

時間に関して二階のある微分方程式について

姫工大 工学部

丸尾 健二

序 H を実 Hilbert 空間とし、内積を $(\cdot, \cdot)$ により ノルムを $\|\cdot\|$ で表わす。 φ は H から $(-\infty, +\infty]$ への下半連続な凸関数とする。但し $\varphi \neq 0$ 。 $\partial\varphi$ を φ の劣微分作用素 するもの

$$\partial\varphi x = \{ f \in H; \varphi(y) - \varphi(x) \geq (f, y-x) \text{ for any } y \in H \}$$

とするととき 次の方程式の解の存在と一意性について考える。

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} u + \partial\varphi u \ni f \\ u(0) = a, \quad \frac{du}{dt}(0) = b \end{cases}$$

今まで上記の問題に関しては H が実有限次元 Hilbert 空間の場合に Schatzman [1] がやっている程度であまり論文を見ない。 [2] の中にも述べてある通り上記の方程式の解の存在と一意性を示す事は 難しい問題である為 この論文では まず第一歩として $\partial\varphi$ が自己共役作用素 A と 内点をもつ閉凸集合 K 上の定義関数 $I_K(\cdot)$ の劣微分作用素 ∂I_K との和で表現される場合に関り 解の存在、一意性を議論する

事を目的にしよう。するわけ

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} u + Au + \partial I_K u \ni f \\ u(0) = a, \quad \frac{du}{dt}(0) = b \end{cases}$$

の型をした方程式を解く問題である。

仮定と定理 まず記号を示す。 $D(A^{\frac{1}{2}}) = V$ とおき V の共役空間を V^* とする。そして V におけるノルムを $\|\cdot\|_V$ V^* におけるノルムを $\|\cdot\|_{V^*}$ で表わす。又常に使用される様に $C([0, T]; V)$, $C^1([0, T]; H)$, $W^{1, \infty}([0, T]; H)$ 等は $[0, T]$ から V に値をとる連続関数全体, H に値をとる一回微分して連続な関数全体, H に値をとる超関数微分したものからなる所有界な空間等とする。さて $[0, T]$ 上の (1.1) の解を次の様に決める。

定義 $u \in C([0, T]; H)$ が (1.1) の解とは 次の条件をみたす u が存在するときである。

- 1) $u \in W^{1, \infty}([0, T]; H)$ かつ $u \in \text{weak-}C([0, T]; V)$
- 2) For any $t \in [0, T]$ に対して $u(t) \in V \cap K$
- 3) For any $t \in [0, T]$ に対して 右微分 左微分が弱の意味で存在する。(但し 0 と T においては存在するもののみ)
- 4) エネルギー不等式をみたす

(2)

$$\left\| \frac{du^\pm}{dt}(t) \right\|^2 + (Au(t), u(t)) \leq \|b\|^2 + (Aa, a) \\ + 2 \int_0^t \left(\frac{du}{ds}(s), f(s) \right) ds$$

for any $t \in [0, T]$ (0 と T では存在するもののみ)

ここで V と V^* の積も $(\cdot, \cdot)$ によって表現した

5) 次の条件を満たす $C([0, T]; H)$ 上の線型汎関数 F が存在する

$$F(\xi - u) \leq 0 \quad \text{for any } \xi \in C([0, T]; K)$$

かつ

$$\int_0^T \left(\frac{du}{ds}(s), \frac{d\xi}{ds}(s) \right) ds - \int_0^T (f(s) - Au(s), \xi(s)) ds \\ + (b, \xi(0)) - \left(\frac{du}{dt}(T), \xi(T) \right) = F(\xi)$$

for any $\xi \in C([0, T], V) \cap C^1([0, T], H)$

6) 初期条件は次の意味で満たす

$$u(0) = a \quad \text{and} \quad b - \frac{du^+}{dt}(0) \in \partial I_K a$$

定理 1 H は可分な実 Hilbert 空間として V から H への埋め込み作用素は compact 作用素とする。任意の $a \in V \cap K$ and $b \in H$ に対して (1.1) の解はすくなくとも一つは存在する。但し $f \in W^{1,\infty}([0, T]; H)$ とする。

[1] でも述べられている通り) 少なくともエネルギーを保存する解でなければ一意性はない。この為 関凸集合 K にある条件をつけて エネルギーを保存する解をみつける
(3)

事を次にやろう。 まず

定義 (energy conserving solution) u が energy conserving solution とは u が (1.1) の解であり 次の条件をみたすときをいう

- 1) $u \in C([0, T]; V)$
- 2) For any $t \in [0, T]$ $\frac{du^\pm}{dt}(t)$ が強の意味で存在し
(但し $0, T$ では存在するもののみ)
- 3) For any $t \in [0, T]$ で エネルギー等式を満たす (但し $0, T$ では存在するもののみ)。

仮定 A

- 1) For any $x \in \partial K$ (K の境界の点の集合) $\partial K x$ は次の集合に等しいとする

$$\{ \lambda \gamma(x); \lambda \geq 0, \gamma(x) \in \partial K x \text{ and } \|\gamma(x)\| = 1 \}$$

- 2) For any $x, y \in \partial K \cap G(R)$ に対して

$$\|\gamma(x) - \gamma(y)\| \leq N_R \|x - y\|$$

をみたす γ として $G(R)$ は 原点を中心半径 R の球であ

- り γ として N_R は 十分大きな R に関係する定数である。

定理 2. 仮定 A のもと 少なくとも一つの energy conserving solution が存在する。但し $f \in W^{1,\infty}([0, T], H)$ とする。

今 energy conserving solution でも 特別な場合をのぞき
(4)

一意性は存在しない ([1] 参照)。

命題 3. u は energy conserving solution として F は定義の中にでてくる汎関数としよう。仮定 A のもと任意の $f \in C([0, T]; H)$ に対して

$$F(\xi) = \int_0^T (\xi(s), \bar{\xi}(s)) d\varphi_u, \quad \varphi(0) = 0$$

をみたす左連続単調増加な関数 φ_u が唯一存在する。ここ

で

$$\bar{\xi}(s) = \begin{cases} f(u(s)) & \text{if } u(s) \in \partial K \\ 0 & \text{if } u(s) \notin \partial K \end{cases}.$$

さて $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ - energy conserving solution と定義しよう。

定義 ($\{t_i\}_{i=1}^\infty$ - energy conserving solution) $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ は $[0, T]$

で dense な set としよう。

$M_0 = \{u; u \text{ は energy conserving solution}\}$ とし

帰納的に $\{M_j\}$ を定める。

$$M_{j+1} = \{u \in M_j; \min_{w \in M_j} \varphi_w(t_j) = \varphi_u(t_j)\}, \quad j=0, 1, 2, 3, \dots$$

で定める。ここで $\bigcap_{j=1}^\infty M_j$ の元の事を (1.1) の $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ - energy conserving solution とする。

定理 4 仮定 A のもと (1.1) の $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ - energy conserving solution は一意的に存在する。但し $f \in W^{1,\infty}([0, T]; H)$ とする。

定理の証明 まず定理 1 について

∂I_K の吉田近似を $\partial I_{K,\lambda}$ であらわし I_K の吉田近似を $I_{K,\lambda}$

(5)

で表わす。 まず次の方程式を考える。

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} u_\lambda(t) + A u_\lambda(t) + \partial I_{K,\lambda} u_\lambda(t) = f(t) \\ u_\lambda(0) = a \quad \frac{du_\lambda}{dt}(0) = b \end{cases}$$

上記の解は Barbu [3] p. p. 288 によって存在一意がわかる。

次に (3.1) のエネルギー等式

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|^2 + (A u_\lambda(t), u_\lambda(t)) + 2 I_{K,\lambda} u_\lambda(t) &= \|b\|^2 + (Aa, a) \\ &+ \int_0^T \left(\frac{du_\lambda}{ds}(s), f(s) \right) ds \end{aligned}$$

がわかり

$$(3.3) \quad \left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\|^2 \leq \text{Const}$$

が得られる。

簡単の為 0 を K は内点に持つとしてしよう。このとき

$$(\partial I_{K,\lambda} u_\lambda(t), u_\lambda(t)) \geq \text{Const} \|\partial I_{K,\lambda} u_\lambda(t)\| \|u_\lambda(t)\|$$

が得られて

$$(3.4) \quad \int_0^T \|\partial I_{K,\lambda} u_\lambda(s)\| ds \leq \text{Const} \text{ を得る。}$$

埋め込みが compact である事と (3.3) から Ascoli-Arzelà の定理

を使用して $u_\lambda(t) \Rightarrow u(t)$ 一様収束としてよい (部分列 λ 又 λ_k

かく操作はやる)。又 (3.3) から $\frac{du_\lambda}{dt}(t) \rightharpoonup \frac{du}{dt}(t)$ weak- $L^2([0, T];$

$H)$ convergent としてよい。次に (3.4) と H の可分性より

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^T (\partial I_{K,\lambda} u_\lambda(s), \xi(s)) ds = F(s)$$

としてよい。(3.1) に $\xi \in C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H)$ を

積して部分積分をして上記の事柄を使用すれば定理 1 が言える。
(6)

定理2について

$$K_\delta^R = \{x \in H / \text{dist}(x, \partial K) \leq \delta \sqrt{p}^{-1}\} \quad \text{とおく} \quad (0 < \delta < 1)$$

$\forall x \in K_\delta^R$ に対して $\text{dist}(x, \partial K) = \|x - w\|$, $w \in \partial K$ なる w が唯一存在する。この w を $c(x)$ とかく。初期値 $a \in \partial K$ で十分小さい $T' > 0$ として $[0, T']$ 上で (3.1) を考えたとす。

$$\|\partial I_{K,\lambda} u_\lambda(t)\| = \lambda(t) \quad \text{とおけば}$$

$$(3.5) \quad \partial I_{K,\lambda} u_\lambda(t) = \lambda(t) \gamma(c_\lambda(t)) \quad \text{ここで} \quad c_\lambda(t) = c(u_\lambda(t)) \quad \text{とす。}$$

さて H は H の複素化した Hilbert space とする。すなわち

$$H \ni \alpha + \beta \sqrt{-1} \quad \text{は} \quad \alpha \in H, \beta \in H \quad \text{と表わせれ} \quad \text{内積として}$$

$$\langle \alpha + \beta \sqrt{-1}, \theta + \gamma \sqrt{-1} \rangle = (\alpha, \theta) + (\beta, \gamma) + ((\beta, \theta) - (\alpha, \gamma)) \sqrt{-1}$$

を入れる。又 $A(\alpha + \beta \sqrt{-1}) = A\alpha + (A\beta) \sqrt{-1}$ と定義すれば A は

H 上の自己共役正值作用素となり $A^{1/2}$ も定義できる。

ここで $\alpha + 0\sqrt{-1} = \alpha$ と表わせば $A^{1/2}\alpha = A^{1/2}\alpha$ となる。今

$\sqrt{-1}A^{1/2} = D$ とかけこれら生成素にもつ群 $\{U(t)\}$ を考える。

すると $\frac{U(t) + U(-t)}{2} \alpha$ の虚部は0となり $\frac{U(t) - U(-t)}{2} D^{-1} \alpha$ の虚部も0になることから (3.1) の解は次の表示を持つ事になる。

$$u_\lambda(t) = \frac{U(t) + U(-t)}{2} a + \frac{U(t) - U(-t)}{2} D^{-1} b \\ - \frac{1}{2} \int_0^t (U(t-s) - U(-t-s)) D^{-1} (-\lambda(s) \gamma(c_\lambda(s)) + f(s)) ds.$$

ここで $u_\lambda(t) - u_\mu(t)$ を計算し Gronwall's lemma を使用すれば $u_\lambda(t)$ の一様収束を示す事ができる。

(17)

$$\begin{aligned} \text{又 } \frac{du_\lambda}{dt}(t) &= \frac{1}{2}(\bar{U}(t) - \bar{U}(-t))D a + \frac{1}{2}(\bar{U}(t) + \bar{U}(-t))b \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t (\bar{U}(t-s) + \bar{U}(s-t))(-L_\lambda u)(\gamma(s)) + f(s) ds \end{aligned}$$

の表現と $u_\lambda(t) \Rightarrow u(t)$ に収束すれば $\gamma(s) \Rightarrow \gamma(s)$ に収束する事から $a.e. t \in [0, T]$ で 強収束かわかり (3.2) のエネルギー等式と合せて energy conserving solution の存在かわかる。但し $[0, T]$ であるためあと $u_\lambda(t) \in K$ (K の内点の集合) のときは 線型問題になりよくわかってゐる事をもちいて 解を接続すれば $[0, T]$ でもとまる。

定理 4 の証明について

energy conserving solution は Proposition 3 をもちいて $[0, T]$ 上で

$$\begin{aligned} (3.6) \quad u(t) &= \frac{1}{2}(\bar{U}(t) + \bar{U}(-t))a + \frac{1}{2}(\bar{U}(t) - \bar{U}(-t))D^{-1}b \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t (\bar{U}(t-s) - \bar{U}(s-t))D^{-1}\gamma(s) d\varphi_s \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t (\bar{U}(t-s) - \bar{U}(s-t))D^{-1}f(s) ds \end{aligned}$$

単調増加な関数集合 $\{\varphi_u\}_{u \in M_0}$ に関して Helly の選定定理を使用する。このとき部分列の選定を各 t で最小になる列で選ぶ。こうして得られた部分列を $\{\varphi_j\}$ とし それに対応する energy conserving solution を $\{u_j\}$ とする。すると (3.6) の表現と $\varphi_j \rightarrow \varphi(t)$ に $a.e. t \in [0, T]$ で収束する事をつかえば $u_j(t) \Rightarrow u(t)$ に 一樣収束する事かわかり $u(t)$ は定理と同じ操作をして energy conserving solution である事かわかる。

(8)

る。この解は定理4の求める $\{t\}_{\infty}^{\infty}$ -energy conserving solution
 である事は作りより自明である。一意性に関して2
 つの解 u, w に対応する φ_u, φ_w は定義より $\varphi_u = \varphi_w = \varphi$
 である事がわかる。又 $t > s \geq 0$ で

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2} (U(t-s) + U(s-t))u(s) + \frac{1}{2} (U(t-s) - U(s-t))D^{-1} \frac{du}{dt}(s) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_s^t D^{-1} (U(t-\xi) - U(\xi-t)) \bar{f}_u(\xi) d\varphi_u \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_s^t (U(t-\xi) - U(\xi-t)) D^{-1} f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

の表現をもつ。

この事より

$$\|u(t) - w(t)\| \leq \text{Const} \int_s^t \|u(\xi) - w(\xi)\| d\varphi$$

を得てこれを調べる事により一意性が得られる。

文 献

- [1] Schatzman, M. a class of nonlinear differential equations
 of second order in time, *Nonlinear Analysis Theory,
 Method & Application* Vol 2, No 3 355-377 (1977)
- [2] 高村, 小西 非線型発展方程式(1) 岩波講座 基礎
 数学シリーズ
- [3] Barbu, V. *Nonlinear semigroups and differential equations
 in Banach space* Noordhoff (1976)