

Wigner-Yanase-Dyson skew information の一般化 と関連する trace 不等式について (Generalization of Wigner-Yanase-Dyson skew information and related trace inequality)

柳 研二郎 (山口大学大学院理工学研究科)

Kenjiro Yanagi (Yamaguchi University)

田中 義晃 (山口大学大学院理工学研究科)

Yoshiaki Tanaka (Yamaguchi University)

1 はじめに

Wigner-Yanase skew information は [12] で次のように定義された.

$$\begin{aligned} I_{\rho}(H) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(i [\rho^{1/2}, H])^2 \right] \\ &= \text{Tr}[\rho H^2] - \text{Tr}[\rho^{1/2} H \rho^{1/2} H] \end{aligned}$$

この量はある量子状態 ρ とある観測量 H の間の非可換性をあらわすある種の degree として考えられている. ここで $[X, Y] = XY - YX$ は commutator をあらわす. またこれは Dyson によって次のように拡張され Wigner-Yanase-Dyson skew information と呼ばれている.

$$\begin{aligned} I_{\rho, \alpha}(H) &= \frac{1}{2} \text{Tr}[(i[\rho^{\alpha}, H])(i[\rho^{1-\alpha}, H])] \\ &= \text{Tr}[\rho H^2] - \text{Tr}[\rho^{\alpha} H \rho^{1-\alpha} H], \alpha \in [0, 1]. \end{aligned}$$

ρ に関して $I_{\rho, \alpha}(H)$ は convex であることは E.H.Lieb in [9] によって証明されたことはよく知られている. 量子力学的には観測量 H は一般的には非有界作用素であるがこの論文では断らない限り $\mathbb{C}^n$ 上の有界線形作用素すなわち行列であると仮定する. この理由は数学的興味のためである. $\mathbb{C}^n$ 上のエルミート行列全体を $M_{n, sa}$, 密度行

列 (density matrices) 全体を $D_{n,1}$ とそれぞれあらわすものとする. Wigner-Yanase skew information と uncertainty relation の関係は [11] で研究されている. さらに Wigner-Yanase-Dyson skew information と uncertainty relation との関係は [7, 13] で研究されている. 我々は [13] で一般化された skew information を新たに定義し, ある種の uncertainty relation を導いた. また [14] では Luo [10] の結果の一般化を与えた. 第2章では Wigner-Yanase-Dyson skew information の様々な性質を議論する. 第3章と第4章で主として2種類の定理を述べその証明を与える.

2 Wigner-Yanase-Dyson skew information に関する不確定性関係

Wigner-Yanase skew information と uncertainty relation の間の関係を見ることにする. 量子力学の system においては量子状態 ρ における物理量 H を観測したときの期待値は $\text{Tr}[\rho H]$ であらわされる. また分散は次で定義される.

$$V_\rho(H) = \text{Tr}[\rho(H - \text{Tr}[\rho H]I)^2] = \text{Tr}[\rho H^2] - \text{Tr}[\rho H]^2.$$

ここで量子状態 ρ と2つの物理量 A, B に対して次の不等式が成り立つことが知られている.

$$V_\rho(A)V_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|\text{Tr}[\rho[A, B]]|^2 \quad (1)$$

さらにより強い結果として Schrödinger によって次のように与えられた.

$$V_\rho(A)V_\rho(B) - |\text{Cov}_\rho(A, B)|^2 \geq \frac{1}{4}|\text{Tr}[\rho[A, B]]|^2,$$

ただし covariance は次で定義される;

$$\text{Cov}_\rho(A, B) = \text{Tr}[\rho(A - \text{Tr}[\rho A]I)(B - \text{Tr}[\rho B]I)].$$

しかし Wigner-Yanase skew information に対する次のような uncertainty relation については成り立たないことが知られている. ([11, 7, 13] を見よ)

$$I_\rho(A)I_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|\text{Tr}[\rho[A, B]]|^2.$$

最近 S.Luo は classical mixture を排除した量子的不確定性をあらわす次のような量 $U_\rho(H)$ を導入した.

$$U_\rho(H) = \sqrt{V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H) - I_\rho(H))^2}, \quad (2)$$

このとき S.Luo は [10] において $U_\rho(H)$ に関する次のような uncertainty relation を得た.

$$U_\rho(A)U_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A, B]]|^2. \quad (3)$$

ここで次の関係に注意する.

$$0 \leq I_\rho(H) \leq U_\rho(H) \leq V_\rho(H). \quad (4)$$

不等式 (3) は (4) の意味で不等式 (1) の精密化である. この章では不等式 (3) に対する one-parameter 拡張を考える.

Definition 2.1 $0 \leq \alpha \leq 1$ と量子状態 ρ と 物理量 H に対して *Wigner-Yanase-Dyson skew information* を次のように定義する.

$$\begin{aligned} I_{\rho, \alpha}(H) &= \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^{1-\alpha}, H_0])] \\ &= Tr[\rho H_0^2] - Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0] \end{aligned} \quad (5)$$

また関連して次の量も定義する.

$$\begin{aligned} J_{\rho, \alpha}(H) &= \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^{1-\alpha}, H_0\}] \\ &= Tr[\rho H_0^2] + Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0], \end{aligned} \quad (6)$$

ただし $H_0 = H - Tr[\rho H]I$ であり $\{X, Y\} = XY + YX$ は *anti-commutator* をあらわす.

次の関係が成り立つことは明らかである.

$$\frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^{1-\alpha}, H_0])] = \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H])(i[\rho^{1-\alpha}, H])].$$

ところが次の関係に注意する.

$$\frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^{1-\alpha}, H_0\}] \neq \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H\}\{\rho^{1-\alpha}, H\}].$$

このとき次の関係が成り立つ.

$$I_{\rho, \alpha}(H) \leq I_\rho(H) \leq J_\rho(H) \leq J_{\rho, \alpha}(H). \quad (7)$$

なぜなら

$$Tr[\rho^{1/2} H \rho^{1/2} H] \leq Tr[\rho^\alpha H \rho^{1-\alpha} H]$$

が成り立つからである. (例えば [1, 2] を見よ)

(2) の直接の一般化として次を定義する.

$$U_{\rho,\alpha}(H) = \sqrt{V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H) - I_{\rho,\alpha}(H))^2}, \quad (8)$$

このとき (7) の最初の不等式より次が成り立つ.

$$0 \leq I_{\rho,\alpha}(H) \leq U_{\rho,\alpha}(H) \leq U_\rho(H). \quad (9)$$

また次を定義する.

$$U_{\rho,\alpha}(H) = \sqrt{I_{\rho,\alpha}(H)J_{\rho,\alpha}(H)}.$$

このとき不等式 (4),(8),(9) より次の関係が成り立つことがわかる.

$$0 \leq I_{\rho,\alpha}(H) \leq I_\rho(H) \leq U_\rho(H)$$

かつ

$$0 \leq I_{\rho,\alpha}(H) \leq U_{\rho,\alpha}(H) \leq U_\rho(H).$$

我々の関心は不等式 (3) の直接の一般化である. そこで次の結果を得た.

Theorem 2.1 ([14]) 任意の量子状態 ρ と任意の物理量 A, B と任意の $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して次が成り立つ.

$$U_{\rho,\alpha}(A)U_{\rho,\alpha}(B) \geq \alpha(1-\alpha)|\text{Tr}[\rho[A, B]]|^2. \quad (10)$$

Theorem 2.1 を証明するためには次の3つの Lemma を用いればよい. スペクトル分解より ρ の eigenvectors からなる orthonormal basis を $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ とする. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を対応する eigenvalues とする. ただし $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ で $\lambda_i \geq 0$ である. したがって ρ は次の表現をもつ.

$$\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|. \quad (11)$$

Lemma 2.1

$$I_{\rho,\alpha}(H) = \sum_{i < j} (\lambda_i + \lambda_j - \lambda_i^\alpha \lambda_j^{1-\alpha} - \lambda_i^{1-\alpha} \lambda_j^\alpha) |\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2.$$

Lemma 2.2

$$J_{\rho,\alpha}(H) \geq \sum_{i < j} (\lambda_i + \lambda_j + \lambda_i^\alpha \lambda_j^{1-\alpha} + \lambda_i^{1-\alpha} \lambda_j^\alpha) |\langle \phi_i | H_0 | \phi_j \rangle|^2.$$

Lemma 2.3 任意の $t > 0$ と任意の $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して次の不等式が成り立つ;

$$(1 - 2\alpha)^2(t - 1)^2 - (t^\alpha - t^{1-\alpha})^2 \geq 0. \quad (12)$$

Remark 2.1 (10) において $\alpha = 1/2$ とおくことにより (9) が得られる. したがって Theorem 2.1 は Luo [10] の結果の一般化であることがわかる.

3 一般化(その1)

この section では Theorem 2.1 の一般化の 1 つとして次の不等式を与える. つまり (3) の two-parameter extension (1) である.

Definition 3.1 $\alpha, \beta \geq 0$ と量子状態 ρ と物理量 H に対して一般化された Wigner-Yanase-Dyson skew information を次のように定義する.

$$\begin{aligned} I_{\rho,\alpha,\beta}(H) &= \frac{1}{2} \text{Tr}[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^\beta, H_0])\rho^{1-\alpha-\beta}] \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Tr}[\rho H_0^2] + \text{Tr}[\rho^{\alpha+\beta} H_0 \rho^{1-\alpha-\beta} H_0] \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ \text{Tr}[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0] + \text{Tr}[\rho^\beta H_0 \rho^{1-\beta} H_0] \} \end{aligned}$$

また関連して次の量も定義する.

$$\begin{aligned} J_{\rho,\alpha,\beta}(H) &= \frac{1}{2} \text{Tr}[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^\beta, H_0\}\rho^{1-\alpha-\beta}] \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Tr}[\rho H_0^2] + \text{Tr}[\rho^{\alpha+\beta} H_0 \rho^{1-\alpha-\beta} H_0] \} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ \text{Tr}[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0] + \text{Tr}[\rho^\beta H_0 \rho^{1-\beta} H_0] \}, \end{aligned}$$

ただし $H_0 = H - \text{Tr}[\rho H]I$ であり $\{X, Y\} = XY + YX$ は anti-commutator をあらわす. $\alpha + \beta = 1$ のときは $I_{\rho,\alpha}(H) = I_{\rho,\alpha,1-\alpha}(H)$, $J_{\rho,\alpha}(H) = J_{\rho,\alpha,1-\alpha}(H)$ であることに注意する. また

$$U_{\rho,\alpha,\beta}(H) = \sqrt{I_{\rho,\alpha,\beta}(H)J_{\rho,\alpha,\beta}(H)}.$$

と定義する.

Theorem 3.1 ρ が invertible のとき, $\alpha, \beta \geq 0$ が $\alpha + \beta \geq 1$ または $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}$ を満たすとき次の不等式が成り立つ.

$$U_{\rho, \alpha, \beta}(A)U_{\rho, \alpha, \beta}(B) \geq \alpha\beta |Tr[\rho[A, B]]|^2. \quad (13)$$

Theorem 3.1 の証明に必要な Lemma を述べよう. $f_\alpha(i, j) = \lambda_i^\alpha \lambda_j^{1-\alpha} + \lambda_i^{1-\alpha} \lambda_j^\alpha$ とおく. また $h_{ij} = \langle \phi_i | H_0 | \phi_j \rangle$, $a_{ij} = \langle \phi_i | A_0 | \phi_j \rangle$, $b_{ij} = \langle \phi_i | B_0 | \phi_j \rangle$ とおく.

Lemma 3.1

$$I_{\rho, \alpha, \beta}(H) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \{ \lambda_i + \lambda_j + f_{\alpha+\beta}(i, j) - f_\alpha(i, j) - f_\beta(i, j) \} |h_{ij}|^2.$$

Lemma 3.2

$$J_{\rho, \alpha, \beta} \geq \frac{1}{2} \sum_{i < j} \{ \lambda_i + \lambda_j + f_{\alpha+\beta}(i, j) + f_\alpha(i, j) + f_\beta(i, j) \} |h_{ij}|^2.$$

Lemma 3.3 $t > 0$ とする. $\alpha, \beta \geq 0$ が $\alpha + \beta \geq 1$ または $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}$ を満たすとき次の不等式が成り立つ.

$$(t^{1-\alpha-\beta} + 1)(t^{2\alpha} - 1)(t^{2\beta} - 1) \geq 16\alpha\beta(t - 1)^2.$$

Proof of Theorem 3.1.

$$(t^{1-\alpha-\beta} + 1)^2(t^{2\alpha} - 1)(t^{2\beta} - 1) = (t + 1 + t^{\alpha+\beta} + t^{1-\alpha-\beta})^2 - (t^\alpha + t^{1-\alpha} + t^\beta + t^{1-\beta})^2,$$

だから $t = \lambda_i/\lambda_j$ を代入すると次を得る.

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\lambda_i}{\lambda_j} + 1 + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^{\alpha+\beta} + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^{1-\alpha-\beta} \right\}^2 \\ & - \left\{ \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^\alpha + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^{1-\alpha} + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^\beta + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^{1-\beta} \right\}^2 \end{aligned}$$

$$\geq 16\alpha\beta \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} - 1 \right)^2.$$

したがって

$$\begin{aligned} & \{\lambda_i + \lambda_j + f_{\alpha+\beta}(i, j) - f_{\alpha}(i, j) - f_{\beta}(i, j)\} \{\lambda_i + \lambda_j + f_{\alpha+\beta}(i, j) + f_{\alpha}(i, j) + f_{\beta}(i, j)\} \\ &= (\lambda_i + \lambda_j + f_{\alpha+\beta}(i, j))^2 - (f_{\alpha}(i, j) + f_{\beta}(i, j))^2 \\ &\geq 16\alpha\beta(\lambda_i - \lambda_j)^2. \end{aligned} \tag{14}$$

また

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\rho[A, B]] &= \text{Tr}[\rho[A_0, B_0]] \\ &= 2i\text{ImTr}[\rho A_0 B_0] \\ &= 2i\text{Im} \sum_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) a_{ij} b_{ji} \\ &= 2i \sum_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) \text{Im} a_{ij} b_{ji} \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} |\text{Tr}[\rho[A, B]]| &= 2 \left| \sum_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) \text{Im} a_{ij} b_{ji} \right| \\ &\leq 2 \sum_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j| |\text{Im} a_{ij} b_{ji}| \end{aligned}$$

を得る. したがって

$$|\text{Tr}[\rho[A, B]]|^2 \leq 4 \left\{ \sum_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j| |\text{Im} a_{ij} b_{ji}| \right\}^2.$$

(14) と Schwarz の不等式を用いると次を得る.

$$\begin{aligned} \alpha\beta |\text{Tr}[\rho[A, B]]|^2 &\leq 4\alpha\beta \left\{ \sum_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j| |\text{Im} a_{ij} b_{ji}| \right\}^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{i<j} 4\sqrt{\alpha\beta} |\lambda_i - \lambda_j| |\text{Im} a_{ij} b_{ji}| \right\}^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \left\{ \sum_{i<j} 4\sqrt{\alpha\beta} |\lambda_i - \lambda_j| |a_{ij} b_{ji}| \right\}^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \left\{ \sum_{i<j} \{K^2 - L^2\}^{1/2} |a_{ij}| |b_{ji}| \right\}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i<j} (K - L) |a_{ij}|^2 \times \frac{1}{2} \sum_{i<j} (K + L) |b_{ji}|^2, \end{aligned}$$

ただし $K = \lambda_i + \lambda_j + f_{\alpha+\beta}(i, j)$, $L = f_\alpha(i, j) + f_\beta(i, j)$ である. したがって

$$I_{\rho, \alpha, \beta}(A) J_{\rho, \alpha, \beta}(B) \geq \alpha \beta |Tr[\rho[A, B]]|^2$$

を得る. 同様にして

$$I_{\rho, \alpha, \beta}(B) J_{\rho, \alpha, \beta}(A) \geq \alpha \beta |Tr[\rho[A, B]]|^2$$

も得られるので目標の (13) が得られる. $\square$

Remark 3.1 (13) において $\alpha + \beta = 1$ とおくことにより (10) が得られる. したがって Theorem 3.1 は Theorem 2.1 の結果の一般化であることがわかる. したがってこれは Luo [10] のさらなる拡張である.

4 一般化(その2)

この section では Theorem 2.1 の一般化の2つ目として次の不等式を与える. つまり (3) の two-parameter extension (2) である.

Definition 4.1 $\alpha, \beta \geq 0$ と量子状態 ρ と物理量 H に対して一般化された Wigner-Yanase-Dyson skew information (2) を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\rho, \alpha, \beta}(H) &= \frac{1}{2} Tr[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^\beta, H_0])] \\ &= Tr[\rho^{\alpha+\beta} H_0^2] - Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^\beta H_0] \end{aligned}$$

また関連して次の量も定義する.

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\rho, \alpha, \beta}(H) &= \frac{1}{2} Tr[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^\beta, H_0\}] \\ &= Tr[\rho^{\alpha+\beta} H_0^2] + Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^\beta H_0] \end{aligned}$$

ただし $H_0 = H - Tr[\rho H]I$ であり $\{X, Y\} = XY + YX$ は anti-commutator をあらわす. $\alpha + \beta = 1$ のときは $I_{\rho, \alpha}(H) = \tilde{I}_{\rho, \alpha, 1-\alpha}(H)$, $J_{\rho, \alpha}(H) = \tilde{J}_{\rho, \alpha, 1-\alpha}(H)$ であることに注意する. また

$$\tilde{U}_{\rho, \alpha, \beta}(H) = \sqrt{\tilde{I}_{\rho, \alpha, \beta}(H) \tilde{J}_{\rho, \alpha, \beta}(H)}.$$

と定義する.

Theorem 4.1 ρ が invertible のとき, $\alpha, \beta \geq 0$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\tilde{U}_{\rho, \alpha, \beta}(A) \tilde{U}_{\rho, \alpha, \beta}(B) \geq \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2} |Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A, B]]|^2. \quad (15)$$

Theorem 4.1 を証明するのに必要な Lemma を述べよう. 前の section と同様に $h_{ij} = \langle \phi_i | H_0 | \phi_j \rangle$, $a_{ij} = \langle \phi_i | A_0 | \phi_j \rangle$, $b_{ij} = \langle \phi_i | B_0 | \phi_j \rangle$ とおく.

Lemma 4.1

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{\rho, \alpha, \beta}(H) &= \sum_{i < j} (\lambda_i^{\alpha+\beta} + \lambda_j^{\alpha+\beta} - \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta - \lambda_i^\beta \lambda_j^\alpha) |h_{ij}|^2 \\ &= \sum_{i < j} (\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha)(\lambda_i^\beta - \lambda_j^\beta) |h_{ij}|^2.\end{aligned}$$

Lemma 4.2

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{\rho, \alpha, \beta}(H) &\geq \sum_{i < j} (\lambda_i^{\alpha+\beta} + \lambda_j^{\alpha+\beta} + \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta + \lambda_i^\beta \lambda_j^\alpha) |h_{ij}|^2 \\ &= \sum_{i < j} (\lambda_i^\alpha + \lambda_j^\alpha)(\lambda_i^\beta + \lambda_j^\beta) |h_{ij}|^2.\end{aligned}$$

Lemma 4.3 $t > 0, \alpha, \beta \geq 0$ のとき次の不等式が成り立つ.

$$(t^{2\alpha} - 1)(t^{2\beta} - 1) \geq \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} (t^{\alpha+\beta} - 1)^2. \quad (16)$$

Proof of Theorem 4.1. (16) において $t = \lambda_i / \lambda_j$ とおくと

$$\left\{ \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^{2\alpha} - 1 \right\} \left\{ \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^{2\beta} - 1 \right\} \geq \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \left\{ \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^{\alpha+\beta} - 1 \right\}^2.$$

したがって

$$(\lambda_i^{2\alpha} - \lambda_j^{2\alpha})(\lambda_i^{2\beta} - \lambda_j^{2\beta}) \geq \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} (\lambda_i^{\alpha+\beta} - \lambda_j^{\alpha+\beta})^2. \quad (17)$$

また

$$\begin{aligned}Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A, B]] &= Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A_0, B_0]] \\ &= 2i \operatorname{Im} Tr[\rho^{\alpha+\beta} A_0 B_0] \\ &= 2i \operatorname{Im} \sum_{i < j} (\lambda_i^{\alpha+\beta} - \lambda_j^{\alpha+\beta}) a_{ij} b_{ji} \\ &= 2i \sum_{i < j} (\lambda_i^{\alpha+\beta} - \lambda_j^{\alpha+\beta}) \operatorname{Im} a_{ij} b_{ji}\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} |Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A, B]]| &= 2 \left| \sum_{i<j} (\lambda_i^{\alpha+\beta} - \lambda_j^{\alpha+\beta}) \text{Im} a_{ij} b_{ji} \right| \\ &\leq 2 \sum_{i<j} |\lambda_i^{\alpha+\beta} - \lambda_j^{\alpha+\beta}| |\text{Im} a_{ij} b_{ji}| \end{aligned}$$

を得る. したがって

$$|Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A, B]]|^2 \leq 4 \left\{ \sum_{i<j} |\lambda_i^{\alpha+\beta} - \lambda_j^{\alpha+\beta}| |\text{Im} a_{ij} b_{ji}| \right\}^2.$$

(17) と Schwarz の不等式を用いると次を得る.

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} |Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A, B]]|^2 \\ &\leq \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \left\{ \sum_{i<j} |\lambda_i^{\alpha+\beta} - \lambda_j^{\alpha+\beta}| |\text{Im} a_{ij} b_{ji}| \right\}^2 \\ &= \left\{ \sum_{i<j} \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} |\lambda_i^{\alpha+\beta} - \lambda_j^{\alpha+\beta}| |\text{Im} a_{ij} b_{ji}| \right\}^2 \\ &\leq \left\{ \sum_{i<j} |\lambda_i^{2\alpha} - \lambda_j^{2\alpha}|^{1/2} |\lambda_i^{2\beta} - \lambda_j^{2\beta}|^{1/2} |a_{ij} b_{ji}| \right\}^2 \\ &\leq \sum_{i<j} |(\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha)(\lambda_i^\beta - \lambda_j^\beta)| |a_{ij}|^2 \times \sum_{i<j} |(\lambda_i^\alpha + \lambda_j^\alpha)(\lambda_i^\beta + \lambda_j^\beta)| |b_{ji}|^2. \end{aligned}$$

したがって

$$\tilde{I}_{\rho, \alpha, \beta}(A) \tilde{J}_{\rho, \alpha, \beta}(B) \geq \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} |Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A, B]]|^2$$

を得る. 同様にして

$$\tilde{I}_{\rho, \alpha, \beta}(B) \tilde{J}_{\rho, \alpha, \beta}(A) \geq \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} |Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A, B]]|^2$$

も得られるので目標の (15) が得られる. $\square$

Remark 4.1 (15) において $\alpha + \beta = 1$ とおくことにより (10) が得られる. したがって Theorem 4.1 は Theorem 2.1 の結果の一般化であることがわかる. したがってこれは Luo [10] のさらなる拡張である.

Remark 4.2 (10) のさらなる拡張として Gibilisco-Imparato-Isola ([4]), Hansen ([5]) 等によって提案された *metric adjusted skew information* や *metric adjusted correlation measure* を用いて一般化された *uncertainty relation* を導くこともできるが, ここでは紙面の関係で別の機会に述べることにする.

参考文献

- [1] J.C.Bourin, *Some inequalities for norms on matrices and operators*, Linear Algebra and its Applications, vol.292(1999), pp.139-154.
- [2] J.I.Fujii, *A trace inequality arising from quantum information theory*, Linear Algebra and its Applications, vol.400(2005), pp.141-146.
- [3] S.Furuichi, K.Yanagi and K.Kuriyama, *Trace inequalities on a generalized Wigner-Yanase skew information*, J. Math. Anal. Appl., vol.356(2009), pp.179-185.
- [4] P.Gibilisco, D.Imparato and T.Isola, *Uncertainty principle and quantum Fisher information, II*, J. Math. Phys., vol.48(2007), 072109.
- [5] F.Hansen, *Metric adjusted skew information*, Proc. Nat. Acad. Sci., USA., vol.105(2008), pp.9909-9916.
- [6] W.Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt der quantummechanischen Kinetik und Mechanik*, Zeitschrift für Physik, vol.43(1927), pp.172-198.
- [7] H.Kosaki, *Matrix trace inequality related to uncertainty principle*, International Journal of Mathematics, vol.16(2005), pp.629-646.
- [8] D.Li, X.Li, F.Wang, H.Huang, X.Li and L.C.Kwek, *Uncertainty relation of mixed states by means of Wigner-Yanase-Dyson information*, Physical Review A, vol.79(2009), pp.052106-1-4.
- [9] E.H.Lieb, *Convex trace functions and the Wigner-Yanase-Dyson conjecture*, Adv. Math., vol.11(1973), pp.267-288.
- [10] S.Luo, *Heisenberg uncertainty relation for mixed states*, Phys. Rev. A, vol.72(2005), p.042110.
- [11] S.Luo and Q.Zhang, *On skew information*, IEEE Trans. Information Theory, vol.50(2004), pp.1778-1782, and *Correction to "On skew information"*, IEEE Trans. Information Theory, vol.51(2005), p.4432.
- [12] E.P.Wigner and M.M.Yanase, *Information content of distribution*, Proc. Nat. Acad. Sci. U,S,A., vol.49(1963), pp.910-918.

- [13] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, *A generalized skew information and uncertainty relation*, IEEE Trans. Information Theory, vol.51(2005), pp.4401-4404.
- [14] K.Yanagi, *Uncertainty relation on Wigner-Yanase-Dyson skew information*, J. Math. Anal. Appl., vol.365(2010), pp.12-18.
- [15] K.Yanagi, *Uncertainty relation on generalizaed Wigner-Yanase-Dyson skew information*, Linear Algebra and its Applications, vol.433(2010), pp.1524-1532.