

パワースペクトラムと Walsh-スペクトラム の比較。

大分大. 工学部 永井 武昭

[I]. 序. 時系列 $\{X(t), t=0, 1, 2, \dots, N-1\}$, $N=2^m$ に対して, Walsh-関数系 $\{W(t, \omega), 0 \leq \omega \leq 1\}$ $t=0, 1, 2, \dots$ を核とするスペクトル解析を行う。時系列 $\{X(t), t=0, 1, \dots, N-1\}$ の中の系列番号 ω の Walsh 成分, すなわち $W(t, \omega)$ -成分の強さを表す Walsh-スペクトラム $g(\omega)$ は時系列が Dyadic 定常であるとき, その Walsh スペクトル表現 $X(t) = \int_0^1 W(t, \omega) dZ(\omega)$ を用いて, ごく自然な形で

$$g(\omega) d\omega = E\{dZ(\omega)^2\}$$

によって定義される。(Nagai (1976), Morettin (1974)).

この Walsh-スペクトラム $g(\omega)$ の推定問題は定常過程のパワースペクトラム $f(\lambda)$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ の推定問題と全く同じ手法を用いて行われる。すなわち, 時系列データの有限 Walsh-変換から構成した Walsh-ピリオドグラム $I(\omega)$ を平滑化した推定量, また標本 Dyadic 自己相関関数を用いた打切

り推定量, さら, 有限次の Dyadic 自己回帰 (DAR) モデルを当てはめ, Parametric な Walsh-スペクトラムの推定量等が考えられる。これらの推定量の計算方法, 統計的な性質, 平滑化の効果, DAR モデルを当てはめによる Walsh-スペクトラム推定値の計算アルゴリズム等について考察を行った。特に興味のある場合として, パワー-スペクトラム $f(\lambda)$ をもつ定常時系列 $\{X(t), t=0, 1, 2, \dots, T\}$ に対し, その Walsh-スペクトラム $g(\omega)$ の定義とその推定問題, そして $g(\omega)$ の信頼区間の構成等がある。これらの考察と共に, $f(\lambda)$ と $g(\omega)$ との向の =, $\equiv$ の特徴的な関係について言及を行う。

[II]. Walsh-スペクトラム. (W-スペクトラム).

平均がゼロで, 有限な分散をもつ時系列 $\{X(t), t=0, 1, 2, \dots, T\}$ を考察する。その自己共分散を $R(t, \lambda) = E\{X(t)X(\lambda)\}$ とする。実数 t, λ に対し, その = 進加法を $t \oplus \lambda$ で表す。

特に, すべての整数 $\tau \geq 0$ に対して $R(t, \lambda) = R(t \oplus \tau, \lambda \oplus \tau)$ のとき $\{X(t), t=0, 1, 2, \dots, T\}$ を Dyadic 定常 (D-定常) であると言う。このとき $R(t, \lambda)$ は $t \oplus \lambda$ のみの関数であるので $R(t, \lambda) = R(t \oplus \lambda)$ と表すことにする。ここで考察する D-定常系列は常に $R(\tau) = \int_0^1 W(\tau, \omega) g(\omega) d\omega$ の形のスペクトル表現が可能であると仮定する。ここに

$\{W(t, \omega), 0 \leq \omega \leq 1\} \quad t=0, 1, 2, \dots$ は Walsh 関数系で ± 1 のみの値をとり, $L_2(0, 1)$ 上の完備直交系であり, また $W(t, \omega) \cdot W(s, \omega) = W(t \oplus s, \omega)$, a.e が成立する。 $g(\omega), 0 \leq \omega \leq 1$ は非負関数で, 系列 $\{X(t), t=0, 1, 2, \dots\}$ の W -スペクトラ γ である。特に白雑音系列 $\{\varepsilon(t), t=0, 1, 2, \dots\}$, $E\{\varepsilon(t)\} = 0$, $\text{Var}(\varepsilon(t)) = \sigma^2$, は $\mathcal{D}$ 定常であり, その W スペクトラ γ は $g(\omega) = \sigma^2, 0 \leq \omega \leq 1$ である。また, 系列 $\{X(t), t=0, 1, 2, \dots\}$ が

$$X(t) = \sum_{l=1}^p a(l) X(t \oplus l) + \varepsilon(t), \quad a(p) \neq 0,$$

を満足するとき, $X(t)$ を p -次の Dyadic 自己回帰 (DAR) 系列であると言う。DAR-系列は常に $\mathcal{D}$ 定常であり,

$$\varphi(\omega) = 1 - \sum_{l=1}^p a(l) W(l, \omega) \neq 0, \text{ a.e.}$$

であれば, その W スペクトラ γ は

$$g(\omega) = \sigma^2 / [\varphi(\omega)]^2$$

である。また, この $X(t)$ -系列は

$$X(t) = \sum_{j=0}^{M-1} b(j) \varepsilon(t \oplus j)$$

と表すことも出来る。ここに, $M=2^T$, $2^{T-1} \leq p \leq M-1$ である。

時系列 $\{X(t), t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ が定常で, パワースペクトラ (P スペクトラ) $f(\lambda), -\pi \leq \lambda \leq \pi$ を持つものとする。すなわち, 自己共分散関数が次のスペクトル表現:

$$\rho(\tau) = \text{cov}(X(t), X(t+\tau)) = \int_0^\pi \cos \tau \lambda f^*(\lambda) d\lambda$$

をもつとする。ここに $f^*(\lambda) = 2f(\lambda)$ 。

このとき,

$$A_r(\lambda, \omega) = \sum_{t=0}^{r-1} W(t, \omega) \cos t\lambda,$$

$$B_r(\lambda, \omega) = \sum_{t=0}^{r-1} W(t, \omega) \sin t\lambda$$

と12,

$$g(\omega) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^\pi [A_r^2(\lambda, \omega) + B_r^2(\lambda, \omega)] f^*(\lambda) d\lambda \quad \dots (2, 1)$$

が存在するとし、 $g(\omega)$ を定常時系列 $\{X(t), t=0, 1, 2, \dots\}$ の Walsh-スเปクトラムと定義する。

定常時系列データ $\{X(t), t=0, 1, 2, \dots, N-1\}$, $N=2^m$ を用い2, 上の Wスเปクトラム $g(\omega)$ を推定するのであるが、これは定常系列において上の Wスเปクトラムを推定する方法をそのまま援用すればよい。また、上の推定量の統計的な性質も殆んど定常系列の場合と変わらない。これらの点について2は次節で具体的に考察を行う。

[III] W. スペクトラムの推定. $\{X(t), t=0, 1, 2, \dots$

$N-1\}$, $N=2^m$ を観測された時系列データとする。いま、系列数区間 $[0, 1]$ を N 分割し、その分割中点を

$$\omega_j = (j + \frac{1}{2})/N, \quad j=0, 1, 2, \dots, N-1,$$

とする。最初の N 個の Walsh 関数 $W(t, \omega)$, $t=0, 1, 2, \dots, N-1$

の系列数 ω_j , $j=0, 1, 2, \dots, N-1$ の値をとる $N \times N$ 行列を H_N と表す。すなわち、

$$H_N = \begin{Bmatrix} W(0, \omega_0), & W(0, \omega_1), & \dots & W(0, \omega_{N-1}) \\ W(1, \omega_0), & W(1, \omega_1), & \dots & W(1, \omega_{N-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W(N-1, \omega_0), & W(N-1, \omega_1), & \dots & W(N-1, \omega_{N-1}) \end{Bmatrix}$$

とする。これは N 次の Hadamard 行列である。

まず最初に時系列データ $\{X(t), t=0, 1, 2, \dots, N-1\}$ の有限 Walsh 変換 (Hadamard 変換):

$$D(j) = \sum_{t=0}^{N-1} X(t) W(t, \omega_j), \quad j=0, 1, \dots, N-1$$

を計算する。これを用いて Walsh-ピリオドグラムを

$$I(j) = [D(j)]^2 / N, \quad j=0, 1, \dots, N-1$$

で定義する。

Walsh 変換が Grenander 条件 (E. J. Hannan (1970), p. 215) を満足する $\overbrace{\{D(j), j=0, 1, 2, \dots, N-1\}}^{\text{定常系列} a \text{ と }} の漸近正規性が成立する。また、 D 定常 a とともに適当な条件のもとで、 $\{D(j), j=0, 1, \dots, N-1\}$ は $N \rightarrow \infty$ のとき、漸近的に独立で、平均値がゼロで分散が $Ng(\omega_j)$ の正規分布に近づく。従って、このとき $\{I(j)/g(\omega_j), j=0, 1, 2, \dots, N-1\}$ は互に独立で、自由度 1 の χ^2 分布に漸近的に従う。従って、十分大きい N にたいして、$

$$E\{I(j)\} \doteq g(\omega_j),$$

$$\text{Var}(I(j)) \doteq 2g(\omega_j)^2$$

が成立する。この事から Walsh エリ奥特グラフ $I(j)$ は W スペクトラム $g(\omega_j)$ の漸近的に不偏な推定量ではあるが、一
致性をもたない事が解る。

次に、D スペクトラム $f(\lambda)$ をもつ通常の時系列 $\{X(t), t=0, 1, 2, \dots\}$ について考察する。 N が十分大きい時には、有限 Walsh 変換 $\{D(j), j=0, 1, 2, \dots, N-1\}$ は漸近的に平均値がゼロで、分散共分散行列 $\Sigma = N \{V(j, k)\}$ をもつ、 N -変量正規分布に従う。ただし、

$$V(j, k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^\pi [A_N(\lambda, \omega_j) A_N(\lambda, \omega_k) + B_N(\lambda, \omega_j) B_N(\lambda, \omega_k)] f^*(\lambda) d\lambda$$

$$V(j, j) = g(\omega_j)$$

である。ここに $g(\omega)$ は (2, 1) 式で定義された通常の時系列の W スペクトラムである。したがって、十分大きい N について

$$E\{I(j)\} \doteq g(\omega_j)$$

$$\text{Var}(I(j)) \doteq 2g^2(\omega_j)$$

となり、W スペクトラム $g(\omega)$ の推定量として $I(j)$ は漸
的に不偏ではあるが、再び、一貫性をもたない事が解る。

したがって、一貫性のある推定量を得るためには平滑化手法が要求されるのである。Dスペクトラムの推定問題と同様にして、平滑化ピリオドグラム

$$\hat{g}_p(\omega_j) = \sum_{l=0}^M v(l) I(j \oplus l)$$

を考へる。ここで、 $\{v(l), l=0, 1, \dots, M\}$ は $v(l) \geq 0, \sum_{l=0}^M v(l) = 1$ であるスペクトルライン中心にある。D-スペクトラム $f(\omega)$ が十分滑らかであるならば、それに対応する W スペクトラム $g(\omega)$ も滑らかであり、また、FWT $D(j)$ の相関 $V(j, k)$ も無視できるため、

$$E\{\hat{g}_p(\omega_j)\} \approx g(\omega_j),$$

$$\text{Var}\{\hat{g}_p(\omega_j)\} \approx 2\left(\sum_{l=0}^M v(l)^2\right) \cdot g(\omega_j)^2$$

となり、 $N \rightarrow \infty$ とともに、 $\sum_{l=0}^M v(l)^2 \rightarrow 0$ となるように $v(l), l=0, 1, \dots, M$ を選べば、W スペクトラム $g(\omega)$ の推定量 $\hat{g}_p(\omega)$ の一貫性が得られる。

平滑化ピリオドグラム $\hat{g}_p(\omega)$ は、また別の表現として、

$$\hat{g}_p(\omega) = \sum_{l=0}^{N-1} \lambda(l) C(l) W(l, \omega)$$

の形で書くことができる。ここに

$$C(l) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x(t)x(t \oplus l)$$

はラゲル l の標本 Dyadic 自己共分散であり、 $\{\lambda(l) \}_{l=0}^{N-1}$ は

$$\lambda(l) = \sum_{j=0}^M v(j) w(j, \omega_l)$$

で決定されるラグ。ウィンドウである。特に $\lambda(l) \equiv 1$, $l = 0, 1, \dots, N-1$, α とせば $\hat{g}_s(j) \equiv \hat{g}_s(\omega_j) = I(j)$ となる。

分散安定化のため、対数変換：

$$y_s(j) \equiv \ln(\hat{g}_s(\omega_j)), \quad j=0, 1, 2, \dots, N-1$$

を行えば、

$$E\{y_s(j)\} \approx \ln(g(\omega_j)),$$

$$\text{Var}\{y_s(j)\} \approx 2 \sum_{l=0}^M v(l)^2$$

となることから、対数 W スペクトラ $\ln(g(\omega_j))$ の $100\alpha\%$ 信頼区間として、

$$[y_s(j) - k \sqrt{2 \sum_{l=0}^M v(l)^2}, \quad y_s(j) + k \sqrt{2 \sum_{l=0}^M v(l)^2}]$$

を採用できることが解る。ただし、 $k \approx (1-\alpha)^{-1/2}$ である。

[IV] W スペクトラ α の Parametric 推定。 時系列

データ $\{X(t), t=0, 1, \dots, N-1\}$ に p -次の DAR-モデル

$$X(t) = \sum_{l=1}^p a(l) X(t \oplus l) + \varepsilon(t) \quad \dots (4, 1)$$

を当てはめる。 $\{\varepsilon(t), t=0, 1, 2, \dots\}$ は残差項で、その分散

を σ^2 とする。もし、関数 $\varphi(\omega) = 1 - \sum_{l=1}^p a(l) w(l, \omega)$ が、

ゼロでなければ、 $X(t)$ は $M-1$ 次の Dyadic MA モデルとして、

$$X(t) = \sum_{j=0}^{M-1} b(j) \varepsilon(t \oplus j),$$

と書くことができる。(Nagai (1980)), ただし、 $M=2^r$,

$2^{p-1} \leq p \leq 2^r - 1 = M - 1$ である。

DMA 係数 $\{b(l), l=0, 1, 2, \dots, M-1\}$ は次の関係式:

$$\begin{Bmatrix} b(0) \\ b(1) \\ \vdots \\ b(M-1) \end{Bmatrix} = \frac{1}{M} H_M \begin{pmatrix} \varphi(\omega_0)^T \\ \varphi(\omega_1)^T \\ \vdots \\ \varphi(\omega_{M-1})^T \end{pmatrix}, \quad \dots (4, 2)$$

により、2 決定できる。この DAR モデルに対応する W スペクトラムは

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \sigma^2 / [\varphi(\omega)]^2 \\ &= \sigma^2 \left[\sum_{j=0}^{M-1} b(j) w(j, \omega) \right]^2 \end{aligned}$$

である。したがって、時系列データ $\{x(k), k=0, 1, \dots, N-1\}$ から、残差項の分散 σ^2 、および DAR 係数 $\{a(l)\}_{l=0}^p$ あるいは、DMA 係数 $\{b(j)\}_{j=0}^{M-1}$ を推定することによって、それらを用いて W スペクトラムの推定値

$$\begin{aligned} \hat{g}_d(\omega) &= \hat{\sigma}^2 / \left[1 - \sum_{l=1}^p \hat{a}(l) w(l, \omega) \right]^2 \\ &= \hat{\sigma}^2 \left[\sum_{j=0}^{M-1} \hat{b}(j) w(j, \omega) \right]^2 \end{aligned}$$

を計算することによって、ここに $\hat{\sigma}^2, \hat{a}(l), \hat{b}(j)$ はそれぞれ $\sigma^2, a(l), b(j)$ の推定値である。

そこで、(4, 1) 式の両辺に $x(k \oplus k)$ を掛け、期待値をとれば、DAR 係数 $\{a(l)\}_{l=0}^p$ と DMA 係数 $\{b(j)\}_{j=0}^{M-1}$ および、分散 σ^2 の決定方程式:

$$R(k) = \sigma^2 b(k) + \sum_{l=1}^p a(l) R(l \oplus k), \quad k=0, 1, \dots, p \quad (4, 3)$$
 が得られる。もし、右辺の第一項が無ければ、ARモデルにおける Yule-Walker の方程式と同等であるが、一般に $b(k) \neq 0$ であり、 $b(k)$ はまた、DAR係数 $\{a(l)\}_{l=1}^p$ の非線形関数であるので、式 (4, 3) は直接解く事ができない。さて、標本 Dyadic 自己共分散 $C(l)$ を用いて DAR係数 $\{a(l)\}_{l=1}^p$ 、DMA係数 $\{b(j)\}_{j=0}^{M-1}$ および分散 σ^2 を推定する方法を考へる。(4, 3)式の中の $R(l)$ を $C(l)$ でおき代えたと、

$$C(k) = \sigma^2 b(k) + \sum_{l=1}^p a(l) C(l \oplus k), \quad k=0, 1, \dots, p \quad (4, 4)$$

となる。

まず最初に、(4, 4)式において、 $b(k) = 0, k=0, 1, \dots, p$ とおくことにより、すなわち、(4, 4)式を

$$C(k) = \sum_{l=1}^p a(l) C(l \oplus k), \quad k=1, 2, \dots, p$$

とし、これから DAR係数の初期推定値 $\{\hat{a}_0(l), l=1, 2, \dots, p\}$ を求める。次に、関係式 (4, 2) より DMA係数 $\{\hat{b}_1(j), j=0, 1, \dots, M-1\}$ を計算する。残差項の分散 σ^2 の推定値は

$$\hat{\sigma}^2 = [C(0) - \sum_{l=1}^p \hat{a}_0(l) C(l)] / \hat{b}_1(0)$$

により得られる。更に、これをを用いて、

$$C^*(k) = C(k) - \hat{\sigma}^2 \cdot \hat{b}_1(k), \quad k=1, 2, \dots, p,$$

と $C(k)$ を修正することにより、(4, 4)式の近似として

修正した Yule-Walker 方程式

$$\sum_{l=1}^p a(l) C(l \oplus k) = C^*(k), \quad k=1, 2, \dots, p$$

を考へる。これを解くことにより、修正した DAR 係数の推定値 $\{\hat{a}(l), l=1, 2, \dots, p\}$ が得られる。

以下、同様の計算を反復実行し、DAR 係数の推定値 $\{\hat{a}(l), l=1, 2, \dots, p\}$ 、DMA 係数の推定値 $\{\hat{b}(j), j=0, 1, \dots, M-1\}$ 、および $\hat{\sigma}^2$ を求めることができる。

これらを用いて、時系列 $\{X(t), t=0, 1, 2, \dots, N-1\}$ の DAR モデル当てはめを行うことにより、得られた W スペクトラム $g(\omega)$ の Parametric 推定値

$$\begin{aligned} \hat{g}_d(\omega) &= \hat{\sigma}^2 \left[\hat{b}(0) + \sum_{j=1}^{M-1} \hat{b}(j) W(j, \omega) \right]^2 \\ &= \hat{\sigma}^2 / \left[1 - \sum_{l=1}^p \hat{a}(l) W(l, \omega) \right]^2 \end{aligned}$$

を計算することができる。当てはめの次数決定として $\hat{\sigma}^2$ を用いて、Aic 基準、

$$Aic(p) = N \log(\hat{\sigma}^2) + 2p$$

を最小にする p を採用すればよい。

[V]. まとめ。定常時系列に対する W スペクトラムの解析についての考察を行った。それは、W スペクトラムの推定問題と W スペクトラムの推定問題は全く平行的であること

と、すなわちピリオドグラム、自己共分散を、Wピリオドグラム、Dyadic 自己共分散で、また昇階加法を=進加法でおき代えればよいという事が解った。スペクトラム推定の対数変換や信頼区間の構成等も、ほぼ同様である。

しかし、WスペクトラムをDARモデル当てはめを行うことにより、推定する時は、Yule-Walker 方程式に対応する方程式が、未知パラメータの非線形方程式となるため、大変複雑な反復計算を必要とする。また、次数の異なるDARモデルの係数を推定するとき、Durbinの反復式が適用できない為、この都度、逆行列の計算が行われる。従って、定常系列にARモデルの当てはめで得られる利点は、DARモデル当てはめにおいて得られない。

定常過程においてはそのPスペクトル $f(\lambda)$ とWスペクトル $g(\omega)$ との形状はかなり類似している。しかし、Pスペクトラム $f(\lambda)$ は単峰であるにも拘らず、Wスペクトラム $g(\omega)$ は双峰となる例があるように、WスペクトラムにはPスペクトラムと異った特徴が現れることもあり、 $f(\lambda)$ と $g(\omega)$ との関係については今後、更に詳しい検討が必要と考えられる。

- (1) Hannan, E. J. (1970): Multiple Time Series.
J. Wiley
- (2) Harmuth, H. (1972): Transmission of Information
by orthogonal functions,
Berlin, Springer-V.
- (3) Moretten, P. A. (1973): Stochastic dyadic Sys-
tems, Symp. Appl. Walsh. functions
290-293. Washington, D.C.
- (4) " (1976): Estimation of the
Walsh spectrum.
IEEE. Trans. on Information Theory
106-107
- (5) Nagai, T. (1976): Dyadic stationary processes
and their spectral representations,
Bull. Math. Statist. 19, 65-73
- (6) " (1976): On finite Walsh Transforms
of a dyadic stationary time series.
大分大学工学部 研究報告 63-66.
- (7) " (1980): On finite parametric
linear models of dyadic stationary

processes.

Bull. Math. Statist. 20, 45-53.