

級数の総和法について

東北大理 渡利千波

§ 0. 序

級数の行動とは、その級数の部分和の作る数列の行動であるから、級数の総和法は数列の変換に他ならない。数列が自然に線型空間をなすことから、総和法を興える変換でも一次変換が圧倒的に重要である。興えられた数列を、新しいパラメータに依存する対象（数列または函数）に一次変換して、もとの数列の行動と新しい対象の行動との関係をしらべ、

1) 発散級数（の一部）に、収束級数にせよと取扱いを可能にする。

2) 収束級数の取扱いに、平坦な迂回路を提供する。

この総和法の理論であるといえようが、ここではその一般論の初等的な部分を紹介する。

つぎの2つは用知である：

例 1 (Cauchy) $\sigma_n = (s_0 + s_1 + \cdots + s_n) / (n+1)$

とあくと、 $s_n \rightarrow s \implies \sigma_n \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty)$

例 2 (Abel) $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \quad (0 \leq r < 1)$

と書くとき, $s_n = \sum_{k=0}^n a_k \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow f(r) \rightarrow s \quad (r \uparrow 1)$.

前者は sequence-to-sequence transformation の例であり, 後者は sequence-to-function transformation の例である. ($s_n \rightarrow s$ であることがわかれば,)

$s_n \rightarrow s$ が成立すれば「 $\{s_n\}$ は s に $(C, 1)$ 総和可能である」といい, $s_n \rightarrow s \quad (C, 1)$ と書く.

同様に, $f(r) \rightarrow s \quad (r \uparrow 1)$ が成立すれば「 $\{s_n\}$ (あるいは $\sum a_n$) は s に A 総和可能である」といい,

$s_n \rightarrow s \quad (A), \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \quad (A)$ と書く.

sequence-to-function transformation も適当な解釈のもとに sequence-to-sequence transformation に帰着できるから, 以下に同じように sequence-to-sequence transformation を考える.

§ 1 正則性.

$T = (c_{mn})$ を一つの総和法とし, 数列 $\{s_n\}$ の T による変換 (の結果) を $\{t_m\}$ とする. G. H. Hardy [1] に従って, つぎのような記号を用いる.

$$\mathcal{L}_c \equiv \{ T : \{s_n\} \text{ conv.} \Rightarrow \{t_m\} \text{ conv.} \}$$

$$\mathcal{L}_r \equiv \{ T : s_n \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow t_m \rightarrow s \quad (m \rightarrow \infty) \}$$

$$\mathcal{I}_c^* \equiv \{T: \{s_n\} \text{ bounded} \Rightarrow \{t_m\} \text{ conv.}\}$$

$\mathcal{I}_r$, $\mathcal{I}_c^*$ はいずれも $\mathcal{I}_c$ の subclass であるが, 定理 2, 定理 3 より, 両者は互いに素である.

以上の三つの族は完全に characterize されている. すなわち

定理 1. $T \in \mathcal{I}_c$ のためには, つぎの (i), (ii), (iii) が成り立つこと, 必要かつ十分である.

$$(i) \exists H \quad \forall m \quad \sum_n |c_{mn}| \leq H$$

$$(ii) \forall n \quad \exists \lim_m c_{mn} (= \delta_n \text{ とおく})$$

$$(iii) \exists \lim_m \sum_n c_{mn} (= \delta \text{ とおく}).$$

$$\text{よって, } \sum_n |\delta_n| \leq H \quad \text{で,}$$

$$s_n \rightarrow s \Rightarrow t_m \rightarrow t = \delta s + \sum_n \delta_n (s_n - s) = s(\delta - \sum_n \delta_n) + \sum_n \delta_n s_n$$

定理 2. $T \in \mathcal{I}_r$ のためには, 前定理の (i), (ii), (iii) が, $\delta_n = 0 \quad (\forall n), \quad \delta = 1$ として成り立つこと, 必要かつ十分である.

定理 3. $T \in \mathcal{I}_c^*$ のためには, つぎの (i)', (ii)' が成り立つこと, 必要かつ十分である.

$$(i)' \quad \sum_n |c_{mn}| \quad \text{conv. unif. in } m$$

$$(ii) \quad \forall n \quad \exists \lim_{m \rightarrow \infty} c_{mn} \quad (= \delta_n).$$

このとき、定理1の (i), (iii) は自動的に成立し、任意の有界数列 $\{s_n\}$ に対し $t_m \rightarrow t = \sum \delta_n s_n$ である。

応用上重要なのは、これらの定理で与えられる条件が十分であること。十分性の証明は必要性の証明に比べ、簡単である。定理1の十分性の証明を述べる。

$$\begin{aligned} t_m - t &= \sum_n c_{mn} s_n - \sum_n \delta_n s_n = \sum_n c_{mn} (s_n - s) + s \sum_n c_{mn} - s \sum_n \delta_n \\ &= \sum_n (c_{mn} - \delta_n) (s_n - s) + s \left(\sum_n c_{mn} - \sum_n \delta_n \right) \end{aligned}$$

$\therefore t_m - t = \sum_n (c_{mn} - \delta_n) (s_n - s) + s \left(\sum_n c_{mn} - \sum_n \delta_n \right)$
右辺第2項は (ii) より $m \rightarrow \infty$ のとき $\rightarrow 0$ である。第1項は、 $n \geq N \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon$ である $N = N(\varepsilon)$ を固定すると、絶対値に拘る。

$$\sum_{n=0}^{N-1} |c_{mn} - \delta_n| (|s_n| + |s|) + \varepsilon \sum_{n=N}^{\infty} (|c_{mn}| + |\delta_n|)$$

をこえる。この第1項は $m \rightarrow \infty$ のとき $\rightarrow 0$ であり、第2項は $\leq 2H\varepsilon$ であるから $t_m \rightarrow t$ である。

こゝで "Banach Limit" は、有界数列 $\{s_n\}$ に直接 (t_m とは、 Γ 「中間生成物」なしに)「極限值」を与えるものがあるから、われわれの「和法」には該当しないことを注意しておく。

$\mathcal{L}_r$ に属する総和法は 正則, regular であるという。前の例 1, 例 2 から, $(C, 1)$ および (A) はともに regular である。

§2. 比較 Abel 型 および Tauber 型定理

T_1, T_2 を 2 つの総和法とすると, T_1 総和可能である任意の級が, 同じ極限値に T_2 総和可能であるならば, 「 T_2 は T_1 よりも強力である」, 「 T_2 は T_1 を含む」といふ, $T_1 \subset T_2$ であらわす。 $T_1 \subset T_2, T_2 \subset T_1$ の両方が成立することを $T_1 \sim T_2$ であらわせば, $\sim$ は同値関係であり, $\subset$ は ($\sim$ による同値類の間の) 半順序となる。

$T_1 \subset T_2$ を示す定理を Abel 型定理という。

($T_1 \subset T_2$ であり $T_2 \subset T_1$ ではない場合には) T_2 総和可能な級 (あるいは級数) が, ある種の付帯条件 (Tauber 型の条件) をみたせば, 実は T_1 総和可能であるという定理を Tauber 型定理という。総和法の正則性を主張する定理は, 特殊な (T_1 とし 恒等変換をとった) Abel 型定理である。

例 3 $(C, 1) \subset A$

例 4 (Tauber) $\left. \begin{array}{l} \sum a_n = s \quad (A) \\ n a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n = s$

$$\left. \begin{array}{l} \text{例 5 (Littlewood)} \quad \sum a_n = s \quad (A) \\ \exists K > 0 : |na_n| \leq K \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n = s$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{例 6 (Hardy-Littlewood)} \quad \sum a_n = s \quad (A) \\ \exists K > 0 : na_n \leq K \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n = s$$

例 4 ~ 6 は, この順に改良された命題であるが, 例 6 の巧
 々な証明が, H. Wielandt [4] によ, 2 次された。以下
 これを紹介する。

$$\begin{array}{l} \text{一般性を失うことなく, } a_0 = s = 0, \quad K = 1 \quad \text{と仮定できる。} \\ \text{したがって, } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \rightarrow 0 \quad (x \uparrow 1) \\ a_n \text{ real, } \quad na_n \leq 1 \end{array} \quad \left. \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$$

を証明すればよい。

$[0, 1)$ で定義された実数値函数の族を, このように定め
 る。

$$\mathcal{F} = \left\{ g : \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(x^n) \text{ conv. } (\equiv G(x)), \rightarrow 0 \quad (x \uparrow 1) \right\}$$

$g^* = \chi_{[\frac{1}{2}, 1)}$ が $\mathcal{F}$ に属することを実せば, 証明は完了する。

容易に見られるように

1° $\mathcal{F}$ は linear space である。

2° $g \in \mathcal{F} \Rightarrow g^k \in \mathcal{F} \quad (k \text{ は正整数})$

3° $x \in \mathcal{F}$

したがって, 定義項が 0 である多項式は $\in \mathcal{F}$ である。

ところで, このように多項式で「十分よく」近似できる函数

が、 $\mathcal{F}$ の元である。正確には

$$g: \sum a_n g(x^n) \quad \text{conv. for } 0 \leq x < 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_1, p_2 \text{ polynomials in } \mathcal{F} \quad p_1(x) \leq g(x) \leq p_2(x)$$

$$q(x) = \frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)} \quad \text{polynomial,} \quad \int_0^1 q(x) dx < \varepsilon$$

$$\Rightarrow g \in \mathcal{F}$$

である。この元に対して $G(x) \rightarrow 0$ ($x \uparrow 1$) を示せばよい

が、

$$G(x) - \sum a_n p_1(x^n) = \sum a_n (g(x^n) - p_1(x^n))$$

$$\leq \sum \frac{1}{n} (g(x^n) - p_1(x^n)) \leq \sum \frac{1}{n} (p_2(x^n) - p_1(x^n))$$

$$= \sum \frac{1}{n} x^n (1-x^n) q(x^n) \leq \sum (1-x) x^n q(x^n)$$

$$q(x) = \sum_{j=0}^k b_j x^j \quad \text{とすると, } n \text{ に因する和を先に計算すると}$$

$$= (1-x) \sum_{j=0}^k b_j \cdot \frac{x^{j+1}}{1-x^{j+1}} = \sum_{j=0}^k \frac{b_j x^{j+1}}{1+x+\dots+x^j}$$

$$x \uparrow 1 \text{ のときこれは } \rightarrow \sum_{j=0}^k \frac{b_j}{j+1} = \int_0^1 q(x) dx < \varepsilon \quad \text{と}$$

$$\text{あるから, 両端の } n \text{ の極限を考えると } \limsup_{x \uparrow 1} G(x) \leq \varepsilon$$

$$\sum a_n p_2(x^n) - G(x) \text{ を考えると同様にして計算すると } g \in \mathcal{F}$$

が知られる。

$$\frac{g^*(x) - x}{x(1-x)} \quad \text{の不連続点は } x = \frac{1}{2} \text{ だけであるから, かつ}$$

を「こくわすの」上下に動かして, $x = \frac{1}{2}$ の近傍を修正し

を連続にしたいものを多項式近似して $q_1(x), q_2(x)$ を作り

$p_i(x) = x + x(1-x)q_i(x)$ とおけば $g^* \in \mathcal{F}$ が見られる。

諸種の総和法の間に、いろいろな Tauber 型条件をおいた Tauber 型定理を統一的に扱うことを可能にした Wiener の General Tauberian Theorem については、N. Wiener [2], Hardy 前著 [1] 第 12 章 等を見られた。

序に述べた、「収束級数を取扱ふ際、平坦な迂回路が、実は Tauber 型定理である。

実例をあげよう。連続かつ有界変分な周期函数の Fourier 級数は一様収束するが、この事実はつぎのようにして証明できる。

1° 連続函数の Fourier 級数は一様に (C, 1) 総和可能である。
(Fejér の定理)

2° 有界変分函数の Fourier 級数の項は、一様に §4 の Tauber 型条件を満たす。

したがって §3, §4 から (一様性について若干の注意は必要であるが、それは簡単である) 結論が得られる。

§3. 函数の近似と総和法。

ここでは、周期函数を、その Fourier 級数を変換したものと近似する問題を考える。 L^2 近似の場合は、Fourier 級数の部分和が最良近似を興えて、総和法を考えた必要もないが、 L^2

から離れた函数空間, たとえば $C[-\pi, \pi]$, $L^1[-\pi, \pi]$ 等では, 部分和では近似できない函数があるから, 総和法を考へるのも自然である. この際, 総和法 (1) は正則なものにとるのも自然であるが, 正則であるための条件をつぎのよゝに書き直すと便利である.

定理 2' (収束) 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を数列 $\{t_m\}$ $t_m = \sum_n d_{mn} a_n$ に変換する総和法 $T = (d_{mn})$ が正則であるためには,

$$(i) \quad \exists H \quad \forall m \quad \sum_n |d_{mn} - d_{m,n+1}| \leq H$$

$$(ii)' \quad \forall n \quad \lim_{m \rightarrow \infty} d_{mn} = 1.$$

の成立するところから, 必要かつ十分である.

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x), \quad \begin{cases} A_0(x) = \frac{a_0}{2} \\ A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \end{cases}$$

から $P_m(x; f) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{mn} A_n(x)$ を作り, $f(x)$ を

$P_m(x; f)$ に近似する場合, 強力な総和法がよい近似を興えるとは限らない. (ii)' の $d_{mn} \rightarrow 1$ ($m \rightarrow \infty$) と仮定して

と関連して, 近似度の飽和という現象が生ずるところがあり,

P. L. Butzer, G. Sunouchi 他によつて一連の結果が得られてゐる.

ほぼ"最良な近似を興えるものとして, de la Vallée

Poussin の興えた "delayed (C, 1)" 総和法がある. その

一つの形は $2\sigma_{2m+1} - \sigma_{n-1}$ (§4.1 参照) である.

文献おのゝ注

単行本

- [1] G. H. Hardy, Divergent series, Oxford, 1949.
- [2] N. Wiener, The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge, 1933.
- [3] K. Zeller, Theorie der Limitierungsverfahren, Ergebnisse der Math., Springer, 1958
(巻末に 64 ページにわたる, 1955 年までの文献表あり)

論文・報告

- [4] H. Wielandt, Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes, Math. Z. 56 (1952), 206-207.
- [5] 石黒一男, 発散級数の総和法について, 実函数論分科会第4回シンポジウム 綜合講演集録 21-29 (1965)
- [6] 洲之内 源一郎, 三角多項式による函数の近似について, 「近似理論, 研究会 (1966) 予稿.
- [5] には, 総和法の理論の各論とともに, 種々の総和法の比較が克明に行われている.