

多重並列ミニマル平面 Couette 乱流に対する Lyapunov 解析

京都大学・数理解析研究所 石川 寿雄

京都大学・数理解析研究所 竹広 真一

京都大学・数理解析研究所 山田 道夫

Toshio Ishikawa

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

Shin-ichi Takehiro

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

Michio Yamada

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

1 はじめに

平面 Couette 流は亜臨界な乱流遷移を起こす基本的な系として研究されてきた. Prigent ら [9] は, 乱流遷移過程にある平面 Couette 流において, 層流的な領域と乱流的な領域が共存する斜め方向パターン (ストライプパターン) が実現されることを実験的に発見した. Duguet ら [2] は平面 Couette 流の数値計算を行い, 同様のストライプパターンが現れると報告している. ストライプパターンの構造形成メカニズムについては, Barkley ら [1] による制限された計算領域を用いた検証や, Manneville [7] によるモデル化による検証, また Duguet ら [3] によるスケール分離を利用した検証などが報告されている. しかしながら, メカニズムを明解に説明したものは未だ存在しない.

一方, 平面 Couette 流の乱流に現れる局所的な乱流の構造が, 乱流が維持的となる最小領域の最小流れ単位 [4] において現れることが知られている. 具体的には, ストリーク構造が不安定化し, 渦が形成されて再びストリーク構造が回復するというサイクル (Self-Sustaining Process, 以下 SSP) が見られる. Kawahara と Kida [6] は最小流れ単位における平面 Couette 流の乱流の時間発展を力学系の軌道とみなし, 数値的に周期軌道を求めることで, SSP を不安定周期軌道間のダイナミクスとして記述した. また近年, Inubushi ら [5] は Lyapunov 解析を用いることで, SSP における構造形成サイクルを流れの不安定性を用いて

記述した。

本研究では、ストライプパターンの構造形成メカニズムを記述する試みとして、Inubushiらの手法をより大きなスケールの擾乱に対して適用し、その不安定性の解析を行う。しかし、ストライプパターンの空間スケールは最小流れ単位よりも非常に大きいため、同様の手法を直接適用すると莫大な計算コストを必要とし、実行は現実的でない。そこで本研究では主流に対しては最小流れ単位と同じサイズの空間周期条件を課し、そこに大きなスケールの擾乱を加えることを考える。これにより線形化方程式に Bloch の定理が適用できるようになる。その結果、大きなスケールを持つ擾乱に対する Lyapunov 解析を、最小流れ単位上での計算のみにより行うことが可能となる。

大きなスケールの擾乱は Bloch 波数をパラメーターとして含み、異なる Bloch 波数を持つ擾乱は異なる大スケール構造を持つ。本研究では、複数の Bloch 波数に対応する擾乱それぞれ Lyapunov 指数を求め、それらを比較することで、最も不安定となる大スケールの構造を見出すことを目指す。

2 手法

図 1 に平面 Couette 流の設定を示す。ここで流れ方向、スパン方向、平板に垂直な方向をそれぞれ x, y, z 軸とする。非圧縮粘性流体の発展方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

で与えられる。ここで $\mathbf{u}, p$ はそれぞれ速度場と圧力場を表し、 Re は Reynolds 数である。また方程式は平板の駆動の速度（上下の平板の速度差の半分）および平板間距離の半分の長さを用いて無次元化した。さらに平板上 ($z = \pm 1$) で粘着境界条件を課し、水平方向 (x, y 方向) に周期境界条件を課す。この主流に対して無限小の擾乱 $\delta \mathbf{u}, \delta p$ を加えると、擾乱の時間発展の方程式は次のようになる：

$$\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} = -\nabla \delta p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \delta \mathbf{u}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{u} = 0. \quad (4)$$

次に、図 2 のように平面 Couette 流を水平方向に $N_x \times N_y$ 個並べた領域を考える。以下ではこの領域を「多重並列領域」と呼ぶこととする。これに対応して領域サイズ $[0, L_x] \times [0, L_y] \times [-1, 1]$ の領域を「基本領域」と呼ぶこととする。今、主流と擾乱に異なる水平方向の周期境界条件を課すことを考える。すなわち、主流に対しては 基本領域での 周期境界条件を課し、擾乱に対しては 多重並列領域での 周期境界条件を課す。このとき式 (3),

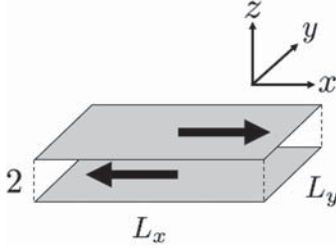


図1 平面 Couette 流の設定

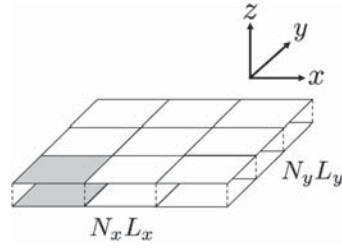


図2 多重並列領域

(4) の線形性および主流の空間周期性から Bloch の定理が適用できる．よって擾乱の関数形を

$$\delta \mathbf{u}(x, y, z, t) = \delta \mathbf{u}_{\bar{\alpha}}(x, y, z, t) \exp \left[2\pi i \left(\frac{\bar{\alpha}_x x}{L_x} + \frac{\bar{\alpha}_y y}{L_y} \right) \right] \quad (5)$$

と仮定できる．ここで $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_x, \bar{\alpha}_y)$ は Bloch 波数であり，

$$\bar{\alpha}_x = \frac{k}{N_x}, \quad \bar{\alpha}_y = \frac{\ell}{N_y} \quad \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \dots, N_x - 1 \\ \ell = 0, 1, 2, \dots, N_y - 1 \end{array} \right) \quad (6)$$

の値をとる．また $\delta \mathbf{u}_{\bar{\alpha}}(x, y, z, t)$ は $x \mapsto x + L_x$ および $y \mapsto y + L_y$ に対して不変な関数である． $\delta \mathbf{u}_{\bar{\alpha}}$ が基本領域内での擾乱の変動を表すのに対し，Bloch 因子 $\exp[2\pi i(\bar{\alpha}_x x/L_x + \bar{\alpha}_y y/L_y)]$ は基本領域より大きなスケールの変動を表す．Bloch 波数 $\bar{\alpha}$ は基本領域の領域幅 L_x, L_y を長さの単位とした変動の波数ベクトルを表している．式 (5) を線形化方程式 (3), (4) に代入して変形することで，方程式は基本領域上の計算によって解くことができる．したがって本研究の条件下では，基本領域上での計算によって，基本領域よりも大きな空間スケールの不安定性について調べることが可能となる．

本研究では複数の Bloch 波数に対して，式 (5) の関数形を持つ擾乱を用いて Lyapunov 解析を行う．用いる Bloch 波数は $\bar{\alpha}_x = 0, 1/4, 1/2, 3/4$ および $\bar{\alpha}_y = 0, 1/4, 1/2, 3/4$ の全ての組み合わせ，計 16 通りである．これは $N_x = N_y = 4$ と設定した場合の全ての Bloch 波数の場合に相当する．

主流の速度場および擾乱の速度場に対してはトロイダル-ポロイダル分解

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z, t) = & \mathbf{U}(z, t) + \nabla \times (\psi(x, y, z, t) \mathbf{e}_z) \\ & + \nabla \times \nabla \times (\phi(x, y, z, t) \mathbf{e}_z), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_{\bar{\alpha}}(x, y, z, t) = & \delta \mathbf{U}_{\bar{\alpha}}(z, t) + \nabla \times (\delta \psi_{\bar{\alpha}}(x, y, z, t) \mathbf{e}_z) \\ & + \nabla \times \nabla \times (\delta \phi_{\bar{\alpha}}(x, y, z, t) \mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (8)$$

を用いる．ここで $\mathbf{U}, \delta \mathbf{U}_{\bar{\alpha}}$ はそれぞれ $\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}_{\bar{\alpha}}$ の水平平均を表す．ただし $\bar{\alpha} \neq 0$ のとき $\delta \mathbf{U}_{\bar{\alpha}} = 0$ である．また $\mathbf{e}_z$ は z 方向の単位ベクトルである．基本領域のサイズは最小流れ単位の領域サイズである $L_x = 1.755\pi, L_y = 1.20\pi$ [4] に設定する．離散化手法は空間的に

は Fourier-Chebyshev スペクトル法を用い, 時間的には 2 次の Runge-Kutta 法を適用する. 切断波数およびグリッド数は Inubushi ら [5] の設定を用いる. 具体的には, それぞれ切断波数は x, y, z 方向にそれぞれ 8, 8, 33 と設定し, グリッド数は x, y, z 方向に 32, 32, 33 と設定する. 時間刻み幅は無次元時間で $\Delta t = 10^{-3}$ と設定する. Reynolds 数は乱流が維持的となる $Re = 450$ に設定する. 時間積分については, 主流の時間積分は $t = 0$ において開始し, 線形化方程式の時間積分は $t = 500$ において開始する. Lyapunov 解析に対しては $1000 \leq t \leq 3000$ のデータを用いる.

3 結果

図 3 に各 Bloch 波数に対応する擾乱の Lyapunov 指数の等高線をプロットした. 以下, この図の特徴について述べる.

まず, 変換 $\bar{\alpha}_x \mapsto 1 - \bar{\alpha}_x$ および $\bar{\alpha}_y \mapsto 1 - \bar{\alpha}_y$ に対する対称性を持つ. これは次のように系の対称性から導くことができる. 平面 Couette 流の境界条件は変換 $y \mapsto L_y - y$ に対して対称である. この変換によって Bloch 波数は $\bar{\alpha}_y \mapsto 1 - \bar{\alpha}_y$ と変換される. 乱流の統計的性質の対称性を仮定すれば, Lyapunov 指数もこの変換に対して対称となることが従う. 同様に平面 Couette 流の境界条件は変換 $(x, z) \mapsto (L_x - x, -z)$ に対しても対称であるので, Lyapunov 指数は変換 $\bar{\alpha}_x \mapsto 1 - \bar{\alpha}_x$ に対して対称であることが従う.

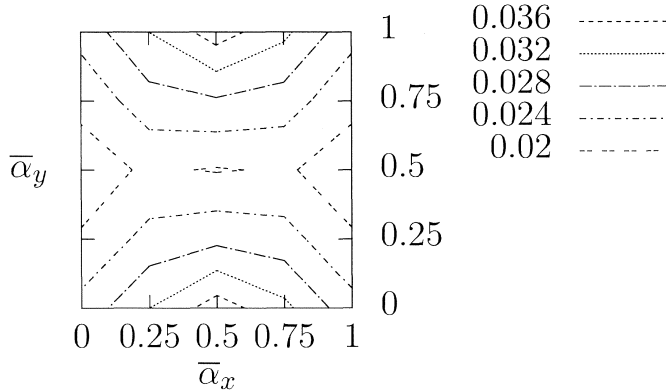


図 3 各 Bloch 波数 $\bar{\alpha}$ に対応する大きなスケールの擾乱の Lyapunov 指数

次に, いずれの Bloch 波数に対応する Lyapunov 指数も正の値をとる. すなわち本研究で用いたすべての擾乱は不安定である. これらのうち最も大きな Lyapunov 指数を持つ擾乱は Bloch 波数 $\bar{\alpha} = (1/2, 0)$ に対応し, x 方向の大きなスケールの変動を持つモードである. 一方, Prigent ら [9] や Duguet ら [2] は, 乱流遷移過程での平面 Couette 流で見られるスト

ライブパターンは、流れ方向に対して斜め方向を向くと報告している。これは本研究で得た最不安定モードの構造とは異なる。すなわち、最小流れ単位の乱流を並列した流れに対する最も不安定な無限小擾乱は、斜めパターンの直接的な原因とはいえない。

4 結論および議論

最小流れ単位の平面 Couette 乱流を水平に並列した流れを主流として用い、最小流れ単位よりも大きなスケールの擾乱によって Lyapunov 解析を行った。その結果、最も不安定な擾乱の大規模な構造の変動の方向は流れ方向に並行であることが分かった。これは乱流遷移過程にある平面 Couette 流で存在が報告されている斜め方向の層流乱流共存パターンの構造とは異なっている。

本研究の設定は 2 点の問題点が含まれている。1 つ目は主流に強い周期性を課している点である。本研究で得られた最も不安定な擾乱の構造は、最小流れ単位における乱流が持つ大規模な不安定構造である。これは最小流れ単位における乱流が大規模領域における乱流と本質的に異なっていることを示唆している。2 つ目は Lyapunov 解析で用いる擾乱は無限小なので、非線形な相互作用を考慮していない点である。したがって、不安定なモード同士の非線形な相互作用によって斜め方向の構造が卓越する可能性を排除できない。したがって、ストライブパターンの構造のメカニズムの解明のためには、最小流れ単位よりも広い領域の乱流の非線形な効果が重要である。

参考文献

- [1] Barkley, D., & Tuckerman, L. S., “Computational study of turbulent laminar patterns in Couette flow,” *Physical review letters*, 94(1) (2005), 014502.
- [2] Duguet, Y., Schlatter, P., & Henningson, D. S., “Formation of turbulent patterns near the onset of transition in plane Couette flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, 650, (2010), pp. 119-129.
- [3] Duguet, Y., & Schlatter, P., “Oblique laminar-turbulent interfaces in plane shear flows,” *Physical review letters*, 110(3) (2013), 034502.
- [4] Hamilton, J. M., Kim, J., & Waleffe, F., “Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures,” *Journal of Fluid Mechanics*, 287 (1995), 317-348.
- [5] Inubushi, M., Takehiro, S. and Yamada, M., “Regeneration cycle and the covariant Lyapunov vectors in a minimal wall turbulence,” *Physical review E*, 92 (2015), 023022.
- [6] Kawahara, G., & Kida, S., “Periodic motion embedded in plane Couette turbulence:

- regeneration cycle and burst,” *Journal of Fluid Mechanics*, 449 (2001), 291-300.
- [7] Manneville, P., “On the decay of turbulence in plane Couette flow,” *Fluid Dynamics Research*, 43(6) (2011), 065501.
- [8] Manneville, P., “On the transition to turbulence of wall-bounded flows in general, and plane Couette flow in particular,” *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 49 (2015), pp. 345-362.
- [9] Prigent, A., Grégoire, G., Chaté, H., & Dauchot, O., “Long-wavelength modulation of turbulent shear flows,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 174(1), (2003), pp. 100-113.