

Sheaves of $\mathcal{B}$ -valued structures

早大 理工 高橋 真

D. P. Ellerman は [1] において Sheaves of structures に関して Sheaf forcing を定義して Ultraproduct Theorem を証明し, Ultraproduct が Ultrapower of Boolean ultrapower の拡張であることを示している. ここでは Sheaves of structures の拡張としての Sheaves of $\mathcal{B}$ -structures について考察する.

Def I : top. sp. $\mathcal{B}$: c. b. a. に対し category $\mathcal{O}(I)^{\mathcal{B}}$, $M_{\mu}^{(\mathcal{B})}$ を次の様に定義する.

$\mathcal{O}(I)^{\mathcal{B}}$: objects open sets of I

morphisms $U \subset V$ and $U \rightarrow V$ is a morphism in $\mathcal{O}(I)^{\mathcal{B}}$

$M_{\mu}^{(\mathcal{B})}$: objects $\mathcal{B}$ -valued structures of type μ

morphisms $\mathcal{B}$ -morphisms

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{O}, \mathcal{B}: \mathcal{B}\text{-structures に対し } h: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B} \text{ あり} \\ \mathcal{B}\text{-morphism とは任意の atomic relation} \\ R(x_1, \dots, x_n) \text{ と任意の } a_1, \dots, a_n \in \mathcal{O} \text{ に対し} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \llbracket R(a_1, \dots, a_n) \rrbracket \leq \llbracket R(h(a_1), \dots, h(a_n)) \rrbracket \\ \text{をみたすこととする} \end{array} \right]$$

Def presheaf of $\mathcal{B}$ -st. とは $P: \mathcal{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow M_n^{(\mathcal{B})}$ なる functor である。
これを (I, P) と書く。

$u \downarrow u'$ に $\exists!$ $\downarrow$ $P(u) \downarrow P(u')$ なる morphism を $p_u^{u'}$ と書き restriction map と呼ぶ。

Def (I, P) : presheaf of $\mathcal{B}$ -st. とする。

$i \in I$ における P の stalk $P_i (= \varinjlim_{u \supset i} P(u))$ の atomic relation $R(x_1, \dots, x_n)$ の値を次の様に定義する。 $a_1, \dots, a_n \in P_i$ とする。

$$\llbracket R(a_1, \dots, a_n) \rrbracket_{P_i} \leq \bigvee_{u \supset i} \bigvee_{\substack{a_1, \dots, a_n \in P(u) \\ \text{s.t. } a_k \in a_k \ (1 \leq k \leq n)}} \llbracket R(a_1, \dots, a_n) \rrbracket$$

以下 a の i における germ を $[a]_i$; 或いは混乱のため i のなるときは単に $[a]$ とかくことにする。

prop 1 $a_1, \dots, a_n \in P(u_0)$ とする。

$$\llbracket R([a_1], \dots, [a_n]) \rrbracket_{P_i} = \bigvee_{u_0 \supset u \supset i} \llbracket R(p_u^{u_0}(a_1), \dots, p_u^{u_0}(a_n)) \rrbracket$$

i) $\geq$ は $[p_u^{u_0}(a_k)] = [a_k]$ より明か

$\leq$ は $\forall c_1, \dots, c_n \in P(u)$ に $\exists!$ $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{O}(X)$ s.t. $u_1, \dots, u_n \subset u \cap u_0$ s.t. $[c_k] = [a_k]$

がある。 $p_{u_2}^{u_0}(a_k) = p_{u_2}^{u_0}(c_k) \ (1 \leq k \leq n)$

よって $u_1 \cap \dots \cap u_n = u$ とおくと

$$\llbracket R(c_1, \dots, c_n) \rrbracket \leq \llbracket R(p_u^{u_0}(c_1), \dots, p_u^{u_0}(c_n)) \rrbracket = \llbracket R(p_u^{u_0}(a_1), \dots, p_u^{u_0}(a_n)) \rrbracket$$

$$\therefore \bigvee_{\substack{c_1, \dots, c_n \in P(u) \\ [c_k] = [a_k]}} \llbracket R(c_1, \dots, c_n) \rrbracket \leq \bigvee_{u_0 \supset u \supset i} \llbracket R(p_u^{u_0}(a_1), \dots, p_u^{u_0}(a_n)) \rrbracket$$

$$\leq \bigvee_{u \supset u \supset i} \llbracket R(p_u^{u_0}(a_1), \dots, p_u^{u_0}(a_n)) \rrbracket$$

$$\therefore \bigvee_{u \supset i} \bigvee_{\substack{c_1, \dots, c_n \in P(u) \\ [c_i] = [a_i]}} \llbracket R(c_1, \dots, c_n) \rrbracket \leq \bigvee_{u \supset u \supset i} \llbracket R(p_u^{u_0}(a_1), \dots, p_u^{u_0}(a_n)) \rrbracket$$

Def (I, P) : presheaf of $\mathcal{B}$ -st. が次の (1), (2) を満たすとき

(I, P) を sheaf of $\mathcal{B}$ -st. と呼ぶ

(1) $\forall u \in \mathcal{O}(X)^{\text{op}}, \forall \{u_r\}_{r \in A}$ s.t. open covering of u に対し

$$\forall f \in \mathcal{F}_u \text{ s.t. } a_r \in P(u_r), \forall r, s \in A \quad p_{u_r u_s}^{u_r}(a_r) = p_{u_r u_s}^{u_s}(a_s)$$

$$\Rightarrow \exists! \alpha \in P(u) \quad \forall r \in A \quad p_{u_r}^u(\alpha) = a_r$$

(2) $\forall u \in \mathcal{O}(X)^{\text{op}}, \forall \{u_r\}_{r \in A}$ s.t. open covering of u , $\forall R(a_1, \dots, a_n)$: atomic relation

$$\forall a_1, \dots, a_n \in P(u)$$

$$\llbracket R(a_1, \dots, a_n) \rrbracket = \bigwedge_r \llbracket R(p_{u_r}^u(a_1), \dots, p_{u_r}^u(a_n)) \rrbracket$$

Remark Functor $P: \mathcal{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$ が (1) を満たすとき

sheaf of sets と呼ぶ

Def (I, P) : presheaf of $\mathcal{B}$ -st. のとき presheaf of sets $(I, {}^n P)$ を

次の様に定義する.

$${}^n P(u) \subseteq P(u)^n$$

$${}^n p_u^u(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) \subseteq \langle p_u^{u_1}(a_1), \dots, p_u^{u_n}(a_n) \rangle$$

また、任意の atomic relation $R(a_1, \dots, a_n)$ と $b \in \mathcal{B}$ に対し

$$R^b(u) \subseteq \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in {}^n P(u) \mid \llbracket R(a_1, \dots, a_n) \rrbracket \geq b \}$$

$$R^b_u \subseteq {}^n p_u^u \upharpoonright R^b(u)$$

と表す

(I, R^b) は $(I, {}^n P)$ の subpresheaf (graph subpresheaf と呼ぶ)

lemma (I, P) : sheaf of sets, (I, R) : subpresheaf of (I, P) とする

(I, R) が sheaf になる

$$\Leftrightarrow \forall u \in \mathcal{O}(X)^0 \forall a \in P(u) [\forall i \in u \exists u_i [i \in u_i \subset u \wedge P_{u_i}^u(a) \in R(u_i)] \rightarrow a \in R(u)]$$

$\Rightarrow (\Leftarrow)$ $\{u_i\}_{i \in u}$ は u の open covering

$$\{P_{u_i}^u(a)\}_{i \in u} \text{ は } a \text{ である}$$

$$\forall i, j \in u \quad P_{u_i \cap u_j}^{u_i}(P_{u_i}^u(a)) = P_{u_i \cap u_j}^u(a) = P_{u_i \cap u_j}^{u_j}(P_{u_j}^u(a))$$

従って (I, R) : sheaf となる

$$\exists! b \in R(u) \quad \forall i \in u \quad P_{u_i}^u(b) = P_{u_i}^u(a)$$

$$(I, P): \text{sheaf となる} \quad a = b \quad \therefore a \in R(u)$$

$(\Leftarrow)$ $\forall u \in \mathcal{O}(X)^0$, $\{u_r\}$: open covering of u , $\forall a_r \in R(u_r)$ となる

$$\forall u_r, u_s \quad R_{u_r \cap u_s}^{u_r}(a_r) = R_{u_r \cap u_s}^{u_s}(a_s)$$

$$\rightarrow \forall u_r, u_s \quad P_{u_r \cap u_s}^{u_r}(a_r) = P_{u_r \cap u_s}^{u_s}(a_s)$$

$$\rightarrow \exists! a \in P(u) \quad \forall u_r [P_{u_r}^u(a) = a_r] \quad (\because (I, P): \text{sheaf})$$

$$\rightarrow \exists! a \in P(u) [\forall i \in u \exists u_i [i \in u_i \subset u \wedge P_{u_i}^u(a) \in R(u_i)] \wedge \forall u_r [P_{u_r}^u(a) = a_r]]$$

$$\rightarrow \exists! a \in P(u) [a \in R(u) \wedge \forall u_r [P_{u_r}^u(a) = a_r]]$$

$$\rightarrow \exists! a \in R(u) \quad \forall u_r [R_{u_r}^u(a) = a_r]$$

Th.1 (I, P) : presheaf of $\mathcal{B}$ -st. とするとき, 次の (i), (ii) は同値

(i) (I, P) : sheaf of $\mathcal{B}$ -st.

(ii) (I, P) : sheaf of sets であり, 任意の atomic relation と

任意の $b \in \mathcal{B}$ について τ の graph subpresheaf が sheaf になる

こと

ii) lemma 5.1)

$$\forall u \in \mathcal{O}(X)^{\text{op}} \forall a_1, \dots, a_n \in \mathcal{P}(u) \left[\forall i \in u \exists u_i [i \in u_i \subset u \wedge \llbracket R(p_{u_i}^u(a_1), \dots, p_{u_i}^u(a_n)) \rrbracket \geq b] \right. \\ \left. \rightarrow \llbracket R(a_1, \dots, a_n) \rrbracket \geq b \right] \quad (*)$$

と sheaf of $\mathcal{B}$ -st. の def の (2) と の 同値性 を 言 え ば よ い

(2) $\rightarrow$ (*) (*) の 前 半 よ り $\{u_i\}$ は u の open covering で

$$\forall u_i \llbracket R(p_{u_i}^u(a_1), \dots, p_{u_i}^u(a_n)) \rrbracket \geq b$$

$$\therefore \bigwedge_i \llbracket R(p_{u_i}^u(a_1), \dots, p_{u_i}^u(a_n)) \rrbracket \geq b$$

$$\therefore \llbracket R(a_1, \dots, a_n) \rrbracket \geq b \quad (\because (2))$$

(*) $\rightarrow$ (2) (2) に お い て $\bigwedge_i \llbracket R(p_{u_i}^u(a_1), \dots, p_{u_i}^u(a_n)) \rrbracket = b$ と お く

$$\text{従って } \forall u_i \llbracket R(p_{u_i}^u(a_1), \dots, p_{u_i}^u(a_n)) \rrbracket \geq b$$

$$\therefore \forall i \in u \exists u_i [i \in u_i \subset u \wedge \llbracket R(p_{u_i}^u(a_1), \dots, p_{u_i}^u(a_n)) \rrbracket \geq b]$$

($\because \{u_i\}$ は u の open covering)

$$\therefore \llbracket R(a_1, \dots, a_n) \rrbracket \geq b \quad (\because (*))$$

$$b \in \mathcal{B} \text{ で } \forall u_i \llbracket R(a_1, \dots, a_n) \rrbracket \leq \llbracket R(p_{u_i}^u(a_1), \dots, p_{u_i}^u(a_n)) \rrbracket$$

$$\therefore \llbracket R(a_1, \dots, a_n) \rrbracket \leq \bigwedge_i \llbracket R(p_{u_i}^u(a_1), \dots, p_{u_i}^u(a_n)) \rrbracket = b$$

$$\therefore \llbracket R(a_1, \dots, a_n) \rrbracket = b$$

Remark Th1 より, sheaf of $\mathcal{B}$ -st. と は: 任意の atomic relation と

任意の $b \in \mathcal{B}$ に 対 し $\forall u \in \mathcal{O}(X)^{\text{op}} [\forall b, b' \in \mathcal{B} [b \leq b' \rightarrow R^b(u) \subset R^{b'}(u)] \wedge$

$R^0(u) = \mathcal{P}(u)$ が 成 り 立 つ よ う な $(I, \mathcal{P})$ の subsheaf

(I, R^b) が 決 ま っ て い る sheaf of sets の こ と で あ る.

Def sheaf of sets (I, Ω) を次の様に定義する

$$\Omega(u) \equiv \{v \mid v \subset u \wedge v \in \mathcal{O}(I)^u\}$$

$$\Omega_u^u(v) \equiv v \cap u$$

Remark (I, Ω) は I 上の sheaf of sets 全体の作るトポスの subobject classifier になる。

Prop 2 (I, P) : sheaf of sets とする

(I, P) の subsheaf と natural transformation $P \rightarrow \Omega$ が 1-1 対応する

*) i) (I, R) : subsheaf of (I, P) に対し $R: P \rightarrow \Omega$ を

$$R_u(a) \equiv \bigcup \{u' \subset u \mid P_u^{u'}(a) \in R(u')\}$$

ii) $R: P \rightarrow \Omega$ に対し (I, R) : subsheaf of (I, P) を

$$R(u) \equiv \{a \in P(u) \mid R_u(a) = u\}$$

と対応させればよい。1-1 対応になっていることは明らか

Def $\mathcal{F}$: ultrafilter of $\mathcal{B}$ とする

$$R^{\mathcal{F}}(u) \equiv \bigcup_{a \in \mathcal{F}} R^a(u) \text{ により定義された sheaf of set } (I, R^{\mathcal{F}})$$

が (I, P) の subsheaf になることと $\mathcal{F}$ が P -ultrafilter と呼ぶ

prop 2 より $(I, R^{\mathcal{F}})$ に対応する nat. trans. が存在するが、

それを $\models R^{\mathcal{F}}: P \rightarrow \Omega$ と書く

$$\text{i.e. } \models R^{\mathcal{F}}_u(a_1, \dots, a_n) = \bigcup \{u' \subset u \mid \llbracket R(P_u^{u'}(a_1), \dots, P_u^{u'}(a_n)) \rrbracket \in \mathcal{F}\}$$

Def (I, P): sheaf of $\mathcal{B}$ -pt. is locally invariant & is

$\forall R$: atomic relation $\forall u \in \mathcal{O}(I)^P \forall i \in u \exists v \ni i \forall a_1, \dots, a_n \in P(u)$

$$\llbracket R([a_1], \dots, [a_n]) \rrbracket_{P_i} = \llbracket R(P_u^u(a_1), \dots, P_u^u(a_n)) \rrbracket_{P(u)}$$

をみたすときをいう

Prop 3 (I, P): locally invariant のとき

$$FR_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n) = \{i \in u \mid \llbracket R([a_1], \dots, [a_n]) \rrbracket_{P_i} \in \mathcal{F}\}$$

$\therefore$ 明らか

Def (I, P): sheaf of $\mathcal{B}$ -pt. $\mathcal{F}$: P-ultrafilter

$\varphi(x_1, \dots, x_n)$: n-ary formula & is

natural transformation $\Vdash \varphi^{\mathcal{F}}: \mathcal{P} \rightarrow \Omega$ 次の様に定義する

- 1) φ : atomic $\Vdash \varphi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n) \leq \Vdash \varphi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n)$
- 2) $\varphi: \psi \vee \chi$ $\Vdash \varphi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n) \leq \Vdash \psi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n) \vee \Vdash \chi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n)$
- 3) $\varphi: \psi \wedge \chi$ $\Vdash \varphi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n) \leq \Vdash \psi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n) \wedge \Vdash \chi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n)$
- 4) $\varphi: \neg \psi$ $\Vdash \varphi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n) \leq \text{int}(u - \Vdash \psi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n))$
- 5) $\varphi: \exists x \psi$ $\Vdash \varphi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n) \leq \bigcup_{v \in u} \bigcup_{a \in P(v)} \Vdash \psi_v^{\mathcal{F}}(a, P_v^u(a_1), \dots, P_v^u(a_n))$

Def (I, P): sheaf of $\mathcal{B}$ -pt. $\mathcal{F}$: P-ultrafilter

$\varphi(x_1, \dots, x_n)$: n-ary formula & is

$$P_i \Vdash^{\mathcal{F}} \varphi([a_1], \dots, [a_n]) \stackrel{\text{def}}{\iff} i \in \Vdash \varphi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n)$$

$$\Vdash^{\mathcal{F}} \varphi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n) \stackrel{\text{def}}{\iff} \neg \neg (\Vdash \varphi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n) \wedge u) \quad (\text{但し } \neg v = \text{int}(I - v))$$

$$P_i \Vdash^{\mathcal{F}} \varphi([a_1], \dots, [a_n]) \stackrel{\text{def}}{\iff} i \in \Vdash^{\mathcal{F}} \varphi_u^{\mathcal{F}}(a_1, \dots, a_n)$$

Def $\text{Pr}(\mathcal{I}) \subseteq \{F \mid F: \text{prime filter of } \mathcal{O}(\mathcal{I})\}$

$\text{Pr}(\mathcal{I}) := X^\circ(u) = \{F \in \text{Pr}(\mathcal{I}) \mid F \ni u\}$ ($u \in \mathcal{O}(\mathcal{I})$) を base にして
位相を定める。

prop 4 $\eta: \mathcal{I} \longrightarrow \text{Pr}(\mathcal{I})$ は continuous

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ i & \longmapsto & F_i = \{u \in \mathcal{O}(\mathcal{I}) \mid u \ni i\} \end{array}$$

$$\therefore \eta(X^\circ(u)) = u$$

Def sheaf of $\mathcal{B}$ -st $(\text{Pr}(\mathcal{I}), P^\circ)$ を次の様に定義する。

但し $(\mathcal{I}, P)$ は sheaf of $\mathcal{B}$ -st.

$$\text{for } X: \text{open in } \text{Pr}(\mathcal{I}) \quad P^\circ(X) \subseteq P(\eta(X))$$

$$\text{for } X, X': \text{open in } \text{Pr}(\mathcal{I}) \text{ s.t. } X' \subset X \quad P^\circ_{X'} \subseteq P^\circ_X$$

Th 2. $(\text{Pr}(\mathcal{I}), P^\circ)$: locally invariant, $\mathcal{F}$: P -ultrafilter

$$a_1, \dots, a_n \in P(u) = P^\circ(X^\circ(u)), F \in X(u) \quad \text{とする}$$

$$P^\circ_F \Vdash^\mathcal{F} \varphi([a_1], \dots, [a_n]) \text{ iff } \{i \in u \mid P_i \Vdash^\mathcal{F} \varphi([a_1], \dots, [a_n])\} \in F$$

*) Th を証明する代りに Th と同値な次の等式を証明する。

$$\{F \in X^\circ(u) \mid P^\circ_F \Vdash^\mathcal{F} \varphi([a_1], \dots, [a_n])\} = X^\circ(\{i \in u \mid P_i \Vdash^\mathcal{F} \varphi([a_1], \dots, [a_n])\})$$

i) φ : atomic なときは

$(\text{Pr}(\mathcal{I}), P^\circ)$: locally invariant なることは $(\mathcal{I}, P)$: locally invariant であるから

Prop 3 より

$$\{i \in u \mid P_i \Vdash^\mathcal{F} \varphi([a_1], \dots, [a_n])\} = \neg\neg(\Vdash^\mathcal{F}_u(a_1, \dots, a_n)) \cap u$$

$$= \neg\neg(\{i \in u \mid \Vdash^\mathcal{F}_i \varphi([a_1], \dots, [a_n])\} \in \mathcal{F}) \cap u$$

同様に $\text{Pr}(\mathcal{I})$ で

$$\begin{aligned}
& \{F \in X^0(u) \mid P_F^0 \Vdash^P \varphi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n)\} \\
&= \neg\neg (\{F \in X^0(u) \mid \llbracket \varphi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n) \rrbracket \in \mathcal{F}\}) \cap X^0(u) \\
&= \neg\neg (\{F \in X^0(u) \mid \exists x \ni F \llbracket \varphi(P_x^{X(u)}(a_0), \dots, P_x^{X(u)}(a_n)) \rrbracket \in \mathcal{F}\}) \cap X^0(u) \\
&= \neg\neg (\{F \in X^0(u) \mid \exists x \ni F \llbracket \varphi(P_{\bar{a}_0}^u(a_0), \dots, P_{\bar{a}_n}^u(a_n)) \rrbracket \in \mathcal{F}\}) \cap X^0(u) \\
&= \neg\neg (\{F \in X^0(u) \mid \exists x \ni F \bigwedge_{i \in \bar{a}_i(u)} \llbracket \varphi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n) \rrbracket_{P_i} \in \mathcal{F}\}) \cap X^0(u) \\
&= \neg\neg (\{F \in X^0(u) \mid \exists u \in F \bigwedge_{i \in u} \llbracket \varphi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n) \rrbracket_{P_i} \in \mathcal{F}\}) \cap X^0(u) \\
&= \neg\neg (\{F \in X^0(u) \mid \exists u \in F \forall i \in u \llbracket \varphi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n) \rrbracket_{P_i} \in \mathcal{F}\}) \cap X^0(u)
\end{aligned}$$

($\because \mathcal{F}$: P -ultrafilter)

$$\begin{aligned}
&= \neg\neg (\{F \in X^0(u) \mid \exists u \in F \ u = \{i \in u \mid \llbracket \varphi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n) \rrbracket \in \mathcal{F}\}) \cap X^0(u) \\
&= \neg\neg X^0(\{i \in u \mid \llbracket \varphi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n) \rrbracket \in \mathcal{F}\}) \cap X^0(u) \\
&= X^0(\neg\neg \{i \in u \mid \llbracket \varphi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n) \rrbracket \in \mathcal{F}\} \cap u) \\
&= X^0(\{i \in u \mid P_i \Vdash^P \varphi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n)\})
\end{aligned}$$

ii) $\varphi = \psi \vee \pi, \psi \wedge \pi, \neg \psi, \exists x \psi$ のときは明らか

([1] の prime stalk Theorem と同様)

Th 3 $(Pr(\mathbb{I}), P^0)$: locally invariant, $\mathcal{F}$: P -ultrafilter

$F^0 \in X^0(u)$: max-filter, $P_{F^0}^0 \models$ Maximum Principle

なり立てる。

$$P_{F^0/\mathcal{F}}^0 \models \varphi(\bar{a}_0/\mathcal{F}, \dots, \bar{a}_n/\mathcal{F}) \iff P_{F^0}^0 \Vdash^P \varphi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n)$$

i) φ : atomic のとき

$$P_{F^0/\mathcal{F}}^0 \models \varphi(\bar{a}_0/\mathcal{F}, \dots, \bar{a}_n/\mathcal{F}) \iff \llbracket \varphi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n) \rrbracket \in \mathcal{F}$$

$$\iff \exists v \in F^0 \llbracket \varphi(P_v^u(a_0), \dots, P_v^u(a_n)) \rrbracket \in \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow \exists u \in F^0 \quad \forall i \in u \quad \llbracket \varphi([a_1], \dots, [a_n]) \rrbracket \in \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow \exists u \in F^0 \quad u = \{i \in u \mid \llbracket \varphi([a_1], \dots, [a_n]) \rrbracket \in \mathcal{F}\}$$

$$\Leftrightarrow \{i \in u \mid \llbracket \varphi([a_1], \dots, [a_n]) \rrbracket \in \mathcal{F}\} \in F^0$$

$$\Leftrightarrow \{i \in u \mid \llbracket \varphi([a_1], \dots, [a_n]) \rrbracket \in \mathcal{F}\} \wedge u \in F^0$$

$$\Leftrightarrow \{i \in u \mid p_i \Vdash^{\mathcal{F}} \varphi([a_1], \dots, [a_n])\} \in F^0$$

$$\Leftrightarrow p_F^0 \Vdash^{\mathcal{F}} \varphi([a_1], \dots, [a_n])$$

ii) $\varphi = \varphi \vee \chi$ のとき

$$p_F^0 / \mathcal{F} \models \varphi([a_1], \dots, [a_n]) \Leftrightarrow \llbracket \varphi([a_1], \dots, [a_n]) \rrbracket \in \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow \llbracket \varphi([a_1], \dots, [a_n]) \rrbracket \in \mathcal{F} \text{ 或 } \llbracket \chi([a_1], \dots, [a_n]) \rrbracket \in \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow p_F^0 \Vdash^{\mathcal{F}} \varphi(\dots) \text{ 或 } p_F^0 \Vdash^{\mathcal{F}} \chi(\dots)$$

$$\Leftrightarrow \{i \in u \mid p_i \Vdash^{\mathcal{F}} \varphi(\dots) \vee \chi(\dots)\} \in F^0$$

$$\Leftrightarrow p_F^0 \Vdash^{\mathcal{F}} \varphi([a_1], \dots, [a_n])$$

iii) $\varphi = \varphi \wedge \chi$ のとき

$\varphi \vee \chi$ のときと同様

iv) $\varphi = \neg \varphi$ のとき

$$\llbracket \varphi([a_1], \dots, [a_n]) \rrbracket \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \llbracket \neg \varphi([a_1], \dots, [a_n]) \rrbracket \notin \mathcal{F}$$

$$\Leftrightarrow \text{not } p_F^0 \Vdash^{\mathcal{F}} \varphi(\dots)$$

$$\Leftrightarrow \{i \in u \mid p_i \Vdash^{\mathcal{F}} \neg \varphi(\dots)\} \in F^0$$

$$\Leftrightarrow \{i \in u \mid p_i \Vdash^{\mathcal{F}} \neg \varphi(\dots)\} \in F^0$$

$$\Leftrightarrow p_F^0 \Vdash^{\mathcal{F}} \neg \varphi([a_1], \dots, [a_n])$$

v) $\varphi = \exists x \psi$ のとき

$$\begin{aligned}
 \llbracket \exists x \psi(x, [a_0], \dots, [a_n]) \rrbracket \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow \exists v \exists a_0 \in P(v) \llbracket \psi([a_0], [a_0], \dots, [a_n]) \rrbracket \in \mathcal{F} \\
 &\Leftrightarrow \exists v \exists a_0 \in P(v) \exists v' \llbracket \psi(P_v^u(a_0), P_v^u(a_0), \dots) \rrbracket \in \mathcal{F} \\
 &\Leftrightarrow \exists v \exists a \in P(v) \llbracket \psi(a, P_v^u(a), \dots, P_v^u(a)) \rrbracket \in \mathcal{F} \\
 &\Leftrightarrow \exists v \exists a \in P(v) P_v^0 \Vdash^* \psi(a, \dots) \\
 &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \bigcup_{v \in u} \bigcup_{a \in P(v)} \{i \in u \mid P_i \Vdash^* \psi(a, \dots)\} \in F^0 \\
 &\Leftrightarrow \{i \in u \mid P_i \Vdash^* \exists x \psi(x, \dots)\} \in F^0 \\
 &\Leftrightarrow P_v^0 \Vdash^* \varphi([a_0], \dots, [a_n])
 \end{aligned}$$

(*) は [1] 参照)

Def $\mathcal{U}\mathcal{H}(\mathcal{I}) \subseteq \{F \mid F: \text{ultrafilter of } \text{Reg}(\mathcal{I})\}$ (但し $\text{Reg}(\mathcal{I})$ は regular open set 全体)

$\mathcal{U}\mathcal{H}(\mathcal{I})$ に $X^*(u) \subseteq \{F \in \mathcal{U}\mathcal{H}(\mathcal{I}) \mid F \ni u\}$ (但し $u \in \text{Reg}(\mathcal{I})$) を

base にして位相を入れる

$(\mathcal{I}, P)$: sheaf of $\mathcal{B}$ -st. のとき

presheaf of $\mathcal{B}$ -st $(\mathcal{U}\mathcal{H}(\mathcal{I}), P^*)$ を次の様に定義する

$$P^*(X^*(u)) \subseteq \varinjlim_{v \in u} P(v) \quad (\text{但し } C_d \text{ は dense subset なら})$$

$P^*(X^*(u))$ の定義は [1] 参照

for $b_1, \dots, b_n \in P^*(X^*(u))$

$$\llbracket R(b_1, \dots, b_n) \rrbracket \subseteq \bigvee_{v \in u} \bigvee_{\substack{c_1, \dots, c_n \in P(v) \\ P^u(c_i) = b_i}} \llbracket R(c_1, \dots, c_n) \rrbracket$$

$$\text{for } X: \text{open in } \mathcal{U}\mathcal{H}(\mathcal{I}) \quad P^*(X) \subseteq \varinjlim_{\substack{X' \in \mathcal{B} \\ X' \subset X}} P^*(X') \quad (\text{但し } \mathcal{B} \text{ は basis})$$

for $b_1, \dots, b_n \in p^*(X)$

$$[R(b_1, \dots, b_n)] \leq \bigwedge_{\substack{X' \in B \\ X' \subset X}} [R(p_{X'}^*(b_1), \dots, p_{X'}^*(b_n))]$$

Remark $(\mathcal{O}H(I), p^*)$ は一般に sheaf of $\mathcal{B}$ -al. にはなっていないが
sheaf of sets にはなる. ([17] 参照)

prop 5 $\mathcal{O}(I)$ の max-filter と $\text{Reg}(I)$ の ultrafilter は 1-1 対応する.

① $F \in \mathcal{O}H(I)$ に対し $F^\circ = \{u \in \mathcal{O}(I) \mid \neg\neg u \in F\}$ と

$F: \text{max}$ に対し $F^* = \{\neg\neg u \in \text{Reg}(I) \mid u \in F\}$ と

対応させる. 1-1 対応は明らか

Prop 6 $(I, P): \text{sheaf of } \mathcal{B}\text{-al.}$

$F \in \mathcal{O}H(I)$, $F^\circ: F$ に対応する max-filter とする

$$P_{F^\circ}^\circ \cong P_F^*$$

② 集合としての同型は [17] 参照

同型写像を $\oplus$ とする

$b_1, \dots, b_n \in P_{F^\circ}^\circ$ に対し

$$\begin{aligned} [R(b_1, \dots, b_n)]_{P_{F^\circ}^\circ} &= \bigvee_{X \ni F^\circ} \bigvee_{\substack{c_1, \dots, c_n \in p^*(X) \\ p^*(c_i) = b_i}} [R(c_1, \dots, c_n)]_{p^*(X)} \\ &= \bigvee_{u \in F^\circ} \bigvee_{\substack{c_1, \dots, c_n \in p(u) \\ p^*(c_i)(u) = b_i}} [R(c_1, \dots, c_n)]_{p(u)} \\ &= \bigvee_{\neg\neg u \in F} \bigvee_{u \subset \neg\neg u} \bigvee_{\substack{c_1, \dots, c_n \in p(u) \\ p^*(c_i)(u) = b_i}} [R(c_1, \dots, c_n)]_{p(u)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigvee_{--u \in F} \bigvee_{v \in \mathcal{A}(-u)} \bigvee_{\substack{a_1, \dots, a_n \in p(v) \\ \Theta(p^{**}(\mathcal{A}(-u)))(a_i) = \Theta(b_i)}} \llbracket R(a_1, \dots, a_n) \rrbracket_{p(v)} \\
&= \bigvee_{--u \in F} \bigvee_{v \in \mathcal{A}(-u)} \bigvee_{\substack{a_1, \dots, a_n \in p(v) \\ p^{**}(\mathcal{A}(-u))(p^{**}(a_i)) = \Theta(b_i)}} \llbracket R(a_1, \dots, a_n) \rrbracket_{p(v)} \\
&\quad (\text{AEL } p^{**}: p(v) \longrightarrow \varinjlim_{v \in \mathcal{A}(-u)} p(v)) \\
&= \bigvee_{--u \in F} \bigvee_{\substack{d_1, \dots, d_n \in p^{**}(\mathcal{A}(-u)) \\ p^{**}(\mathcal{A}(-u))(d_i) = \Theta(b_i)}} \llbracket R(d_1, \dots, d_n) \rrbracket_{p^{**}(\mathcal{A}(-u))} \\
&= \llbracket R(\Theta(b_1), \dots, \Theta(b_n)) \rrbracket_{p_F^*}
\end{aligned}$$

Th4 $(P(\mathcal{I}), P^\circ)$: locally invariant. $\mathcal{F}$: P -ultrafilter

$F^\circ \in \mathcal{X}(u)$: max-filter, $P_F^\circ \models$ maximum principle $\pi^* \mathcal{B} \upharpoonright u$

とある. F を F° に対応する ultrafilter とする.

$$P_{F/\mathcal{F}}^* \models \varphi([a]_F, \dots, [a_n]_F) \iff \{i \in u \mid P_i \models \varphi([a]_F, \dots, [a_n]_F)\} \in F^\circ$$

$\therefore$ Th3 と prop 6 より 明か

Cor (Ultrastalk Theorem) [Ellerman]

$(\mathcal{I}, P)$: sheaf of st. $F \in \text{Ult}(\mathcal{I})$, F° : F に対応する max-filter とする

$$P_F^* \models \varphi([a]_F, \dots, [a_n]_F) \text{ iff } \{i \in u \mid P_i \models \varphi([a]_F, \dots, [a_n]_F)\} \in F$$

$\therefore \mathcal{B} = \mathcal{I}$ とすればよい. Th4 の仮定を満たす $\mathcal{I}$ とは
明か

($\models$ は $\models^{\text{st}}$ と同値. $\mathcal{B} = \mathcal{I}$ のとき $\mathcal{F} = \{\mathcal{I}\}$ とある)

参考文献

- [1] D. P. Ellerman Sheaves of Structure and Generalized ultraproduct
Ann. Math. Logic 7 (1974) 163~195
- [2] F. W. Lawvere Quantifiers and sheaves
Actes, Congrès intern. math. 1970, Tome 1, 329~334
- [3] H. Volger Ultrafilters, ultrapowers and finiteness in a topos
J. Pure Appl. Algebra 6 (1975) 345~356