

有限モノドロミ一群をもつ一般化された超幾何方程式

都立大・理 佐々井崇雄 (Takao Sasai)

§ 1. 次の様な大久保 type の微分方程式を考える:

$$(\#) \quad (tI - B) \frac{dx}{dt} = Ax,$$

ここで、 $t \in S$ (Riemann 球)、 $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ で

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} -a_1 & & 0 & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & -a_{n-1} & 1 \\ \hline b_1 & \dots & b_{n-1} & -a_n \end{array} \right) \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}),$$

即ち、 A, B 共に $n \times n$ の定数行列である。更に、以下の 2 条件を仮定する。

(A-1) A は n 個の相異なる固有値 $-\rho_1, \dots, -\rho_n$ をもつ。

(A-2) $a_i, a_j - a_k, \rho_l - \rho_m \in \mathbb{Z}$ & $\rho_l \in \mathbb{N}$ 。ただし、 $i, l, m = 1, 2, \dots, n$; $j, k = 1, 2, \dots, n-1$ である。

仮定 (A-2) により、(♯) は対数解を持たない。今、

$$e_j = \exp(-2\pi\sqrt{-1}a_j), \quad f_j = \exp(-2\pi\sqrt{-1}\rho_j)$$

とする。

Lemma 1. (#)は $t=0, 1, \infty$ を確定特異点にもつ Fuchs 型方程式であり、それぞれの点に於ける特性指数は

$$(-a_1, \dots, -a_{n-1}, 0) \quad \text{at } t=0,$$

$$(0, \dots, 0, -a_n) \quad \text{at } t=1,$$

$$(p_1, \dots, p_n) \quad \text{at } t=\infty,$$

である。

Lemma 2 (Riemann-Fuchs の関係式).

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^n p_j \quad \text{従って} \quad \prod_{j=1}^n e_j = \prod_{j=1}^n f_j.$$

次の定理も容易に示される。

Theorem 3.

$$b_j = - \frac{\prod_{k=1}^n (p_k - a_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n-1} (a_k - a_j)} \quad (j=1, 2, \dots, n-1).$$

Remark. (#)に此の b_j を代入して、 $x_1, \dots, x_{n-1}$ を消去し、更に $x = x_n$ とおく。 $\delta = t(d/dt)$ とすると、 x は

$$[\delta(\delta+a_1-1)\cdots(\delta+a_{n-1}-1) - t(\delta+p_1)\cdots(\delta+p_n)]x = 0$$

となる微分方程式をみたし、 $t=0$ での正則な解として

$${}_nF_{n-1}(p_1, \dots, p_n; a_1, \dots, a_{n-1}; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p_1)_k \cdots (p_n)_k}{(a_1)_k \cdots (a_{n-1})_k k!} t^k$$

をもつ。ただし、 $(p)_k$ は 2 項係数である。

又、大久保 type の方程式に対する基本定理は次の様に述べられる。

Theorem 4 (Gauss-大久保の公式). $t=0, 1$ のまわりで、特性指数 $-a_j$ に対応する (#) の解

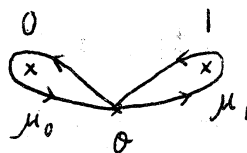
$$\begin{cases} X_j(t) = t^{-a_j} \sum_{m=0}^{\infty} g_j(m) t^m, & j=1, 2, \dots, n-1 \\ X_n(t) = (t-1)^{-a_n} \sum_{m=0}^{\infty} g_n(m) t^m \end{cases}$$

が存在する。ただし、 $g_j(0)$ は、第 j 成分のみ 1 で他は 0 である n -ベクトル。更に $S^* = S \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の単連結領域に於いて、これらの Wronskian は

$$\det X = \det [X_1, \dots, X_n] = \left[\prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1-a_j)}{\Gamma(1-p_j)} \right] t^{-(a_1+\dots+a_{n-1})} (t-1)^{-a_n}.$$

この定理と (A-2) により、 $X_1, \dots, X_n$ の一次独立性が分る。

さて、点 $\theta \in S^*$ を一つ固定し、 θ を基点とする loop μ_0, μ_1 を図の様に取る。従って $\mu_\infty = \mu_1 \cdot \mu_0$ (μ_0 を先に行き、次に μ_1) は、 $t=\infty$ の回りを負の向きに 1 周する loop で



ある。Theorem 4 により、これら μ_0, μ_1 に対応する circuit 行列は、それぞれ M_0, M_1 とすると、

$$M_0 = I + \begin{pmatrix} e_1-1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_{n-1}-1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & e_{n-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c|c} (e_1-1)p_1 \\ \vdots \\ (e_{n-1}-1)p_{n-1} \\ \hline 1 \end{array}$$

$$M_1 = I + (e_n-1) \begin{pmatrix} 0 \\ \hline g_1 \cdots g_{n-1} \quad 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ \hline (e_n-1)g_1 & \cdots & (e_n-1)g_{n-1} & e_n \end{pmatrix}$$

の形をとる事が分る。今、Theorem 4 で述べた基本解 X に関するモノドロミー群を G で表わす。もし G を explicit に、即ち p_j , g_j をキチッと求めれば、それは接続係数を決めた、という事で、この方程式 (generalized hypergeometric equation; 今後 GHGE と略) については大久保[2]によって求められた([4]も参照)。一般の方程式について、接続係数をキチッと計算するのは難しいが([1], [8] 及びその reference 中の文献参照)、 G の群としての構造を知る為には、以下の様な結果で十分であり、又計算する上でも便利である。即ち、各解 X_j を 0 でない定数倍、従って、non-singular な対角行列 D による X の変換 XD を基本解に取り直すと、対応するモノドロミー群は $D^{-1}GD$ となる。これは群を決める際に $n-1$ の自由度を与えてくれるが、GHGE の場合、結果は次の様になる。

Theorem 5 (大久保-高野[3]). (#) のモノドロミー群は、次の式で定まる。

$$\begin{aligned}
 p_j q_j &= - \frac{\prod_{i=1}^n (e_j - f_k)}{e_j(e_j-1)(e_n-1) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n-1} (e_j - e_k)} \\
 &= - \frac{\prod_{i=1}^n \sin(a_j - p_k) \pi}{\sin a_j \pi \sin a_n \pi \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n-1} \sin(a_j - a_k) \pi}.
 \end{aligned}$$

Remark. G は X に関するモノドロミー群と定義したが、今述べた様に、 $2(n-1)$ 個の p_j, q_j がある中で、 $n-1$ 個を任意に指定し、他の $n-1$ 個はこの定理をみたすように取ることによって定まる行列を改めて M_0, M_1 と書き、それによって生成される、元の G と同型な群 $\langle M_0, M_1 \rangle$ を、やはり G と表わすことにする。

§ 2. GHGE の既約性判定条件を述べると、詳しい証明は [5] を見て頂きたい。

Theorem 6. G が既約である為の必要十分条件は、以下の 2 条件が成立することである。

- (1) $e_j \neq f_k$. $(j=1, 2, \dots, n-1; k=1, 2, \dots, n)$
- (2) $f_k \neq 1$.

言い換えれば、 $a_j - p_k, p_k \in \mathbb{Z}$ である。

Remark. 既に (A-2) によって $p_k \in \mathbb{N}$ である。 p_k が負の整数になるのは、2 ページの Remark により、対応する ${}_n F_{n-1}$ が多項式

になる場合である。

§3. 今後、(H)に対する条件 (A-1), (A-2) に加えて、その G は既約である、という仮定の元に話を進める。

今、行列 M_{0j} ($j=1, 2, \dots, n-1$) を

$$M_{0j} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e_j & & & \\ 0 & & & 1 & & \\ \hline & & & & (e_j - 1)p_j & \\ & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & & 1 \end{array} \right) \text{--- } j \text{ 行目}$$

と定義すると、これは *generalized reflection* と呼ばれるものだが、明らかに $M_{0j} \cdot M_{0k} = M_{0k} \cdot M_{0j}$ であり、 $M_0 = M_{01} \cdot \cdots \cdot M_{0,n-1}$ 。

$G = \langle M_0, M_1 \rangle$ であるが、群 $\tilde{G}$ を

$$\tilde{G} = \langle M_{01}, \dots, M_{0,n-1}, M_1 \rangle$$

とすると、 G は当然 $\tilde{G}$ の部分群であり、 G の既約性から $\tilde{G}$ も既約である。又、当然だが、 $n \geq 3$ を仮定する。

以上の設定の元で、次の予想を思い起こそう。

Conjecture (大久保)。もし G が有限群ならば、 $\tilde{G}$ も有限群であろう。

この予想の故に、本稿では $\tilde{G}$ が有限群となる case を決定しよう、というのが今後の目標である。 $\tilde{G}$ が有限であれば、 G は当然有限群であり、従って (H) の解は代数函数から成り、 a_j ,

$p_j \in \mathbb{Q}$ である。更に (A-2) 及び既約性、そして M_0, M_1 に現われるのは e_j, f_j であるから、

$$(*) \quad 0 < a_j, p_j < 1$$

として良い。加えて、 $\tilde{G}$ が有限ならば、それは有限な unitary reflection group でなければならず、よって Shephard-Todd [6] (以後 S-T と略) の分類が使える。分類表の番号 (S-T number) を $((\cdot))$ で書くことにする。

まず仮定の (A-2) より、 $a_1 = \dots = a_{n-1} = \frac{1}{2}$ ではあり得ない。この事から S-T number $((2))$ の内の $G(m, 1, n)$ 、及び $((25))$, $((26))$, $((32))$ のみが可能性を持つ。 $G(m, 1, n)$ では 1 つを除いて、他の $a_j = \frac{1}{2}$ であるから、再び (A-2) により、 $n=3$ に限る。4次元の $((32))$ では、 a_j は $\frac{1}{3}$ 又は $\frac{2}{3}$ に限るから、これも (A-2) によって不可。以上まとめると、 $n=3$ の場合のみ可能で、それは

$$G(m, 1, 3), ((25)), ((26))$$

という事になり、generalized hypergeometric function (以後、GHGF と略) ${}_3F_2$ という、最も重要な class にのみ可能性がある事になった。ただし、以上で $m \geq 3$ 。

さて、ここで又、(H) のモノドロミー群 G について、 G -不変なエルミート行列に関する結果を思い出そう ([2], Chapter III)。

$$h = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & p_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & p_{n-1} \\ \hline q_1 & \cdots & q_{n-1} & 1 \end{array} \right)$$

と、 h を定義する。

Theorem 7. 今、 $H = h^{-1}$ が存在し、しかも H がエルミート行列であれば、 H は G -不変である、即ち $\forall g \in G$ に対し $gHg^* = H$ 。

$\det h = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_j q_j$ であるが、一方、容易に示される様に、

$$\det h = \prod_{j=1}^n \frac{1 - f_j}{1 - e_j}$$

である。従って Theorem 7 は今の場合、以下の様に述べられる。

Theorem 8. $f_j \neq 1$ かつ $p_j q_j = |p_j|^2 = |q_j|^2 \geq 0$ が成立するならば、 $H = h^{-1}$ が存在し、それは G -不変なエルミート行列である。

$\tilde{G}$ が有限な場合に帰ると、その時 G も有限であるから、 H は正定値でなければならず、しかも Theorem 8 より、それは対称行列であり、当然 $\tilde{G}$ -不変でもある。更に既約性の仮定も加えて、 $p_1 q_1, p_2 q_2 > 0$ ($n=3$ 故) が分る。 $n=3$ の時の Theorem 5 を再び書いておこう。

$$p_1 q_1 = - \frac{\sin(a_1 - p_1)\pi \cdot \sin(a_1 - p_2)\pi \cdot \sin(a_1 - p_3)\pi}{\sin a_1 \pi \cdot \sin a_3 \pi \cdot \sin(a_1 - a_2)\pi},$$

$$p_2 q_2 = - \frac{\sin(a_2 - p_1)\pi \cdot \sin(a_2 - p_2)\pi \cdot \sin(a_2 - p_3)\pi}{\sin a_2 \pi \cdot \sin a_3 \pi \cdot \sin(a_2 - a_1)\pi}.$$

今、 $a_1 < a_2$, $p_1 < p_2 < p_3$ として一般性を失わない。(*)より

$0 < a_2 - a_1 < 1$, $-1 < a_j - p_k < 1$ に注意すると、 $p_1 q_1, p_2 q_2 > 0$ より

$$\begin{cases} (a_1 - p_1)(a_1 - p_2)(a_1 - p_3) > 0 \\ (a_2 - p_1)(a_2 - p_2)(a_2 - p_3) < 0 \end{cases}$$

となり、結局、Lemma 2 も合わせて、

$$(**) \quad \begin{cases} p_1 < a_1 < p_2 < a_2 < p_3 \\ p_1 < a_3 < p_3 \end{cases}$$

でなくてはならない。

ここで finite reflection group に関する大事な結果を述べておこう。今、 G を $\mathbb{C}^n$ の non-singular な線型変換から成る群とし、 $\mathbb{C}^n$ 上の多項式 f に対する $g \in G$ の作用を

$$(gf)(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(g^{-1}v) \quad (v \in \mathbb{C}^n)$$

と定める。更に R を G -不変な多項式全体の集合、即ち、

$$R = \{f; gf = f \text{ for } \forall g \in G\}$$

とすると、まず次の良く知られた結果が成り立つ。

Theorem (Chevalley). G を finite reflection group とすると、 R は n 個の代数的に独立な斉次多項式 $f_1, \dots, f_n$ で生成される。更に、 $d_i = \deg f_i$ ($d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$) とすると、 $\{d_1, \dots, d_n\}$ は生成元 f_i の選び方によらず一意的に決まる。

この d_i を G の degree という。S-T[6] では $d_i - 1$ を G の exponent と呼んでいる。この量は重要で、例えば G の位数

$|G| = \prod_{i=1}^n d_i$ となる。さて、 $\zeta \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ を $\zeta^d = 1$ 、即ち 1 の d 根で、従って $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha/d)$ と表わす。この時、

Theorem 9 (Springer [7]). ζ を固有値に持つ G の元 g が存在する為の必要十分な条件は、 d がある degree d_i を割り切る、即ち、 $d | d_i$ である。

次に、可能性をもつ 3 つの場合について、行列の位数に関してどのような性質が成り立たねばならないか、S-T[6] の結果から抜き書きしておこう (S-T の table 参照)。

((25)): M_{01}, M_{02}, M_1 の位数 = 3.

$M_{01} \cdot M_{02}, M_1 \cdot M_{01}, M_1 \cdot M_{02}$ の位数 = 2, 3, 4 または 6.

((26)): M_{01}, M_{02}, M_1 の位数 = 2 または 3.

$M_{01} \cdot M_{02}, M_1 \cdot M_{01}, M_1 \cdot M_{02}$ の位数 = 2, 3, 4 または 6.

$G(m, 1, 3)$: M_{01} の位数 = m , M_{02}, M_1 の位数 = 2 としてよい.

$M_1 \cdot M_{02}$ の位数 = 2 または 3.

今、 $f_j = \exp(-2\pi\sqrt{-1}p_j)$ は $M_\infty = M_1 \cdot M_0$ の固有値である事に注意して、 $p_j = \frac{\alpha}{d}$ (符号の違いを無視してよい事は明らか) の時、 d はどういう値をとるべきか、以上の結果から考えてみる;

((25)): degree は $\{6, 9, 12\}$. 従って、 d として取り得るのは

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12

故に、 $p_j = \frac{\alpha}{36}$ として、 α は少なくとも 3 または 4 を因数に持つ。

《26》: degree は $\{6, 12, 18\}$. 従って $d = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12$ 又は 18 .

$p_j = \frac{\alpha}{36}$ として、 α は少なくとも 2 又は 3 で割り切れる。

$G(m, 1, 3)$ については一般的に言えないが、degree は $\{m, 2m, 3m\}$ で、特に $m=3$ のとき、

$G(3, 1, 3)$: degree は $\{3, 6, 9\}$. $d = 1, 2, 3, 6, 9$. $p_j = \frac{\alpha}{18}$ として、 α は 2 又は 3 で割り切れる。

(*)、(**) 及び以上の結果から、複素共役を除いた全ての場合を調べると、 $\tilde{G}$ が《25》の群となるには、

$$(a_1, a_2, a_3; p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}\right)$$

$$\left(\quad \quad \quad ; \frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\left(\quad \quad \quad ; \frac{1}{12}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\left(\quad \quad \quad ; \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

の4通りに限って、可能性のあることが分る。又、《26》及び $G(3, 1, 3)$ については計50通りの case について可能性がある。

そこで、それぞれの場合について、 a_j, p_j の値を P.8 で述べた $p_1 g_1, p_2 g_2$ の右辺に代入し、更に p_1, p_2, g_1, g_2 の内、2ヶは任意に指定してよかったので、 $g_1 = g_2 = 1$ とする。こうしておいて、P.10 で述べた行列の位数に関する条件、特に2つの生成元の積に関する条件が満たされるかどうか、を全てチェックする。この作業を人間の手でやるうとすれば、仮に根気

が続いたとしても軽く1年ほかゝると思われる。幸いな事に、いじり始めて1ヶ月半程度だった数式処理システム Macsyma のお蔭で、慣れてくると7、8分程度で1つの case をチェックできた。

結論を述べると、

((25)) ; $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})$ のみ可。このとき、

$$M_{01}^3 = M_{02}^3 = M_1^3 = I$$

$$M_0^3 = (M_{01} \cdot M_{02})^3 = I, (M_1 \cdot M_{01})^6 = (M_1 \cdot M_{02})^4 = I.$$

((26)) ; $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; \frac{1}{18}, \frac{7}{18}, \frac{13}{18})$ は

$$M_{01}^3 = M_{02}^2 = M_1^3 = I$$

$$M_0^6 = I, (M_1 \cdot M_{01})^6 = (M_1 \cdot M_{02})^6 = I.$$

もう一つの可能性をもつ $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6})$ は

$$M_{01}^2 = M_{02}^3 = M_1^3 = I,$$

$$M_0^6 = (M_1 \cdot M_{01})^6 = (M_1 \cdot M_{02})^4 = I$$

((G(3,1,3))) ; $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})$ のみ可。

$$M_{01}^3 = M_{02}^2 = M_1^2 = I$$

$$M_0^6 = (M_1 \cdot M_{01})^6 = (M_1 \cdot M_{02})^3 = I$$

この最後の case については、ある変換を施すことで、その生成元の形を見て $G(3,1,3)$ と判別されるもので、 a_j, p_j を見ているだけでは、((26))か $G(3,1,3)$ かの判別はできない。最初

の case について、それが ((25)) であると判断するにはどうするか述べる。まず、

$$M_{01} = \begin{pmatrix} \omega & 0 & \frac{\omega-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{02} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & \frac{\omega^2-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega-1 & \omega-1 & \omega \end{pmatrix}$$

である。ここで、 $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$ である。今、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を取ると

$$T^{-1}M_{01}T = \begin{pmatrix} \omega & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, T^{-1}M_{02}T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \omega^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}M_1T = -\frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

となる。これは確かにユタリ-行列であるが、更に $S-T$ に於いて ((25)) の典型的な生成元として述べられているものとほぼ一致し ($S-T$ の p.296)、同じ群を与える事は一目で分る。他の case についても同様であり、結局、それぞれの case が、先に述べた unitary reflection group に同型となる事、又、同型となるのはそれらの case に限る事が分る (以上の決め方から)。これで ((25)), ((26)), $G(3,1,3)$ となる場合について、 $\tilde{G}$ に関して完全に分ったのだが、その部分群 G はどうなるか見ると;
 $\tilde{G} \cong ((25))$ のとき、 G は位数 81 の部分群。詳しくは、

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}; * = 1, \omega, \omega^2 \right\}, |\mathcal{G}| = 27$$

として、 $G \cong \mathcal{G} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ となる。

$\tilde{G} = \langle (26) \rangle$, $G(3, 1, 3)$ の場合は、何れの case も $\langle M_0 = M_{01} \cdot M_{02} \rangle = \langle M_{01}, M_{02} \rangle$ となるので、 $G = \tilde{G}$ が分る。又、これらについて、その解のリーマン面の genus も容易に求まる。以上から、

Theorem A. G, H, G, E の有限モノドロミー群 G で $\tilde{G}$ も同時に有限群となるのは、 $\tilde{G} = \langle (25) \rangle, \langle (26) \rangle, G(m, 1, 3) (m \geq 3)$ に限る。特に、 $\tilde{G} = \langle (25) \rangle, \langle (26) \rangle, G(3, 1, 3)$ となるのは、条件(*) (p. 7) の元で、以下の4つの case であり、又、その4つに限る。

(I) $(a_1, a_2, a_3; p_1, p_2, p_3) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})$ 及び、複素共役 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9})$ で $\tilde{G} = \langle (25) \rangle$, Riemann 面の genus = 7

(II) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; \frac{1}{18}, \frac{7}{18}, \frac{13}{18})$ 及び $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \frac{5}{18}, \frac{11}{18}, \frac{17}{18})$ で $G = \tilde{G} = \langle (26) \rangle$, genus = 17^2

(III) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6})$ 及び $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{11}{12})$ で $G = \tilde{G} = \langle (26) \rangle$, genus = 17^2

(IV) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})$ 及び $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9})$ で $G = \tilde{G} = G(3, 1, 3)$, genus = 19.

モノドロミー群の成分は全て e_j, f_j で表わされる (p. 4 及び Theorem 5)。従って、 $(a_1, a_2, a_3; p_1, p_2, p_3)$ に関する G と、任

意の整数 l, m, n, p, q を取って $(a_1+p, a_2+q, a_3-l-m-n-p-q; p+l, p_2+m, p_3+n)$ の時のモノドロミ一群とは一致する。この事と、p.2 で述べた Remark、及び、 G が有限群であれば解は代数函数である、という事から；

Theorem B. 以下の G.H.G.F. は代数函数である：

- (I) ${}_3F_2(l \pm \frac{1}{9}, m \pm \frac{4}{9}, n \pm \frac{7}{9}; p \pm \frac{1}{3}, q \pm \frac{2}{3}; t)$
 (II) ${}_3F_2(l \pm \frac{1}{18}, m \pm \frac{7}{18}, n \pm \frac{13}{18}; p \pm \frac{1}{3}, q \pm \frac{1}{2}; t)$
 (III) ${}_3F_2(l \pm \frac{1}{12}, m \pm \frac{7}{12}, n \pm \frac{5}{6}; p \pm \frac{1}{2}, q \pm \frac{2}{3}; t)$
 (IV) ${}_3F_2(l \pm \frac{1}{9}, m \pm \frac{4}{9}, n \pm \frac{7}{9}; p \pm \frac{1}{3}, q \pm \frac{1}{2}; t)$
 ここで、 $l, m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ 。

§4. 残る case は $\tilde{G}$ が $G(m, 1, 3)$ で $m \geq 4$ の場合である。得られた結果を述べると；

Theorem C. n は $(m, n) = 1, 1 \leq n < m$ をみたす任意の整数とする。ならば、 $(a_1, a_2, a_3; p_1, p_2, p_3) = (\frac{n}{m}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{n}{3m}, \frac{m+n}{3m}, \frac{2m+n}{3m})$ に対応するモノドロミ一群は全て有限群である。更に、

(i) m が奇数 のときは、 $G = \tilde{G} = G(m, 1, 3)$ で、対応する G.H.G.E. の解の Riemann 面の genus $= \frac{(m-1)(3m^2-2m-2)}{2}$ である。

(ii) m が偶数 のときは、 $\tilde{G} = G(m, 1, 3)$ であるが、

$$G \cong \left\langle G\left(\frac{m}{2}, 1, 3\right), \begin{pmatrix} \zeta_m & 0 \\ 0 & \zeta_m \\ 0 & \zeta_m \end{pmatrix} \right\rangle, \zeta_m = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}\right)$$

となり、従って Riemann 面の $\text{genus} = \frac{1}{8}(m-2)(3m^2-2m-4)$ となる。

Theorem B と同様にして：

Theorem D. 3 より大きい任意の自然数 m と、 $(m, n)=1$, $1 \leq n < m$ をみたす任意の自然数 n に対し、

$${}_3F_2\left(\lambda \pm \frac{n}{3m}, \mu \pm \frac{m+n}{3m}, \nu \pm \frac{2m+n}{3m}; \rho \pm \frac{n}{m}, \xi \pm \frac{1}{2}; t\right)$$

は代数函数である。ただし、 $\lambda, \mu, \nu, \rho, \xi \in \mathbb{Z}$ 。

Remark. Theorem B の (IV) は、この定理で $m=3$, $n=1$ としたもので、結局、Theorem C, D は $\tilde{G}$ が非原始群 $G(m, 1, 3)$ ($m \geq 3$) となる case について述べている。即ち、 $m > 3$ の条件は $m \geq 3$ としてよい。前節の結果とどう違うかと言うと、§3 では $\tilde{G}$ が ((25)), ((26)) 及び $G(3, 1, 3)$ となる case を全て決定しているのに対し、Th. C, D は、それが $\hat{G} = G(m, 1, 3)$ ($m \geq 4$) となる全ての case かどうか不明な点である。勿論、 m が小さければ、これで全てつくされるのは明らかだが。

文献

- [1] 河野寛彦; Funkcial. Ekvac., 28 (1985), 249-266.
- [2] 大久保謙二郎; On the group of Fuchsian equations, 都立大学数学教室セミナー報告, 1987.

- [3] 大久保-高野恭一; Generalized hypergeometric functions (preprint).
- [4] 大久保-高野-吉田節治; Funkcial. Ekvac., 31(1988) 483-
- [5] 佐々井; G.H.G.F. with finite monodromy groups (準備中).
- [6] Shephard-Todd; Canad. J. Math. 6 (1954) 274-304
- [7] Springer; Inv. Math., ~~(1974)~~ 25(1974) 159-198.
- [8] H. Yokoyama; Hiroshima Math. J., 18(1988), 309-339.