

ある種の写像の iteration について

東大理 木村俊房 (Tosihisa Kimura)

§1 目的 多変数関数論では 1 変数関数論と著しく異なる現象が起る。ことが知られてゐるが、その 1 つとして、Fatou [1, 2] と Bieberbach [1] による次のような例がある。

" 写像 $\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ 次の性質をもつものが存在する:

- i) $\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ は双整型,
- ii) $\mathbb{C}^2 \setminus \varphi(\mathbb{C}^2)$ は内点をもつ,
- iii) $J\varphi \equiv 1$ ($J\varphi$ は φ のヤコビ行列式)"

このような φ を構成する φ に Bieberbach は簡単な整型双有理写像 $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を利用した。このような f に対し、適当な開集合 $U \subset \mathbb{C}^2$ をとると、

$$\varphi(\mathbb{C}^2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$$

となる。ここで f^n ($n \in \mathbb{Z}$) は f の n 回の iteration を表わすことをする。

他の例については Bochner-Martin [1], 小平 [1], 喜

多[1]と参照されたい。

上記喜多の報告のなかで、 $\varphi(\mathbb{C}^2)$ のいくつかの性質について若林の結果が紹介されている。我々の目的は $\varphi(\mathbb{C}^2)$ が $\mathbb{C}^2$ のなかにどのように入っているかをより具体的に知りたいということである。しかし、そう簡単に分ることではないうで、ここで述べることはかなり中途半端である。

f は $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ の上への双整型写像とすれば、 $\{f^n; n \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{C}^2$ の離散的力学系とみなされるので、力学系の用語にも用いる。

§2. Fatou-Bieberbach の写像の構成 前節で述べた写像 φ の構成法を復習しておく。

$f: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ で $\mathbb{C}^2$ の原点 $0=(0,0)$ の近傍から $\mathbb{C}^2$ への整型写像で原点を原点に移すものを表わす。Taylor展開を用いて、 f を

$$f: \begin{cases} x_1 = \alpha x + \beta y + \text{2次以上の項} \\ y_1 = \gamma x + \delta y + \text{2次以上の項} \end{cases}$$

と表わし、 f の線形化を

$$g: \begin{cases} x_1 = \alpha x + \beta y \\ y_1 = \gamma x + \delta y \end{cases}$$

とする。そのとき、 $\varphi: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ には次の方程式

$$(2.1) \quad f \circ \varphi = \varphi \circ g \quad (\circ \text{ は写像の合成を表わす})$$

は Schröder の方程式といわれる。行列 $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ の固有値

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \varphi \\ & \xrightarrow{g} & \end{array}$$

λ, μ を f の 0 における固有値ということにする。そのとき、次の定理がなりたつ。(Schröder の方程式に関する最も一般的結果については福原 [1] をみられたい)。

定理 “次の条件が成り立つとする。

$$1') \quad |\lambda|, |\mu| > 1, \text{ または, } |\lambda|, |\mu| < 1,$$

$$2) \quad \lambda \neq \mu^k, \mu \neq \lambda^k \quad (k=2, 3, \dots).$$

そのとき、(2.1) を満たす $\varphi: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ が存在する。 φ は

$$(2.2) \quad \varphi: \begin{cases} x_1 = x + 2\text{次以上} \\ y_1 = y + 2\text{次以上} \end{cases}$$

のもとで一意的に定まる。”

系 1. “条件

$$1) \quad |\lambda|, |\mu| > 1,$$

と 2), さらに

$$3) \quad f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \text{ は } \mathbb{C}^2 \text{ で整型,}$$

とす。そのとき、(2.1) を満たす $\varphi: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ は $\mathbb{C}^2$ で整型となる”

系 2. “条件 1') と 2) と条件

4) $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ は $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ への双射型写像,
 のもとで, φ は $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ への双射型写像となる"

系 3. "条件 1'), 2), 4) と

5) $J\varphi \equiv \text{定数}$

のもとで, (2.2) を満たす φ に対して $J\varphi \equiv 1$ が成り立つ"

条件 4), 5) を満たす f に対して, $p = (a, b)$, $p' = (a', b')$ は f の不動点, すなわち, $f(p) = p$, $f(p') = p'$ とする. f の p における固有値 λ, μ ; f の p' における固有値 λ', μ' とする. λ, μ に対して条件 1), 2) が成り立つとは, $\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ で §1 の i), ii), iii) と $\varphi(p) = p$ を満たすものが存在する. そのとき,

$$\varphi(\mathbb{C}^2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U) = \{q \in \mathbb{C}^2; \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(q) = p\}$$

が成り立つ. ここで U は p の適当な近傍である. もし, p' が f の源泉 (source), すなわち, $|\lambda'|, |\mu'| > 1$ であれば, p' の適当な近傍 U' に対して

$$U' \subset \mathbb{C}^2 \setminus \varphi(\mathbb{C}^2)$$

となる. したがって, このような φ が存在するものである.

以上述べたことから, φ を求める^{こと}は, 上の性質をもつ f を求めることに帰着された. このような f として Bieberbach は

$$\begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = 2x - 3y^2 + 2y^3, \end{cases}$$

喜多は

$$\begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = -4x + 15y^2 - 10y^3 \end{cases}$$

と使う。Bieberbach と喜多によつて f は 3 個の不動点 $(0,0)$, $(1,1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ を持つ。最初の 2 つは源点, 最後の 1 つは鞍点 (saddle point), すなわち, 固有値の絶対値の 1 つは >1 , 他の 1 つは <1 , $\neq 0$ である。対称性を利用するため, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ を原点に移すことにする。このとき, Bieberbach, 喜多の f は次の如く,

$$\begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = 2x - \frac{3}{2}y + 2y^3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = -4x + \frac{15}{2}y - 10y^3 \end{cases}$$

となる。

この 2 つを合せて字像

$$f_c : \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = cx - \frac{3}{2}(c-1)y + 2(c-1)y^3 \end{cases}$$

を考へる。この c は複素パラメータとする。 f_c が原点に偶対称であることは明らかであろう。

§3. 不動点, 周期点 $c \neq 0$ とする, f_c は明らかに $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ への整型双有理字像で, $Jf_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & -\frac{3}{2}(c-1) + 6(c-1)y^2 \end{vmatrix} = -c$ と消える。 $c \neq 0, 1$ とする, f_c の不動点は

$$(0,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

の3点で、不動点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ における固有値は $p^2 - c = 0$ の根 $\pm\sqrt{c}$ であり、不動点 $(0, 0)$ における固有値は $2p^2 + 3(c-1)p - 2c = 0$ の根 $(-3(c-1) \pm \sqrt{9c^2 - 2c + 9})/4$ である。

周期 k の周期点と k -周期点ということにする。

2-周期点は次の3組である：

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \\ & \left(\frac{\sqrt{7}+i}{4}, \frac{\sqrt{7}-i}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{7}-i}{4}, \frac{\sqrt{7}+i}{4}\right), \\ & \left(-\frac{\sqrt{7}+i}{4}, -\frac{\sqrt{7}-i}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{7}-i}{4}, -\frac{\sqrt{7}+i}{4}\right). \end{aligned}$$

これらの点は f^2 の不動点で、 f^2 の不動点 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}), (-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$ における固有値は $18(c-1)^2 + c \pm \sqrt{(18(c-1)^2 + c)^2 - c^2}$ であり、他の不動点における固有値はすべて $(9(c-1)^2 + 4c \pm \sqrt{(9(c-1)^2 + 4c)^2 - 16c^2})/4$ である。

3-周期点、8組あるが、まだ具体的に求めていない。一般に k -周期点の個数は k とともに増加する。

$|c| > 1, c \in \mathbb{C}$ ならば、 f の不動点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ は源点で、明らかに §2 の条件 2) に満たす。したがって、 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ と $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ に対応する写像 $\varphi_+, \varphi_- : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ が与えられる。

$$G_+ = \varphi_+(\mathbb{C}^2), \quad G_- = \varphi_-(\mathbb{C}^2)$$

とすれば、 G_+, G_- は互に素な $\mathbb{C}^2$ と双整型な $\mathbb{C}^2$ の領域である。

$|c| > 1, c \in \mathbb{C}$ ならば、 $(0, 0)$ は f の鞍点であることは分る。しかし、2-周期点から f^2 の源点が鞍点になると調べるのはやや

面倒である。

$c > 1$ または $c < -1$ の場合には不動点, 2-周期点と調べてみる。

不動点	固有値	$c > 1$	$c < -1$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\lambda = \sqrt{c}, \mu = -\sqrt{c}$	$\lambda > 1, \mu < -1$	λ, μ : 総て虚数
$(0, 0)$	$\lambda = \frac{1}{4}(-3(c-1) + \sqrt{9(c-1)^2 + 16c})$ $\mu = \frac{1}{4}(-3(c-1) - \sqrt{9(c-1)^2 + 16c})$	$0 < \lambda < 1$ $\mu < -1$	$1 < \lambda$ $0 < \mu < 1$
2-周期点	f^2 の固有値	$c > 1$ または $c < -1$	
$(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$ $(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$	$\lambda = 18(c-1)^2 + c + \sqrt{(18(c-1)^2 + c)^2 - c^2}$ $\mu = 18(c-1)^2 + c - \sqrt{(18(c-1)^2 + c)^2 - c^2}$	$0 < \mu < 1 < \lambda$	
その他	$\lambda = \frac{1}{4}(9(c-1)^2 + 4c + \sqrt{(9(c-1)^2 + 4c)^2 - 16c^2})$ $\mu = \frac{1}{4}(9(c-1)^2 + 4c - \sqrt{(9(c-1)^2 + 4c)^2 - 16c^2})$	$0 < \mu < 1 < \lambda$	

§4 安定曲線, 不安定曲線. $f: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ とし, f の原点での固有値の 1 つを ρ とする. そのとき, 次の定理が成り立つ (Poincaré [1], Picard [1]).

定理 " $|\rho| \neq 0, 1$ かつ $\rho^k (k=2, 3, \dots)$ はもう 1 つの固有値にならないとする. そのとき, $\psi: \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ を

$$(4.1) \quad \psi(\rho t) = f \circ \psi(t)$$

を満足するものが存在する."

(4.1) は Poincaré の方程式といわれる.

系 1 " 上記仮定のもとで, $\pm 1 \neq |\rho| > 1$, f は $\mathbb{C}^2$ で整型

とする。このとき、 ψ は $\mathbb{C}$ で線型である。”

系2 “上記仮定のもとで、 f はさらに f は $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ への双整型写像とする。このとき、 ψ は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}^2$ への埋め込みである”。

$f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ が双整型るとき、上のような $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ は
 $|c| < 1, > 1$ に従って、 f の安定曲線、不安定曲線という。
 k -周期点 p に対しては、 f^k の p における安定、不安定曲線を
 f の p における安定、不安定曲線という。

写像

$$f_c: \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = cx - \frac{3}{2}(c-1)y + 2(c-1)y^3 \end{cases} \quad (|c| > 1)$$

の鞍点 $0 = (0, 0)$ における安定、不安定曲線を求めてみよう。

固有値の1つ $\in \rho$ とする。 $\psi = (u, v)$ とおけば、 (4.1) は

$$\begin{cases} u(pt) = v(t) \\ v(pt) = cu(t) - \frac{3}{2}(c-1)v(t) + 2(c-1)v(t)^3 \end{cases}$$

となる。 $v \in Y$ である。

$$u(p^2t) + \frac{3}{2}(c-1)u(pt) - cu(t) = 2(c-1)u(pt)^3,$$

$$u(t) = \xi_1 t + \xi_2 t^2 + \dots$$

を代入すると、 ξ_1 は任意にとり、 $\xi_n (n \geq 1)$ は

$$(p^{2n} + \frac{3}{2}(c-1)p^n - c)\xi_n = 2(c-1) \sum_{j+k=n} \xi_j \xi_k$$

によって順次定まることから (Ushiki [1])、

と仮定して、この曲線は $x=0$ の近傍で $y=\phi(x)$ で表わされ
るとすれば、 ϕ は

$$\phi(\phi(x)) = cx - \frac{3}{2}(c-1)\phi(x) + 2(c-1)\phi(x)^3$$

を満たす。 $\phi(x) = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots$ とおくと、未定係数法により
 $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ を順次求めることができる。

不動点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ における2つの不安定曲線も同様
にして求めることができる。

k -周期点 $p=(a, b)$ における安定または不安定曲線を求める
には次のようにすればよい。 $f^k, \psi=(q, r)$ は

$$f^k: \begin{cases} x_1 - a = \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \dots \\ y_1 - b = \gamma(x-a) + \delta(y-b) + \dots \end{cases}, \quad \psi: \begin{cases} x-a = \xi_1 t + \xi_2 t^2 + \dots \\ y-b = \eta_1 t + \eta_2 t^2 + \dots \end{cases}$$

とおくと、未定係数法で $\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n, \eta_n, \dots$ を求めればよい。

§5. f_c ($c>1$ または $c<-1$) の $\mathbb{R}^2$ への制限。 $c>1$ または
 $c<-1$ ならば、 f_c は $\mathbb{R}^2 \in \mathbb{R}^2$ の上へ移す。また、 φ_+, φ_- は $\mathbb{R}^2$
から $\mathbb{R}^2$ への写像となる。ここでは $\varphi_+(\mathbb{R}^2) = G_+ \cap \mathbb{R}^2, \varphi_-(\mathbb{R}^2)$
 $= G_- \cap \mathbb{R}^2$ の形を求めてみよう。

まず、 $c>1$ とする。

不動点 $(0,0)$ における安定、不安定曲線は $(0,0)$ の近傍で与
えられる。

$$(5.1) \quad y = \lambda x + \gamma_3 x^3 + \dots, \quad 0 < \lambda < 1, \quad \gamma_3 > 0$$

$$(5.2) \quad y = \mu x + \beta'_1 x^3 + \dots, \quad \mu < -1, \quad \beta'_1 > 0$$

で与えられる。原点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ における 2 本の不安定曲線は

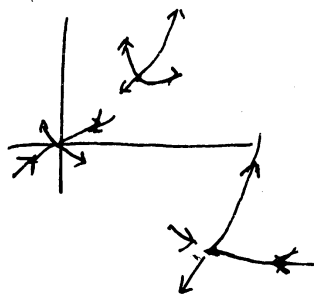
$$(5.3) \quad \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2} = t + \xi_2 t^2 + \xi_3 t^3 + \dots, & \xi_n > 0, n=2, 3, \dots \\ y_1 - \frac{1}{2} = \sqrt{c} t + c \xi_2 t^2 + \dots \end{cases}$$

$$(5.4) \quad \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2} = t + \xi'_2 t^2 + \dots \\ y_1 - \frac{1}{2} = -\sqrt{c} t + c \xi'_2 t^2 + \dots \end{cases}, \quad \xi'_2 > 0$$

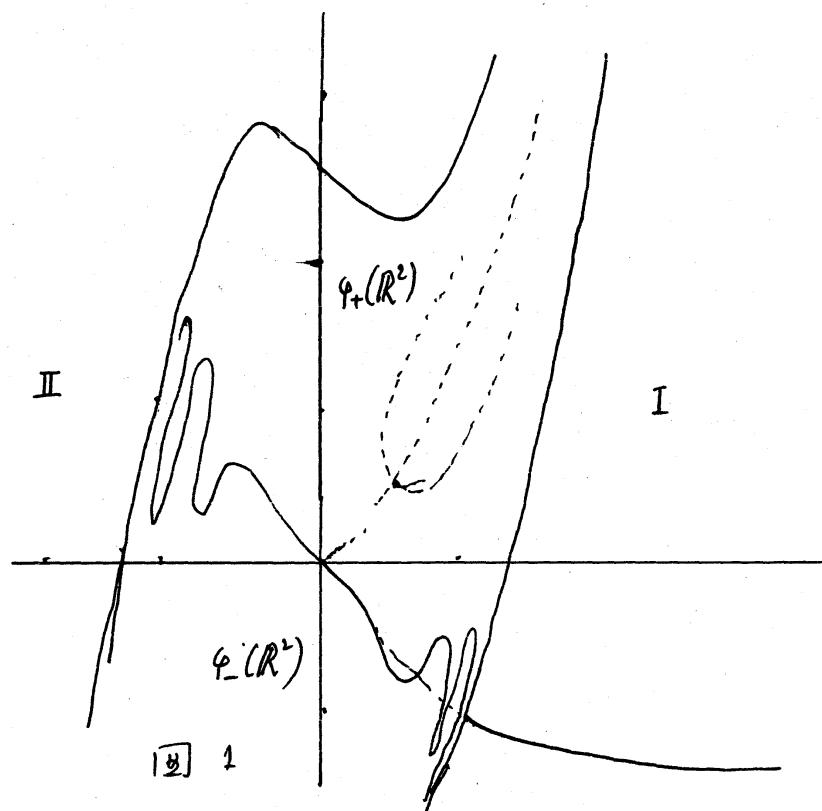
で与えられる。(5.3) で与えられる曲線の $t > 0$ の部分に $y = \phi(x)$ とすれば, $x > 0$ で $\phi = \phi$ は単調増加である。

2-周期点 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$ の右にある不安定曲線, 安定曲線はそれぞれ単調に $x, y \rightarrow \infty, x, y \rightarrow -\infty$ となる。

以上を図示すると次のようになる。



これ以上詳しく調べるために数値計算に頼ることにする。
 $(0, 0)$ から右にある不安定曲線と $(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$ から左から入る安定曲線は横断的に交わる。すなわち, 異質二重漸近点 (heteroclinic point) が現われる。 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ から出た不安定曲線と $(0, 0)$ から入る安定曲線も交わると思われ, また確認している。
 以上のことから, $\varphi_+(\mathbb{R}^2), \varphi_-(\mathbb{R}^2)$ は次の図のようになる。



73"に $C < -1$ の場合を考へる.

原点における不安定曲線は

$$y = \lambda x - \gamma_3 x^3 + \dots, \quad \lambda > 1, \quad \gamma_3 > 0$$

と表わされ,

$$-Cx \leq y \leq \lambda x \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$$

と満たす x の範囲で、安定曲線は

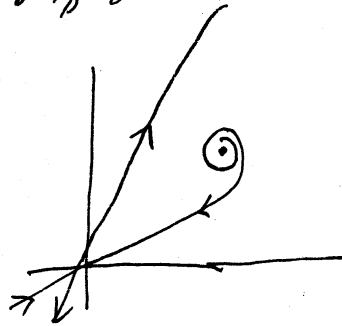
$$y = \mu x + \gamma'_3 x^3 + \dots, \quad 0 < \mu < 1, \quad \gamma'_3 > 0$$

と表わされ, $\frac{1}{3}x \leq y \leq x$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$) と満たす.

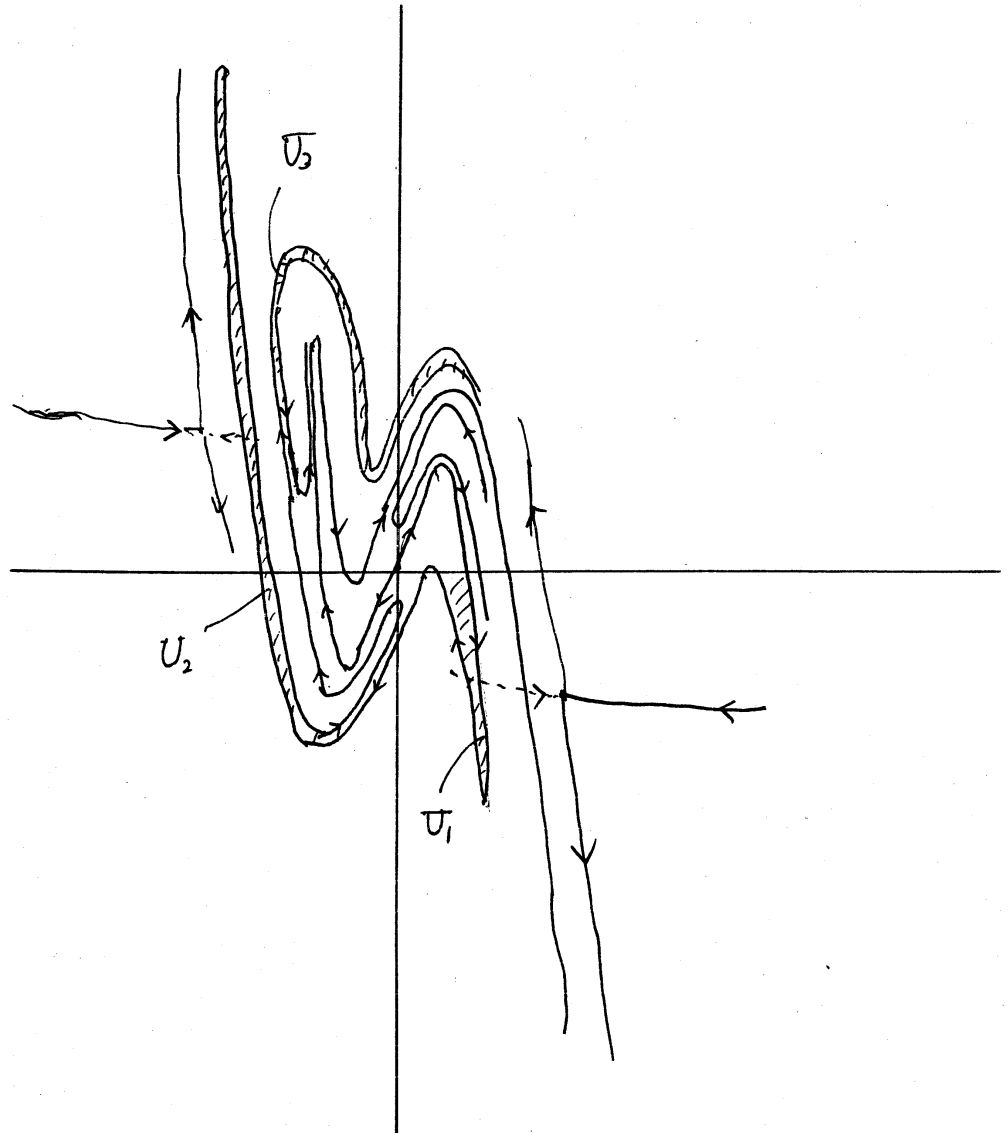
不動点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ における固有値は純虚数であるから、滑動点である.

以上のことから、原点における安定、不安定曲線は次の図の

ようになることが分る



原点における不安定曲線がどのように伸びていくかは数値計算による、 $C=2.9$ ときの概略の図を示す



まず, $\varphi_+(R^2)$ と $\varphi_-(R^2)$ は原点に関して対称で, 原点から出た不安定曲線 C によって囲まれた領域であることに注意しよう. 図の斜線の部分 U_1 は φ_+ により U_2 に, U_2 は U_3 に移り, U_1 は右下に伸び, U_2 は左上により長く伸び, U_3 はさらに長く伸びて右下に行く. このように $\varphi_+(R^2)$, $\varphi_-(R^2)$ は無数の腕を出す. さらに, これらは右下から左上へ細長く伸びた領域で互に絡み合っている. $\varphi_+(R^2) \cup \varphi_-(R^2)$ の境界は 2-周期点 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$ から出た不安定曲線である. $(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$ から右下へ出た不安定曲線は素直であるが, 左上へ出た部分は C と絡み合う. $(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$ へ左から入る安定曲線は C の 2 つの分枝と横断的に交わる. これから, 異質 = 重漸近点 だけでなく, 同質 = 重漸近点 (homoclinic point) も出現することになる.

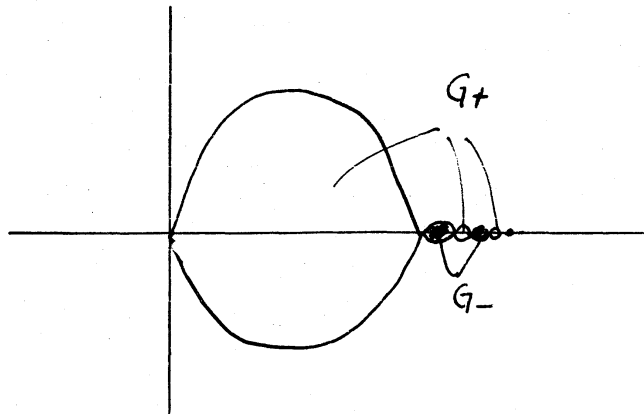
§ 6 G_+ と G_- の $\mathbb{C}^2$ 内での形状 G_+ と G_- は原点に関して対称であるから, G_+ についてだけ調べればよい. G_+ の一般的性質として次の若林 (喜多 [1]) の結果がある

定理" $L: \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ は $\mathbb{C}^2$ 内の任意の複素直線とする. そのとき, $G_+ \cap L$ は有界である"

G_+ の境界は実 3 次元であるが, 原点から出た不安定曲線 — 実 2 次元解析的曲面 — を含む. このことから, G_+ の境界は実 3 次元の解析多様体 (特異点を含むかも知れない) と想

像されるが, 証明のメソッドは立ってゐない.

実験的に, $G_+ \cap \{y=0\}$ に示すように, $c > 1$ のとき次の図のようになる. これから分かるように, 図 I における領域 I と



II は $\mathbb{C}^2$ のなかで成り立つてゐる.

参考文献

Bieberbach, L

[1] Beispiel zweier ganzen Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlichte volltreue Abbildung des $\mathbb{R}_4$ auf ein Teil seiner selbst vermitteln, S-B. Preuß. Akad. Wiss., Physikalisch-math. Klasse (1933), 476-479.

Bochner, S + Martin W. T.,

[1] Several complex variables, Princeton U.P., 1948.

Fatou, P

[1] Sur les fonctions méromorphes de deux variables, C. R. 175 (1922), 862-865.

- [2] Sur certaines fonctions uniformes de deux variables,
C.R. 175 (1922), 1030-1033.

福原 満洲雄

- [1] Schröder の函数方程式について, 九州大理学部研究報告, 1 (1945), 190-196

真多 通武

- [1] 多変数函数論より見た Riemann 面の一つの問題,
数学, 23 (1971), 219-225.

小平 邦彦

- [1] Nevanlinna 理論, 東大数学教室セミナー・ノート, 34,
1974.

Picard, E

- [1] Leçons sur quelques équations fonctionnelles, Gauthier-Villars, 1928

Poincaré, H

- [1] Sur une classe nouvelle de transcendentes uniformes,
Jour. de Liouville, 4^e série, 6 (1890), 313-365.

Ushiki, S

- [1] Unstable manifolds of analytic dynamical systems,
J. Math. Kyoto Univ., 21 (1981), 763-785