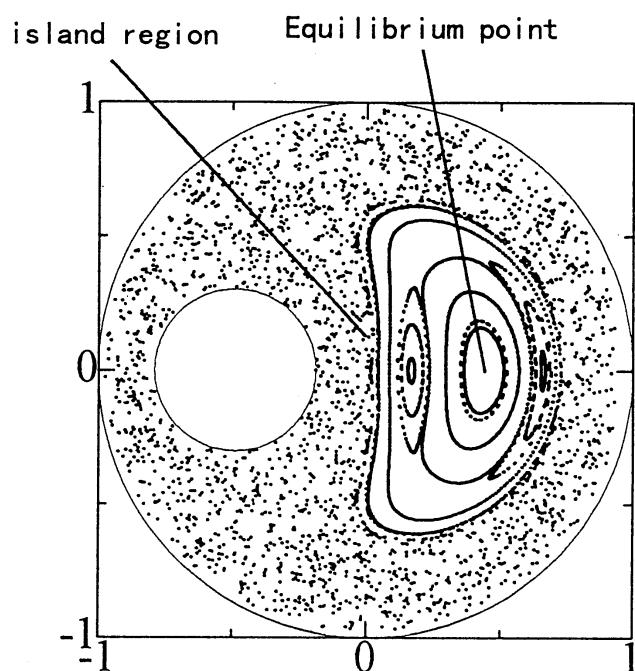


Fig.12 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

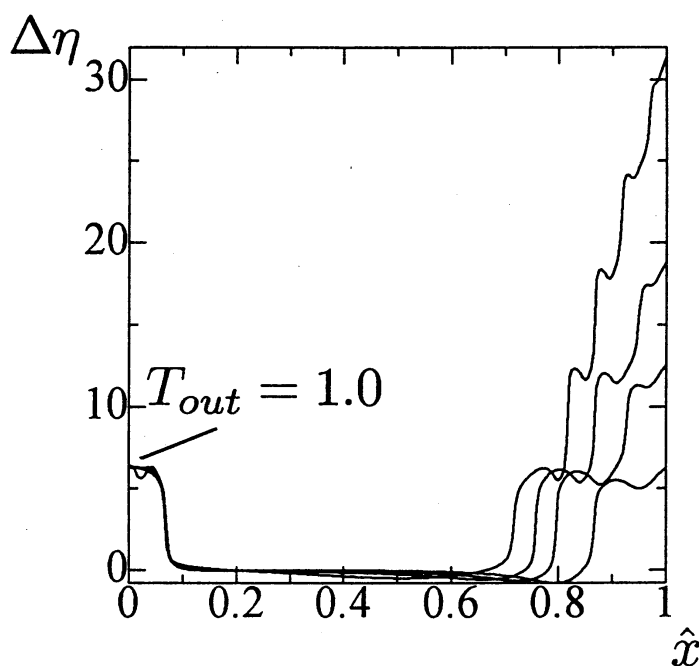


Fig.13 The movement
in the η direction

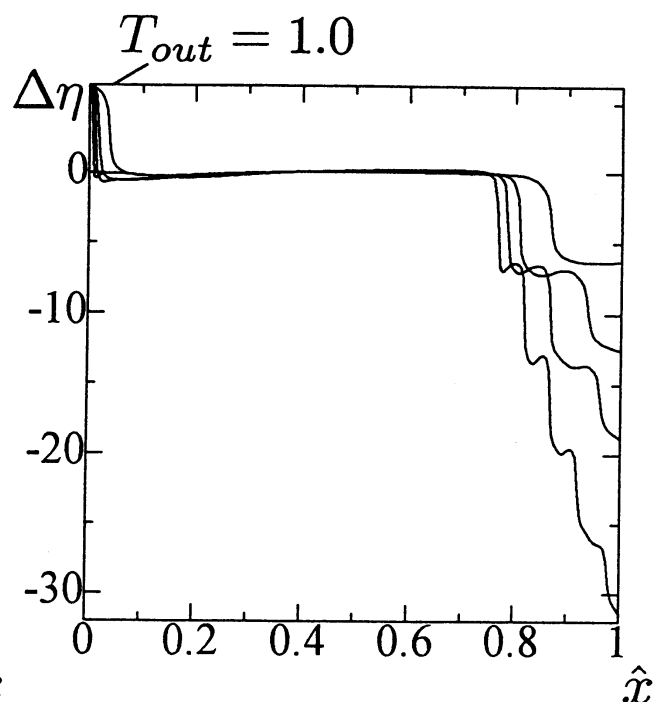


Fig.14 The movement
in the η direction

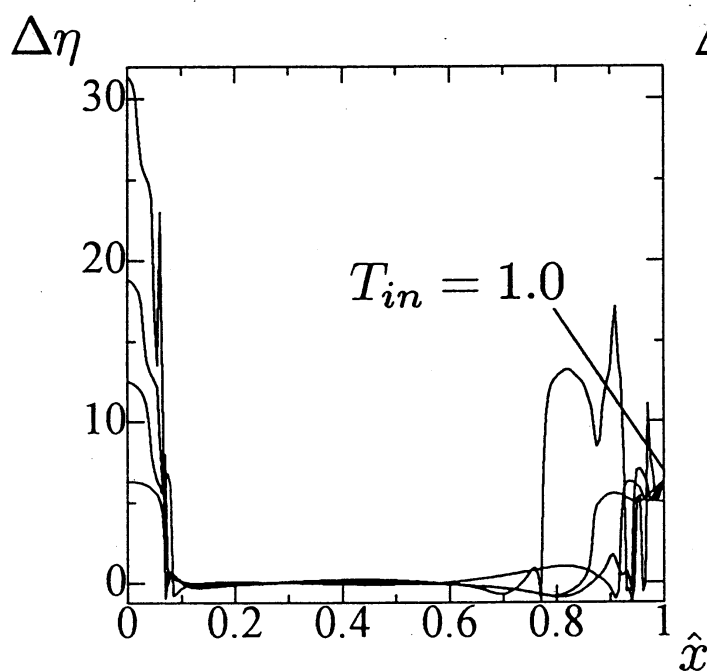


Fig.15 The movement
in the η direction

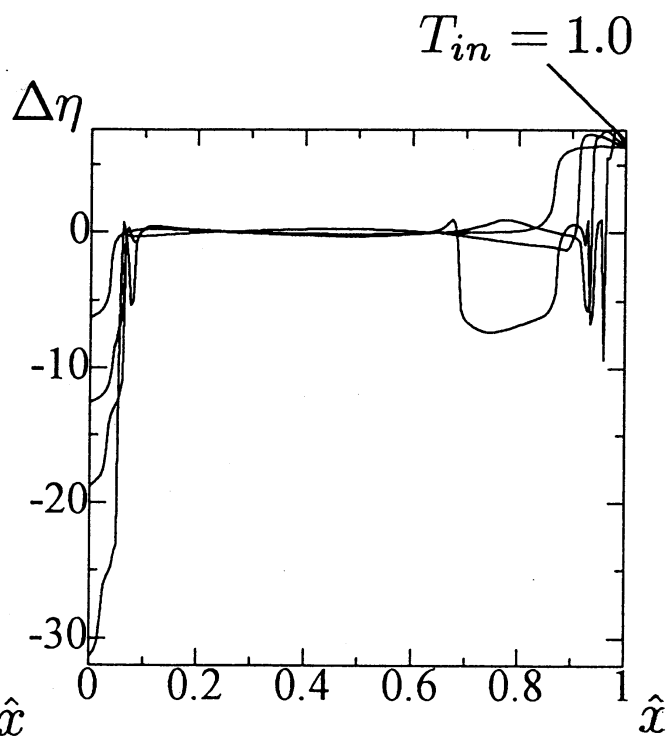


Fig.16 The movement
in the η direction

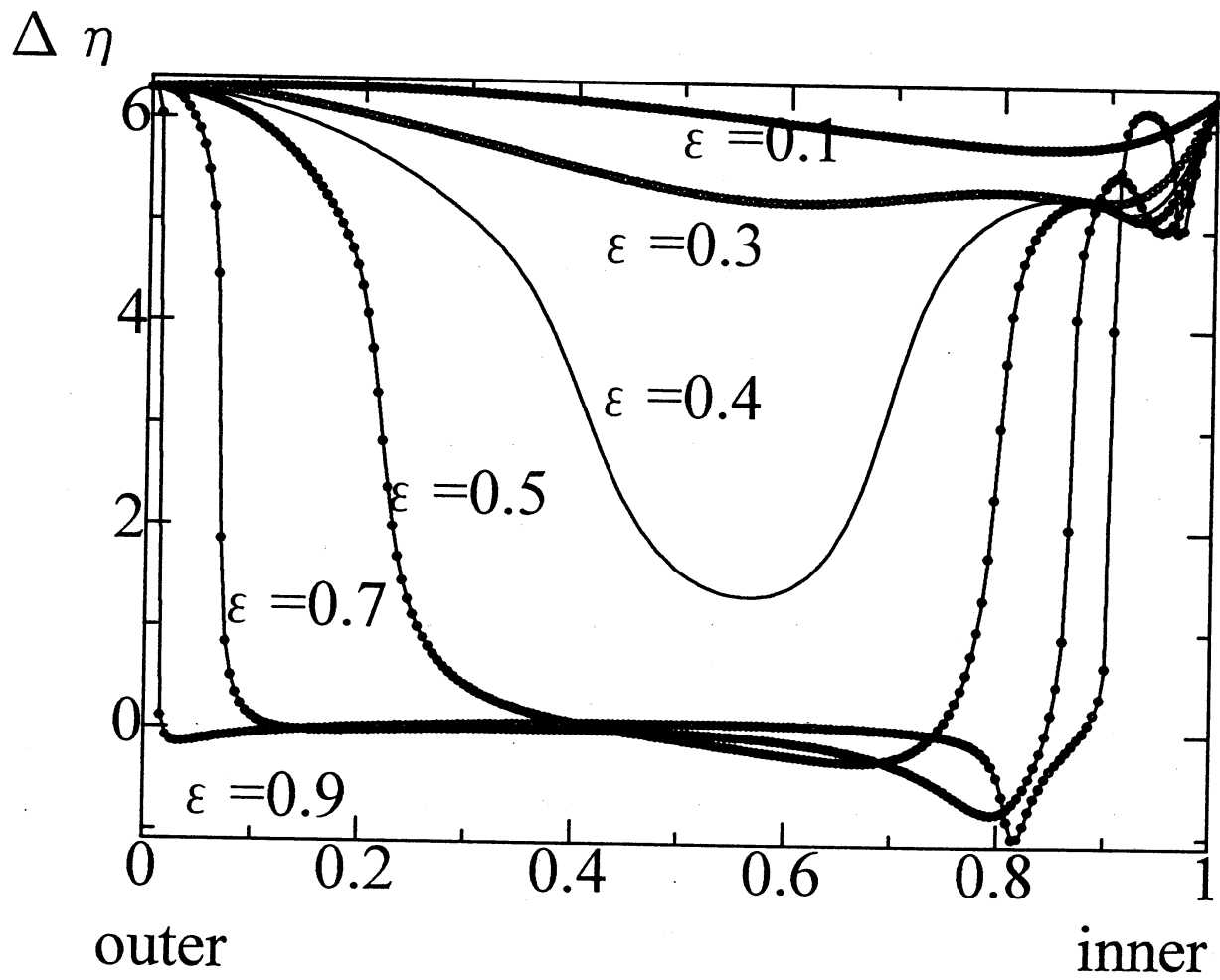


Fig.17 The movement
in the η direction

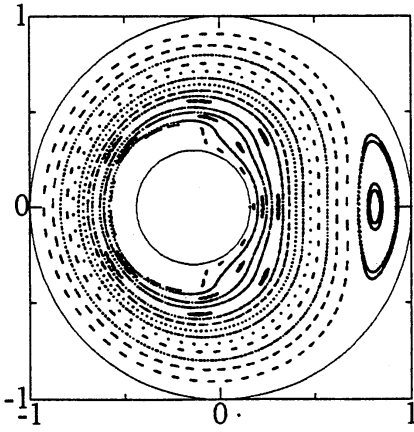


Fig.18 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.2$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

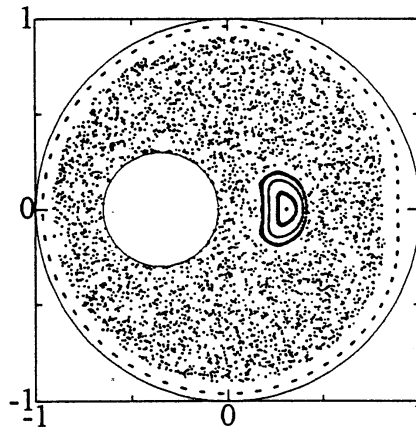


Fig.19 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.5$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

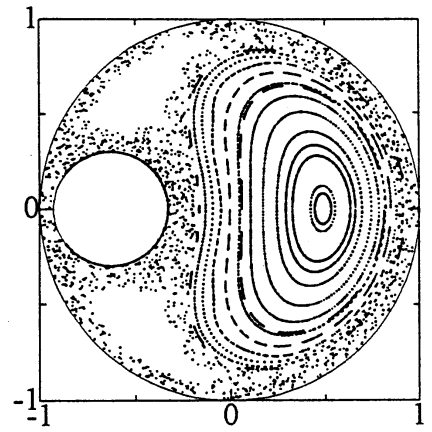


Fig.20 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.9$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

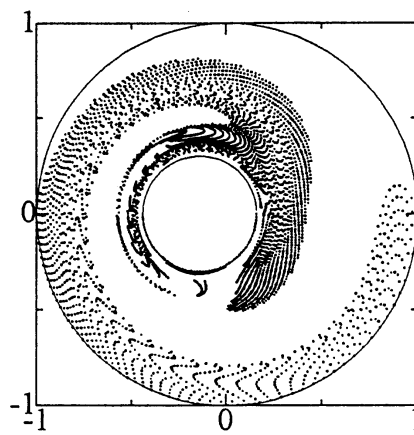


Fig.21 Mixing simulation

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.2$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

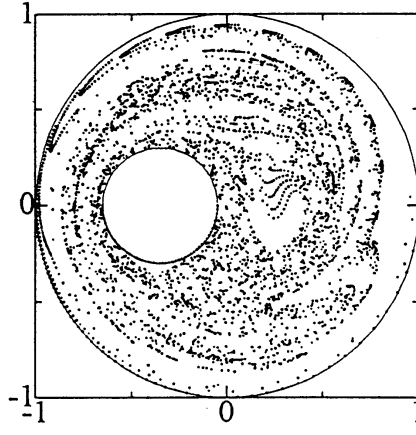


Fig.22 Mixing simulation

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.5$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

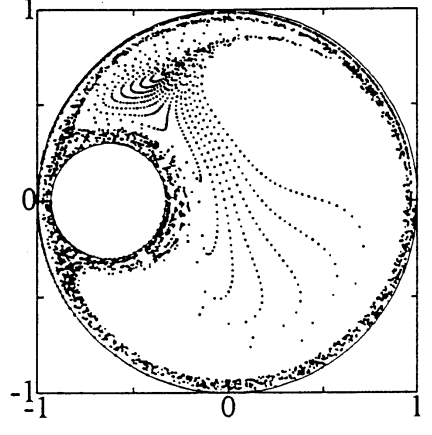


Fig.23 Mixing simulation

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.9$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

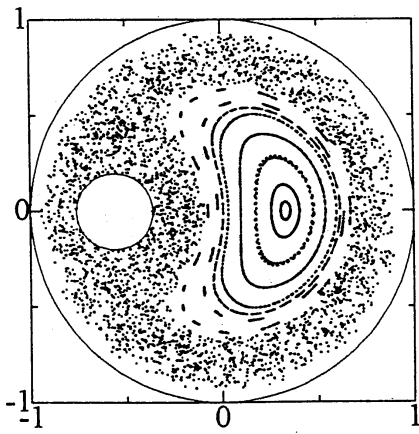


Fig.24 Poincaré plot

$$\alpha = 0.2, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

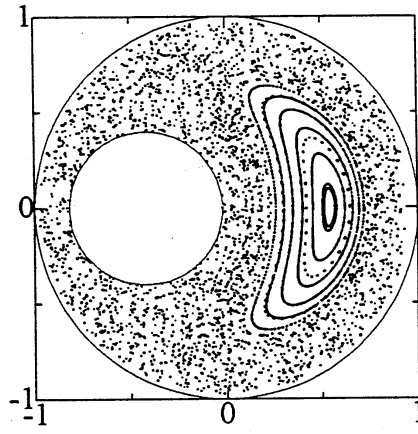


Fig.25 Poincaré plot

$$\alpha = 0.4, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

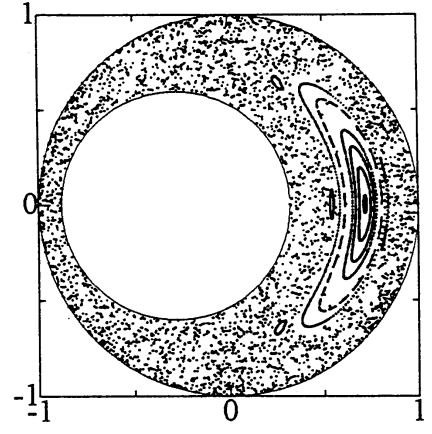


Fig.26 Poincaré plot

$$\alpha = 0.6, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

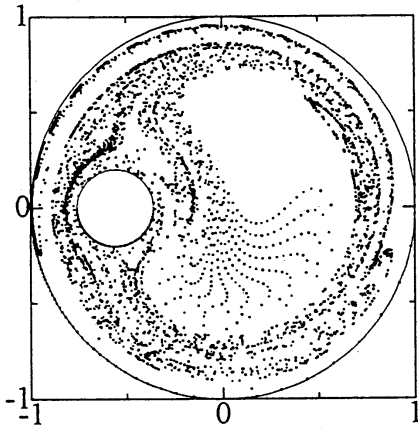


Fig.27 Mixing simulation

$$\alpha = 0.2, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

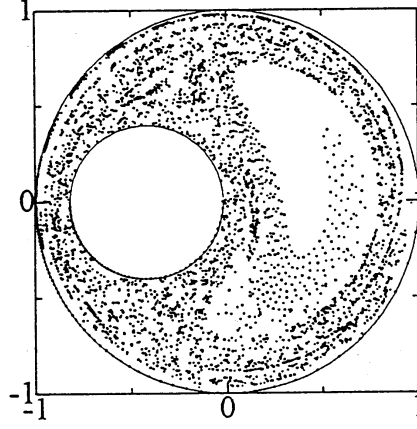


Fig.28 Mixing simulation

$$\alpha = 0.4, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

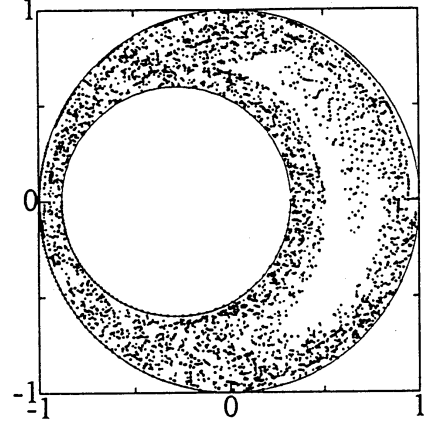


Fig.29 Mixing simulation

$$\alpha = 0.6, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

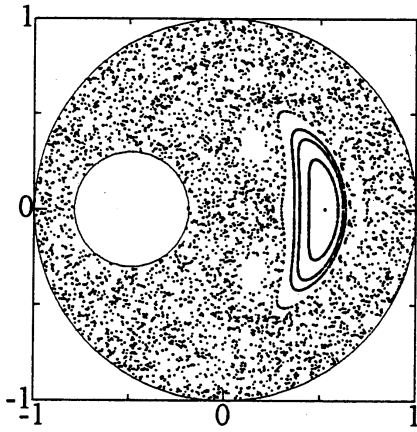


Fig.30 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 5.0$$

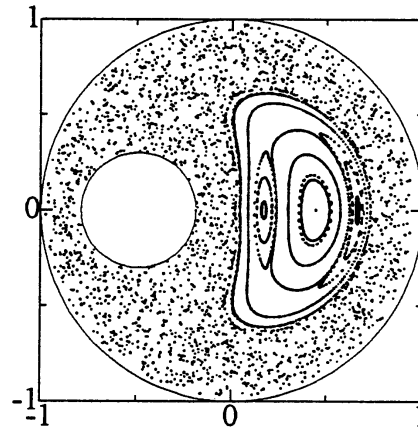


Fig.31 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

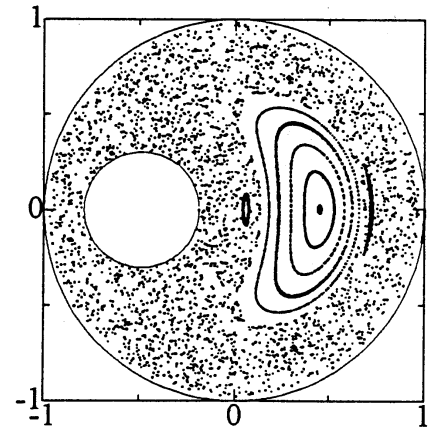


Fig.32 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 5.0, \quad T_{in} = 1.0$$

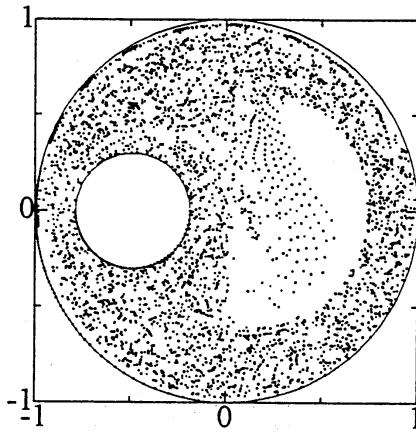


Fig.33 Mixing simulation

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 5.0$$

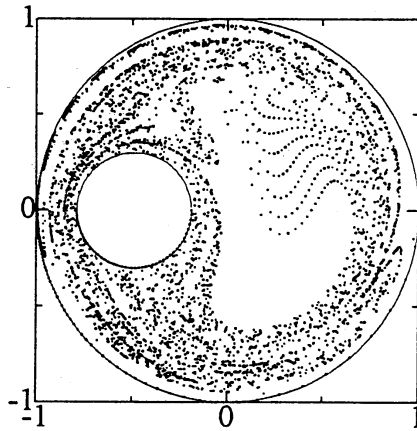


Fig.34 Mixing simulation

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

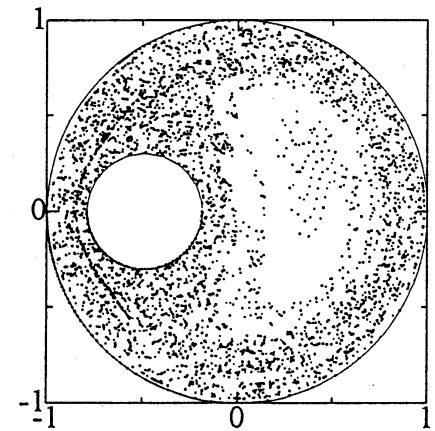


Fig.35 Mixing simulation

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 5.0, \quad T_{in} = 1.0$$

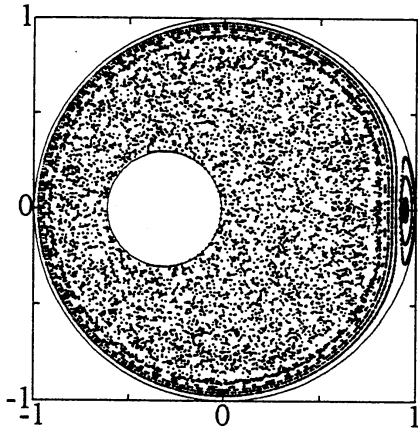


Fig.36 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.45$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

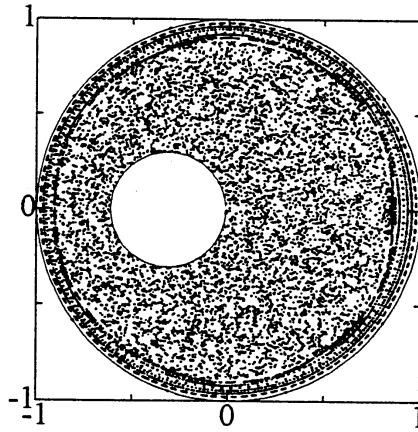


Fig.37 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.45$$

$$T_{out} = 0.9, \quad T_{in} = 1.0$$

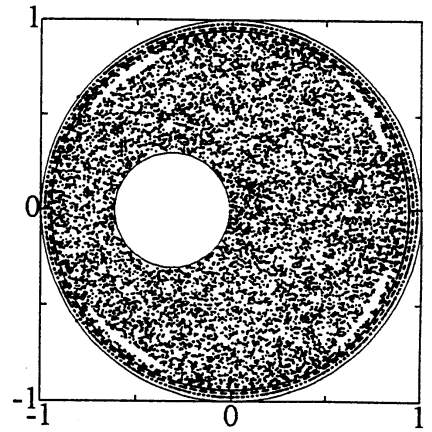


Fig.38 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.45$$

$$T_{out} = 0.8, \quad T_{in} = 1.0$$

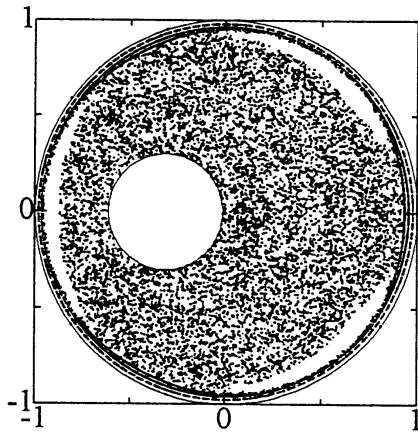


Fig.39 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.45$$

$$T_{out} = 0.7, \quad T_{in} = 1.0$$

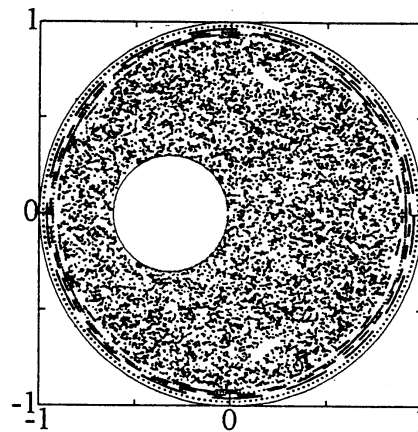


Fig.40 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.45$$

$$T_{out} = 0.6, \quad T_{in} = 1.0$$

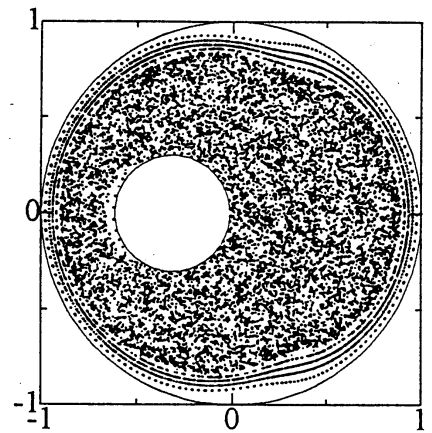


Fig.41 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.45$$

$$T_{out} = 0.5, \quad T_{in} = 1.0$$

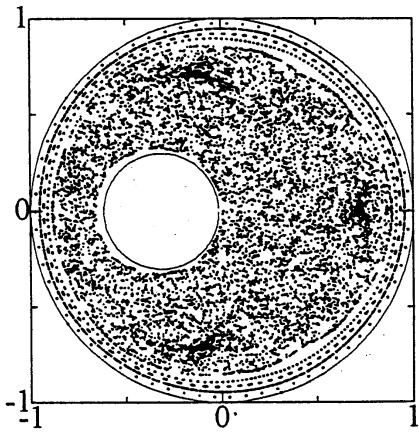


Fig.42 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.45$$

$$T_{out} = 0.4, \quad T_{in} = 1.0$$

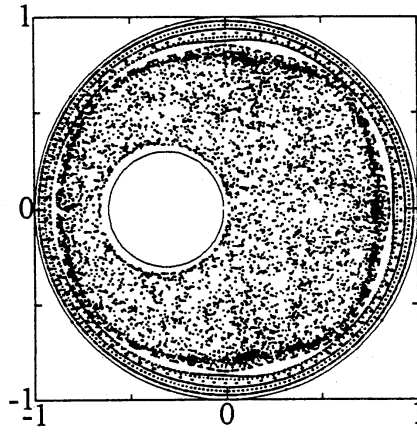


Fig.43 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.45$$

$$T_{out} = 0.3, \quad T_{in} = 1.0$$

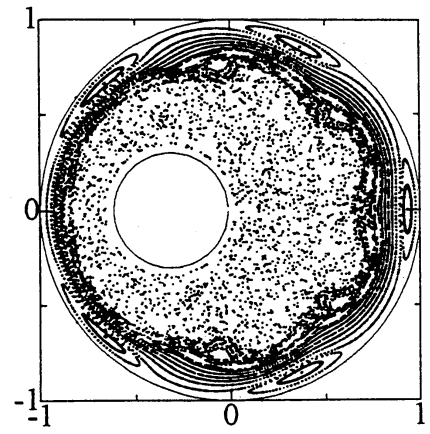


Fig.44 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.45$$

$$T_{out} = 0.2, \quad T_{in} = 1.0$$

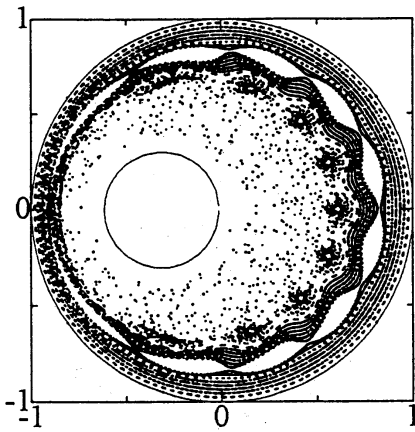


Fig.45 Poincaré plot

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.45$$

$$T_{out} = 0.1, \quad T_{in} = 1.0$$

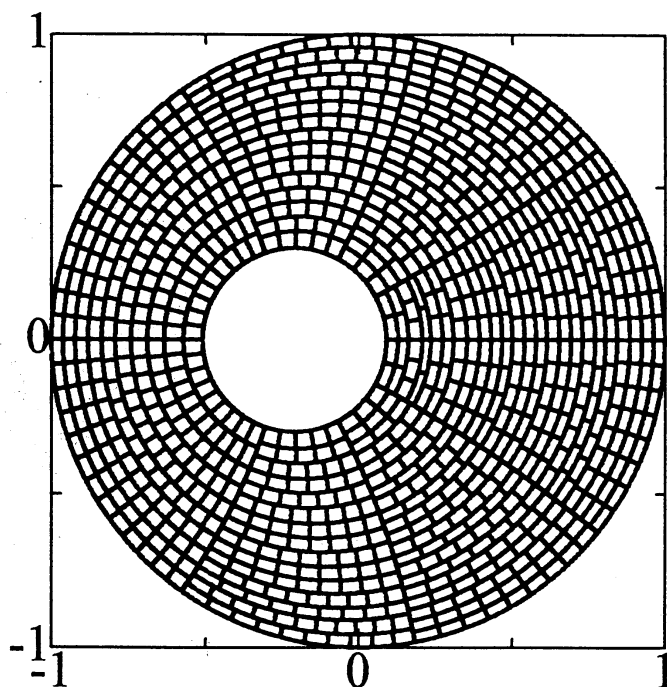


Fig.46 An example of the division
of the region into cells
($N = 960$)

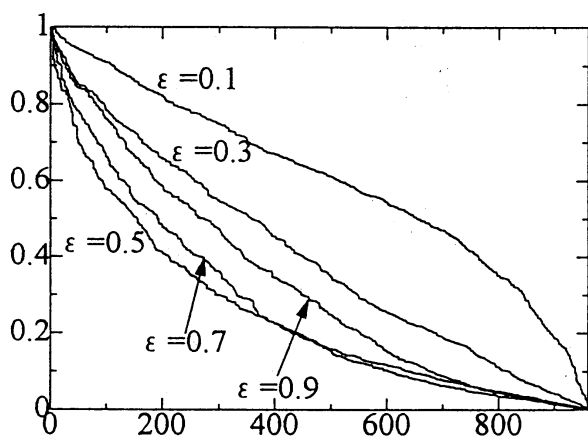


Fig.47 Absolute eigenvalues of P

$\alpha = 0.3,$
 $T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$

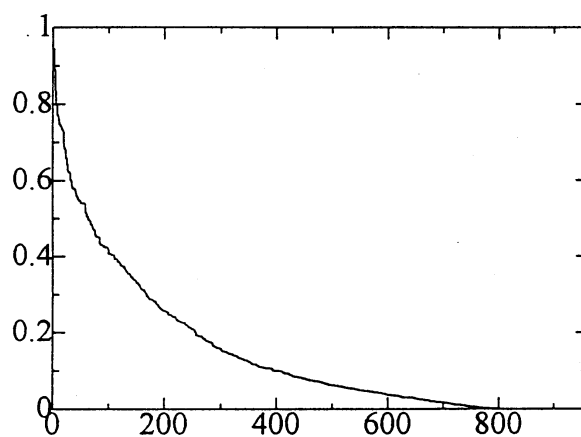
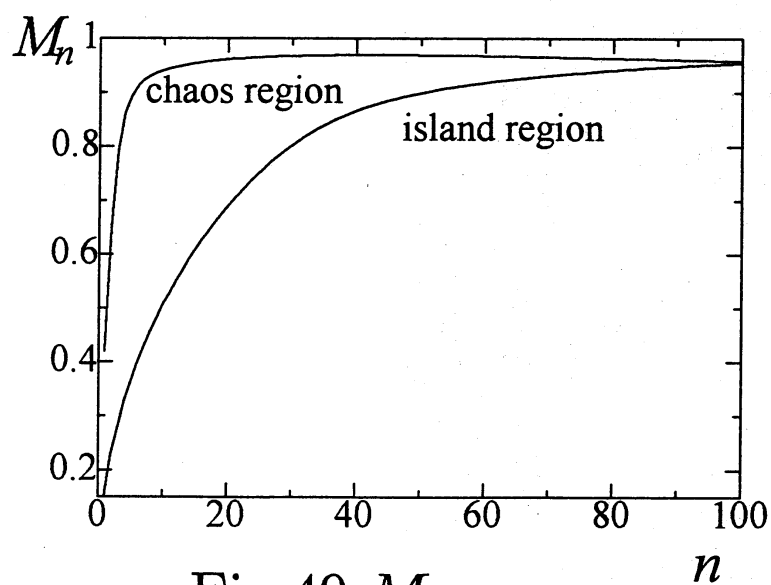


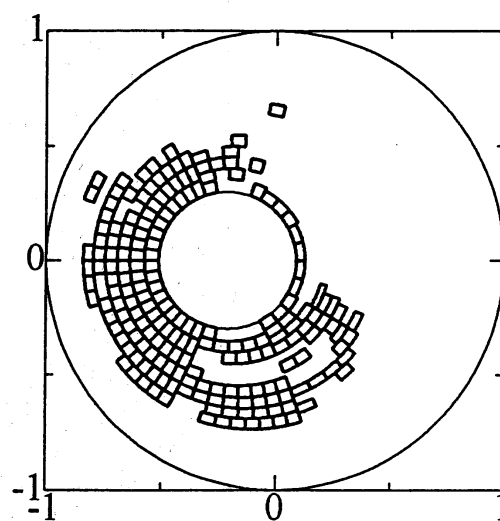
Fig.48 Absolute eigenvalues of P

$\alpha = 1/3, \quad \epsilon = 0.45$
 $T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 3.0$

Fig.49 M_n

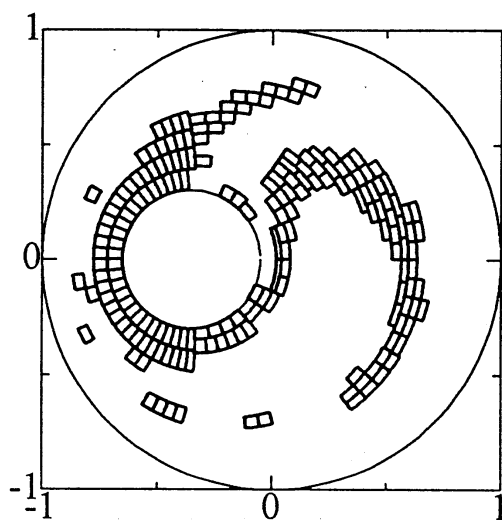
$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

Fig.50 Cells with large L_i

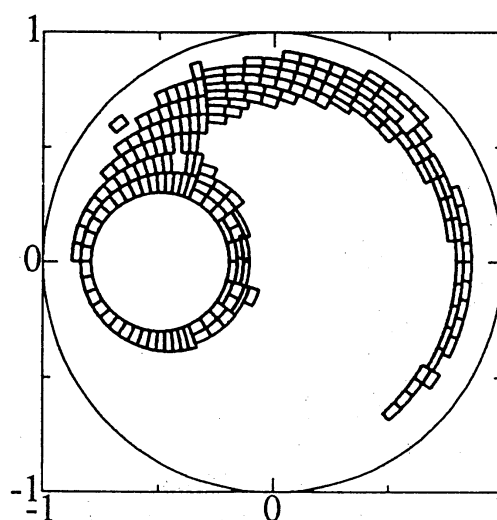
$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.3$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

Fig.51 Cells with large L_i

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.5$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$

Fig.52 Cells with large L_i

$$\alpha = 0.3, \quad \epsilon = 0.7$$

$$T_{out} = 1.0, \quad T_{in} = 1.0$$