

# Hopf 方程式の直交関数展開 による解法

東大 宇宙研 桑原 真二

## I. 統計流体力学の基礎方程式

### § 1. はじめに

こゝでは 縮まない粘性流体の乱流の問題, したがって連続の方程式, と Navier-Stokes の方程式によって記述される力学系に話を限るものとする。

流体力学と統計流体力学との違いは, 前者が一つの力学系を追跡することに対し, 後者は無限に多くの同じ力学系の集まり (ensemble 集合) の分布状態をしらべることにある。そのようなとりあつかいをするために, 位相空間を導入する。

### § 2. 位相空間

位相空間として, 我々は Hopf にしたがって,  $u(x)$ -関数空間, あるいは  $v(k)$ -関数空間をとる。こゝで  $u(x)$  は三次元位置ベクトルであり,  $v(k)$  はその波数空間  $k$  への Fourier 変換である。流体の運動は速度と圧力  $p$  (こゝでは圧力/密度とする) あるいはそれらの Fourier 変換  $dv(k), dp(k)$  :

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= \int e^{ikx} dv_x(k) = \int e^{ikx} v_x(k) dk \\ p(x) &= \int e^{ikx} dq(k) = \int e^{ikx} q(k) dk \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} dv_x(k) &= v_x(k) dk = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-ikx} u(x) \prod_{s=1}^3 \frac{e^{-i(kx)_s} - 1}{-i(x)_s} \\ dq(k) &= q(k) dk = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-ikx} p(x) \prod_{s=1}^3 \frac{e^{-i(kx)_s} - 1}{-i(x)_s} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

により記述される。  $u(x)$ ,  $p(x)$  は一般に絶対値可積分であるから、Fourier 変換ができていい。  $\int dv_x(k)$ ,  $\int dq(k)$  は Stieltjes 積分の意味がある。<sup>1)</sup> あきらかに  $v(k)$  は

$$v_x(-k) = v_x(k)^* \quad (2.3)$$

の性質をもつ。

一つの力学系の運動は、位相空間の一系の運動に対応する。このように位相運動 (phase motion) を  $T^t$  で表わす。つまり

$$T^t u(x, t_0) = u(x, t_0 + t) \quad (2.4)$$

あきらかに  $T^t$  は

$$T^t T^s = T^{t+s} = T^{s+t} \quad (2.5)$$

を満たす。

位相運動は Navier-Stokes の方程式と連続の方程式によって表わされる。

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -u_x \frac{\partial u_x}{\partial x_s} - \frac{\partial p}{\partial x_s} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x_s \partial x_s}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x_s} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\int k'_s v_x(k-k') v_0(k') dk' - i k_x g - \nu k^2 v_x, \quad k_x v_x = 0 \quad (2.7)$$

ここで  $\nu$  は動粘性率,  $\sum$  summation convention が使われている。我々は以下  $u, v$  を二種の意味に使う。つまり、 $\nu=1$  は一つの力学系の運動を表わす位相量として,  $\nu=1$  は位相空間座標として用いる。

これは、流体力学における Lagrange の見方と Euler の見方に対応する。

そこで、混同をおこさずそれぞれはなして同一の文字を用いる。

### §3. 分布関数と特性関数

統計力学における  $N$  体分布関数に対応するものとして、統計流体力学では  $u(x)$ -空間、あるいは  $v(x)$ -空間に基礎をおく分布関数  $P[\delta u(x)]$ ,  $P[\delta v(x)]$  を導入する。  $P$  は正の関数で

$$\left. \begin{aligned} \int P[\delta u] &= 1 \\ \int_{A_0} P[\delta u] &= \int_A P[\delta u] \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \int P[\delta v] &= 1 \\ \int_{A_0} P[\delta v] &= \int_A P[\delta v] \end{aligned} \right\} \quad (3.1')$$

の性質をもっている。ここで  $\Omega$  は全位相空間であり、 $A_0, A$  はその部分空間で

$$T^t A_0 = A$$

である。  $P$  は  $u(x)$  あるいは  $v(x)$  の関数、  $t$  の関数である。

我々は簡単のため

$$P[\delta u] = P[u] \delta u, \quad P[\delta v] = P[v] \delta v \quad (3.2)$$

のように書く。

$F = F(u)$  が位相関数であるとす

$$\bar{F} = \int_{\Omega} F(u) P[u] \delta u \quad (3.3)$$

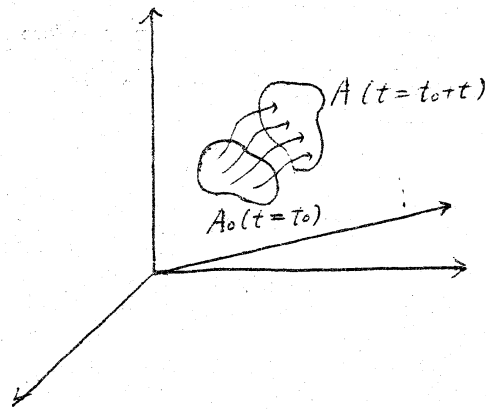


図1  $u(x)$ -空間

で統計平均 (ensemble mean) を定義する。我々は "実験で測定される平均量 (物理量の長時間平均) は近似時に統計平均とみなしうる" と仮定する。

$u(x)$  に対し dual な実関数  $y(x)$ ,  $v(k)$  に対し複素関数  $z(k)$  を導入する:

$$y(x) = \int z(k) e^{ikx} dk, \quad z(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int y(x) e^{-ikx} dx \quad (3.4)$$

但し  $y(x)$  (したがって  $z(k)$ ) は  $|x|$  あるいは  $|k|$  が十分大きいとき、十分小さく 0 になるものとする。定義により

$$z(-k) = z(k)^* \quad (3.5)$$

である。

特性関数  $\overline{\Phi}[y(x)]$ ,  $\overline{\Phi}[z(k)]$  は  $P$  の一種の Fourier 変換であり、

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Phi}[y, t] &= \overline{e^{i(y, u)}} = \int e^{i(y, u)} P(u) \delta u \\ \overline{\Phi}[z, t] &= \overline{e^{i(z, v)}} = \int e^{i(z, v)} P(v) \delta v \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

によって定義される。こゝで

$$(y, u) = \int y(x) u(x) dx, \quad (z, v) = \int z(k) v(k)^* dk \quad (3.7)$$

はスカラ積である。したがって

$$(y, u) = (2\pi)^2 (z, v) \quad (z, v)^* = (z, v) \quad (3.8)$$

である。

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Phi}[0] &= 1 \\ |\overline{\Phi}[y]| &\leq 1, \quad |\overline{\Phi}[z]| \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

が成立つ。

乱流が stationary であるとは

$$\left. \begin{aligned} P[u; t_1+t] &= P[u; t] \\ \bar{P}[y; t_1+t] &= \bar{P}[y; t] \text{ etc.} \end{aligned} \right\} \text{任意の } T, t \text{ に対し} \quad (3.1c)$$

の二とである。

#### §4. 汎関数微分

$F = F[u(x)]$  が  $u(x)$  の汎関数でありとき、 $u(x)$  を少しだけ変えて  $u(x) + \delta u(x)$  にしたとき、§3から

$$u(x) \rightarrow u(x) + \delta u(x) \quad (4.1)$$

の場合、 $F$  が

$$F[u(x)] \rightarrow F[u(x)] + \delta F[u(x)] \quad (4.2)$$

に変わったと ~~する~~ する。そのとき

$$\delta F = \int A \delta u dx \quad (4.3)$$

で表わされれば  $A \in F$  の  $u(x)$  による汎関数微分 (functional derivative) あるいは Volterra derivative といい、

$$A[u(x), x] = \frac{\partial F}{\partial u(x) dx} \quad (4.4)$$

とかく。  $u(x) = (u_\alpha(x))$  が  $n$  次元であるときは、(4.1) - (4.4) は

$$u_\alpha(x) \rightarrow u_\alpha(x) + \delta u_\alpha(x) \quad (4.1')$$

$$F[u_\alpha(x)] \rightarrow F[u_\alpha(x)] + \delta F[u_\alpha(x)] \quad (4.2')$$

$$\delta F = \int A_\alpha \delta u_\alpha dx \quad (4.3')$$

$$A_\alpha[u_\alpha(x), x] = \frac{\partial F}{\partial u_\alpha(x) dx} \quad (4.4')$$

となる。  $A$  は一般に  $u(x)$  の汎関数、 $x$  の関数である。§3のおかげで

仮定と ~~する~~ 定義により

$$\left. \begin{aligned} \overline{u_{\alpha_1}(x)} \cdot \overline{u_{\alpha_n}(x^{(n)})} &= \frac{\overline{\partial y_{\alpha_1}(x)} \cdot \overline{\partial y_{\alpha_n}(x^{(n)})}}{\overline{\partial x_1(x)} \cdot \overline{\partial x_n(x^{(n)})}} \bigg|_{x=0} \\ \overline{u_{\alpha_1}(t)}^* \cdot \overline{u_{\alpha_n}(t^{(n)})}^* &= \frac{\overline{\partial x_1(t)} \cdot \overline{\partial x_n(t^{(n)})}}{\overline{\partial t_1(t)} \cdot \overline{\partial t_n(t^{(n)})}} \bigg|_{t=0} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

は測定した平均量、速度相関、エネルギー・スプロクトルを表わす。

### §5. 事象の保存則

一つの力学系を表わす位相運動は、位相空間から消えることも、発生することも無い。このことを数学的に表わしてみよう。

先ず、流れの存在する  $x$ -空間に一稜  $2L$  の立方体を考え、各  $L$  と  
(第2図)  
を等分する。格子各点の  
速度成分を適当に番号づけ

とし

$$u_i^j = u_{\alpha}(x^i) \quad \alpha = 1, 2, 3$$

$$j = 1, 2, \dots, (2n+1)^3$$

$$(5.1)$$

とする。二のようにとり

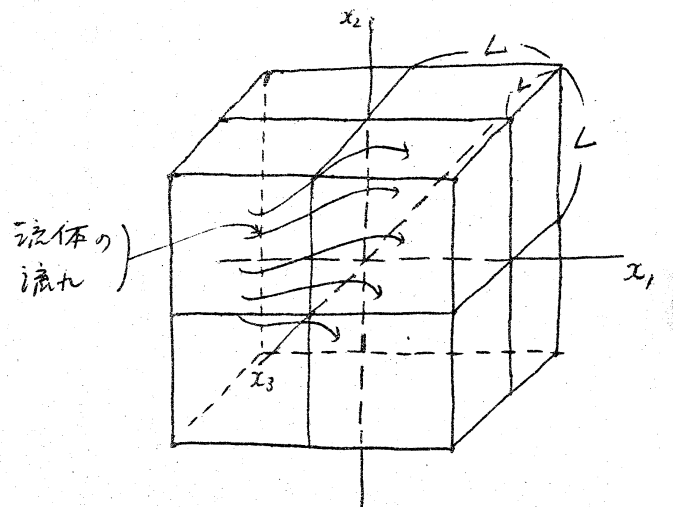
あつかいにおいて、分布関

関数は  $P[u(x)]$  は  $N =$

$(2n+1)^3$  個の  $u_i^j$  の関数とする。

$$P[u(x)] = P(u_i^j) \quad (5.2)$$

$u$ -空間中に固定した  $N$  次元部分空間  $V$  を考え、その表面  $(N-1)$  次元  
を  $S$ 、それに対する外向主法線を  $n_i$  ( $N$  次元ベクトル) とする (第3図)。



第2図  $x$ -空間

$V$ 中の“事象の数”の増加はその表面を通りこす統計物体)の事象の数に等しい  
これを式で表わすと

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V P \delta u + \int_S P u^i n^i dS = 0$$

とある。ここで  $u^i$  は

$u^i$  の時間的変化である (Euler 的)。

Gauss の定理を適用して

第3図  $u^i$ -空間

$$\int_V \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u^i} (P u^i) \right) \delta u = 0 \quad (5.3)$$

とある。  $V$  は任意であるから

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u^i} (P u^i) = 0 \quad (5.4)$$

とある。ここで  $n \rightarrow \infty$ , それから  $L \rightarrow \infty$  の極限移行を行くと

$$\frac{\partial}{\partial t} P[u(x); t] + \int \frac{\partial}{\partial u_\alpha(x)} (P[u(x); t] u_\alpha(x)) dx = 0 \quad (5.5)$$

とある。これは事象の保存を表わす関数微分方程式である。

## §6. 重における非圧縮の条件, 一様性の条件

連続の方程式は  $\int P e^{i(y, u)} \delta u x$  の演算をほどこすと

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha(x)} = 0 \quad (6.1)$$

とある。  $\Phi[y(x)]$  について

$$k_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha(k)} = 0 \quad (6.1')$$

とある。

一様性から, 我々は任意の  $\alpha$  について

$$\begin{aligned}
 (y(x+a), u(x)) &= \int y(x+a) u(x) dx \\
 &= \int y(x) u(x-a) dx = \int y(x) u(x) dx = (y(x), u(x))
 \end{aligned}$$

とある。そこで

$$\begin{aligned}
 \Phi[y(x+a)] &= \int e^{i(y(x+a), u(x))} P[\delta u] \\
 &= \int e^{i(y(x), u(x))} P[\delta u] = \Phi[y(x)]
 \end{aligned}$$

又、空間において同じ操作を行えば、結局一般性の条件として

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi[y(x+ta)] &= \Phi[y(x)] \\
 \Phi[e^{ikx} z(k)] &= \Phi[z(k)]
 \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

とある。

## §7. Hopf の方程式

$u(x)$ -空間における、事象保存の方程式:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial P}{\partial t} + \int \frac{\partial P u_\alpha}{\partial u_\alpha(x)} dx &= 0 \\
 u_\alpha &= -u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\beta}
 \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

に  $\int e^{i(y, u)} \delta u$  の演算を行えば、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int y_\alpha \left[ -i \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_\alpha \partial x_\beta \partial y_\beta \partial x} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha \partial x} - \frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha} \right] dx \quad (7.2)$$

とある。そこで

$$\Pi = i \int p e^{i(y, u)} P \delta u$$

solenoidal vector  $\tilde{y}$

$$\left. \begin{aligned}
 y &= \tilde{y} + \text{grad } \varphi, \quad \frac{\partial \tilde{y}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \\
 \tilde{y}_\alpha, \varphi &= 0 \quad \text{境界面上で}
 \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

$\varepsilon$ を導入すると、 $\pi$ -項は消えて、 $\varepsilon$ で

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int \tilde{y}_\alpha \left[ i \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_\alpha \partial x_\beta} + v \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha} \right] dx \quad (7.4)$$

とす。非圧縮の条件から

$$(y, u) = (\tilde{y}, u)$$

とて、 $\Phi$ は $\tilde{y}$ だけの関数と考えることが出来る。

$k$ -空間における保存則:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \int \frac{\partial P v_\alpha^*}{\partial v_\alpha^*} dk &= 0 \\ v_\alpha &= -i \int k'_\beta v_\beta(k-k') v_\alpha(k') \Delta_{\alpha\beta}(k') dk' - v k v_\alpha \\ \Delta_{\alpha\beta}(k) &= \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / |k|^2 \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

から上と同様の演算を行えば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \iint \tilde{z}_\alpha(k+k'') k''_\beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'_\alpha \partial k' \partial z'_\beta \partial k''} dk' dk'' \\ &\quad - v/k^2 \tilde{z}_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z_\alpha \partial k} dk \\ \tilde{z}_\alpha &= \Delta_{\alpha\beta} z_\beta \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

が得られ、非圧縮の条件より  $\Phi = \Phi[\tilde{z}; t]$  とす。

そこで、Hopfの方程式 (7.4), (7.6) を無次元の形に表わそう。

代表速度  $u_0$ , 波数  $k_0$  と

$$\left. \begin{aligned} k_0 y / u_0 &\rightarrow y, \quad k_0 x \rightarrow k, \quad u_0 k_0 t \rightarrow t \\ u_0 z &\rightarrow z, \quad k/k_0 \rightarrow k, \quad \bar{v} = \frac{v k_0}{u_0} = \frac{1}{R} \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

の1次元無次元として、非圧縮性を考慮して

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int \tilde{y}_\alpha \left[ i \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_\alpha \partial x_\beta} - \bar{v} \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha} \right] dx \quad (7.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \iint \tilde{z}_\alpha(k+k'') k''_\beta \Delta_{\alpha\mu}(k') \Delta_{\beta\lambda}(k'') \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'_\alpha \partial k' \partial z'_\beta \partial k''} dk' dk'' \\ &\quad - \bar{v} \int k^2 \tilde{z}_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z_\alpha \partial k} dk \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

そうである。ここで  $R$  は Reynolds 数である。

## II. 近似解法

### § 2. $\bar{\Psi}[\tilde{\alpha}(k)]$ の表式

1)  $\bar{\Psi}$  を  $\tilde{\alpha}$  の中の汎関数によって展開する方法を考えよう。エネルギー・スペクトルが有限になること ( $\tilde{\alpha}$  の正の整数中)、一様性 ( $\delta$ -関数) および等方性 (回転に対して不変な形) の性質から、 $\bar{\Psi}$  は

$$\begin{aligned} X_n[\tilde{\alpha}] = & \int a_{\alpha_1}^{(n)} \cdots a_n(k', \dots, k^{(n)}) \delta(k' + \dots + k^{(n)}) \tilde{\alpha}_{\alpha_1}(k') \cdots \\ & \cdots \tilde{\alpha}_{\alpha_n}(k^{(n)}) dk' \cdots dk^{(n)} \end{aligned} \quad (8.1)$$

の関数と考えられる。これを

$$\bar{\Psi}[\tilde{\alpha}] = \bar{\Psi}(X_n; n=2, \dots, \infty) \quad (8.2)$$

とかこう。Hopf は

$$\bar{\Psi} = 1 + \bar{\Psi}^2 + \bar{\Psi}^3 + \cdots \quad (8.3)$$

の形の展開を考えた。  $\bar{\Psi}^n$  は

$$\bar{\Psi}^2 = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial X_2} \Big|_{X=0} X_2, \quad \bar{\Psi}^3 = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial X_3} \Big|_{X=0} X_3, \text{ etc} \quad (8.4)$$

である。

2)  $\tilde{\alpha}$  を適当な直交関数系によって展開できるものと仮定しよう。

$\bar{\Psi}$  が  $\tilde{\alpha}$  の汎関数とはその無限個の展開係数の関数と同じことである。

三次元複素ベクトル  $\tilde{\alpha}_\alpha$  は  $\alpha$  に対する垂直面への  $\tilde{\alpha}$  の投影ベクトルである

(図4)。(そこで  $\tilde{\alpha}_\alpha$  は結局二次元複素ベクトル  $\tilde{\alpha}_\alpha$  によって表わされる。

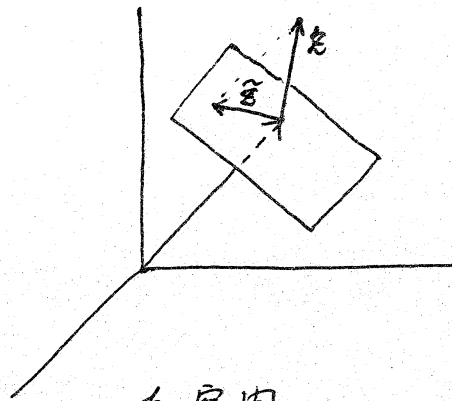
すなわち

$$\tilde{\alpha}_\alpha(k) = K_{\alpha\beta}(k) \tilde{\alpha}_\beta(k) \quad \beta=2,3 \quad (8.5)$$

$$K_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{|k| \sqrt{k_2^2 + k_3^2}}$$

$$\begin{pmatrix} -(k_2^2 + k_3^2) & 0 \\ k_1 k_2 & -k_3 |k| \\ k_1 k_3 & k_2 |k| \end{pmatrix}$$

(8.6)



k-空間

$$\tilde{\zeta}_\beta = a_\beta^n \varphi_n(k) \quad \beta=2,3$$

$$n=0,1,\dots,\infty, a_\beta^n: \text{実} \quad (8.7)$$

才4回

で表わされろ。  $\Rightarrow$  で  $\varphi_n$  は

$$\varphi_n(-k) = \varphi_n(k)^* \quad (8.8)$$

の性質を満足する直交関数系である。逆変換は

$$\tilde{\zeta} = K_\alpha^{-1} \tilde{z}_\alpha \quad (8.9)$$

$$K_\alpha^{-1} = \frac{1}{|k| \sqrt{k_2^2 + k_3^2}} \begin{pmatrix} -(k_2^2 + k_3^2), & k_1 k_2 - i k_3 |k|, & k_1 k_3 + i k_2 |k| \end{pmatrix}$$

(8.10)

で表わされろ。  $\Rightarrow$  で

$$\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_2 + i \tilde{\zeta}_3 = a^n \varphi_n(k) \quad a^n = a_2^n + i a_3^n \quad (8.11)$$

である。

 $\Rightarrow$  で

$$\langle fg \rangle = \int fg dk \quad (8.12)$$

とすれば、直交性は

$$\langle \varphi_n \varphi_m^* \rangle = \delta_{mn} A_n \quad (8.13)$$

で表わされろ。さて  $a^n$  は  $\tilde{\zeta}$  の汎関数とみろととがでろ。ちろわ

ろ

$$\langle \tilde{\zeta} \varphi_m^* \rangle = a^n \langle \varphi_n \varphi_m^* \rangle = a^n \delta_{mn} A_n \quad (8.14)$$

そこで

$$a^n[\tilde{\zeta}] = \frac{1}{A_n} \langle \tilde{\zeta} \varphi_m^* \rangle \delta_{mn} \quad (8.15)$$

である。 \$\Rightarrow\$ で \$A\_n\$ は規格化定数である。 \$a\_n\$ の \$\tilde{\zeta}\$ による汎関数微分は

$$\frac{\partial a^n}{\partial \tilde{\zeta}(k) dk} = \frac{1}{A_n} \varphi_m^* \delta_{mn} \quad (8.16)$$

で表わされる。

\$\Phi[\tilde{\zeta}(k)]\$ は無限個の \$a^n\$ の関数とみる。 :

$$\Phi[\tilde{\zeta}(k)] = \Psi(a^n; n=0, 1, \dots, \infty) \quad (8.17)$$

\$\Phi\$ の \$\tilde{\zeta}\_\alpha\$ による汎関数微分は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\zeta}_\alpha dk} = \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{\zeta}_\alpha} \frac{\partial a^n}{\partial \tilde{\zeta} dk} \frac{\partial \Psi}{\partial a^n} = \frac{1}{A_n} \frac{\partial \Psi}{\partial a^n} K_\alpha^{-1} \varphi_m^* \quad (8.18)$$

となる。

二次元の記述を考える場合には、二次元複素ベクトル \$\tilde{\zeta}\_\alpha\$ と一次元複素ベクトル \$\tilde{\zeta}\$ により表わすことができて、

$$\tilde{\zeta}_\alpha = K_\alpha \tilde{\zeta} \quad (8.5')$$

$$K_\alpha = \frac{1}{|k|} (-k_2, k_1) \quad (8.6')$$

$$\tilde{\zeta} = a^n \varphi_n(k) \quad a^n: \text{実} \quad (8.7')$$

逆変換は

$$\tilde{\zeta} = K_\alpha \tilde{\zeta}_\alpha \quad (8.8')$$

である。 \$\Phi\$ の \$\tilde{\zeta}\_\alpha\$ による汎関数微分は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\zeta}_\alpha dk} = \frac{1}{A_n} \frac{\partial \Psi}{\partial a^n} K_\alpha \varphi_n^* \quad (8.19)$$

となる。

## §9. 近似方程式の解

Hopf は近似方程式について、三つの厳密解、又物理的に興味のある近似解を求めた。

1) 弱い乱流: この場合には、非線形項から生ずる項は落すことかで  
 32

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nu \int k^2 \tilde{\tilde{\epsilon}}_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\tilde{\epsilon}}_\alpha} dk = 0 \quad (9.1)$$

といる。この方程式には、次のような特解がある。

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{-\frac{1}{2}X_2} & X_2 &= \int a_{\alpha\beta}^{(2)}(k, -k, t) \tilde{\tilde{\epsilon}}_\alpha(k) \tilde{\tilde{\epsilon}}_\beta(-k) dk \\ a_{\alpha\beta}^{(2)}(k, -k) &= a_{\alpha\beta}(k) e^{-2\nu k^2 t} \end{aligned} \quad (9.2)$$

2) stationary turbulence (非粘性): この場合には、時間微分と、粘性項が落して、次の方程式がえられる。

$$\int k_\alpha'' \Delta_{\alpha\gamma}(k') \Delta_{\beta\lambda}(k'') \epsilon_\lambda(k' + k'') \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{\tilde{\epsilon}}_\alpha' dk' \partial \tilde{\tilde{\epsilon}}_\beta'' dk''} dk' dk'' = 0 \quad (9.3)$$

この特解として

$$\Phi = e^{-\frac{1}{2}X_2} \quad a_{\alpha\beta}^{(2)}(k, -k) = a \delta_{\alpha\beta} \quad a = \text{const.} \quad (9.4)$$

がある。これは、白いスペクトル、つまり \$k\$-空間でエネルギー密度一定を表わしている。Hopf と Titchard は等方性の stationary turbulence は白いスペクトルに於けることを示した。

Kolmogoroff のスペクトル \$E(k) \propto k^{-5/3}\$ は

$$\Phi = 1 - \frac{1}{2}X^2 + \dots$$

$$a_{\alpha\beta}^{(2)}(k, -k) = a \epsilon^{2/3} |k|^{-11/3} \quad a = \text{const.} \quad (9.5)$$

で表わされる (\$\epsilon\$ は散逸エネルギー密度)。

## § 10. 直交関数展開による解法

§ 8 で行ったように任意の直交関数展開とすると, Hopf の方程式はその展開係数  $a^n$  についての無限次元関数偏微分方程式に帰着され, 次のように表わされる。

$$\Phi = \Psi(a^n, n=0, 1, \dots, \infty) \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = L_2(\Psi) - \bar{\nu} L_1(\Psi) \quad (10.2)$$

以下, 但 2 の場合について示そう。

1) 一般の乱流の性質を十分とり入れた一次元モデルである, Burgers のモデル方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + i \int k' v(k-k') v(k') dk' = -\nu k^2 v \quad (10.4)$$

について考えよう。対応する Hopf 方程式は, 明らかである。この場合には, 8 自身を展開し

$$\tilde{u} = a^n \varphi_n(k), \quad \varphi_n(-k) = \varphi_n(k)^* \quad a^n: \text{実} \quad (10.5)$$

$$L_1(\Psi) = \frac{1}{A_m} a^n \frac{\partial \Psi}{\partial a^n} \int k^2 \varphi_m(k)^* \varphi_n(k) dk \quad (10.6)$$

$$L_2(\Psi) = \frac{1}{A_\ell A_m} a^n \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^\ell \partial a^m} \int \varphi_\ell(k')^* K^\ell \varphi_m(k'')^* \varphi_n(k'+k'') dk' dk'' \quad (10.7)$$

と与えらる。

2) Navier-Stokes 乱流: 二次元乱流に対しては

$$\tilde{\xi}_\alpha = K_\alpha \tilde{f}, \quad \tilde{f} = K_\alpha \tilde{f}, \quad \tilde{f} = a^n \varphi_n \quad a^n: \text{実} \quad (10.8)$$

$$L_1(\Psi) = \frac{1}{A_m} a^n \frac{\partial \Psi}{\partial a^n} \int k^2 \varphi_m(k)^* \varphi_n(k) dk \quad (10.9)$$

$$L_2(\Psi) = \frac{1}{A_\ell A_m} a^n \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^\ell \partial a^m} \int K_\alpha(k') \Delta_{\alpha\ell}(k') \varphi_\ell(k')^* k_\beta'' K_\beta(k'') \Delta_{\beta\lambda}(k'') \varphi_m(k'')^* K_\lambda(k'+k'') \varphi_n(k'+k'') dk' dk'' \quad (10.10)$$

三次元乱流では

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_\alpha &= K_{\alpha\beta} \tilde{\zeta}_\beta, & \tilde{\zeta} &= \tilde{\zeta}_2 + i\tilde{\zeta}_3 = K_\alpha^{-1} \tilde{x}_\alpha \\ \tilde{\zeta} &= a^n \varphi_n & a^n &: \text{複素数} \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

$$L_1(\Psi) = \frac{1}{A_n} a^n \frac{\partial \Psi}{\partial a^n} / k^2 K_{\alpha\beta}(k) K_\alpha^{-1}(k) \varphi_m(k)^* \varphi_n(k) dk \quad (10.12)$$

$$L_2(\Psi) = \frac{1}{A_2 A_n} a^n \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^\alpha \partial a^m} / K_\alpha^{-1}(k') \Delta_{\alpha\beta}(k') \varphi_\alpha(k')^* K_\alpha^{-1}(k'') \Delta_{\beta\lambda}(k'') \varphi_m(k'')^* K_\beta^{-1}(k') \varphi_n(k'+k'') dk' dk'' \quad (10.13)$$

初期値問題も考える場合には Laplace 変換の方法が有効である:

$$\hat{\Psi}(a^n; p) = \int_0^\infty \Psi(a^n; t) e^{-pt} dt \quad (10.14)$$

$$L_2(\hat{\Psi}) - p L_1(\hat{\Psi}) - p \hat{\Psi} = -\Psi(a^n; 0) \quad (10.15)$$

直交関数として, Grad の (4次元の) 一般化された Hermite の多項式  $H_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(n)}(x)$  を考えよう。これは密度関数  $\omega$

$$\omega = e^{-x^2/2} \quad x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 \quad (10.16)$$

によって作られる。それは

$$H_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(n)} = \frac{(-1)^n}{\omega} \frac{\partial^n \omega}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_n}} \quad (10.17)$$

である。

$$\omega^{1/2} H_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(n)}(x) \quad (10.18)$$

は完全直交系をつくっている。それを我々の場々に適した形で倒そう

$$\begin{aligned} 1) \text{ 一次元 (Hermite の多項式)} &: \varphi_0 = e^{-x^2/4}, \varphi_1 = i x e^{-x^2/4} \\ \varphi_2 &= (x^2 - 1) e^{-x^2/4}, \varphi_3 = i(x^3 - 3x) e^{-x^2/4}, \varphi_4 = (x^4 - 6x^2 + 3) e^{-x^2/4} \\ \text{etc.} \quad A_n &= n! \sqrt{2\pi} \end{aligned} \quad (10.19)$$

$$2) \text{ 二次元} : \varphi_0 = e^{-x^2/4}, \varphi_1, \varphi_2 = i(x_1, x_2) e^{-x^2/4}$$

$$\varphi_3, \varphi_4 = (x_1^2 - 1, x_2^2 - 1) e^{-x^2/4}, \varphi_5 = x_1 x_2 e^{-x^2/4} \text{ etc } (10.20)$$

2. Burgers E.P.W.に7と3)。 $\therefore$   $a^0, a^1, a^2$  7  $\tau$  の  $\tau$  と  
(10.2)は (10.6), (10.7) を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = & -\frac{4i}{3^{3/2}} \left( a^0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^0 \partial a^1} - a^1 \frac{\partial^2 \Psi}{(\partial a^0)^2} \right) - \frac{2i}{3^{3/2}} \left( 4a^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^0 \partial a^1} - a^0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^1 \partial a^2} \right) \\ & + \frac{2}{3^{5/2}} \left( a^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^1 \partial a^2} - a^1 \frac{\partial^2 \Psi}{(\partial a^2)^2} \right) - \bar{\nu} \left( a^0 \frac{\partial \Psi}{\partial a^0} + 3a^1 \frac{\partial \Psi}{\partial a^1} + 5a^2 \frac{\partial \Psi}{\partial a^2} \right. \\ & \left. + 2a^2 \frac{\partial \Psi}{\partial a^0} + 2a^0 \frac{\partial \Psi}{\partial a^2} \right) \end{aligned} \quad (10.21)$$

の形となる。

$$\overline{\Psi}[\varepsilon(k)] = e^{-\frac{1}{2} \int e^{-\frac{1}{2} k^2} \varepsilon(k) \varepsilon(k') \delta(k+k') dk dk'} \quad \text{75あるエネルギー}$$

スペクトル  $\varepsilon(k) = e^{-\frac{1}{2} k^2}$  と初期値と  $\tau$  ; 初期値問題を与える。

$a^0$  の  $\tau$  の  $\tau$  と  $\tau$  は

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\bar{\nu} a^0 \frac{\partial \Psi}{\partial a^0} \quad (10.22)$$

となり、上の初期値に対する解は

$$\Psi = e^{-\frac{1}{2} k^2} (a^0)^2 e^{-2\bar{\nu} k^2 t} \quad (10.23)$$

である。これは弱い乱流の解である。

$a^1, a^2, \dots$  の  $\tau$  と  $\tau$  は  $\tau$  と  $\tau$  かつ  $\tau$  と  $\tau$  。

文献:

- 1) Batchelor, G.K.: The theory of homogeneous turbulence, 1953 Cambridge Univ. Press.
- 2) Grad, H.: CPAM 2 (1949) 325.
- 3) Hopf, E.: J. Rat. Mech. Anal. 1 (1952) 87-123.
- 4) Hopf, E.: J. Rat. Mech. Anal. 2 (1953) 589-91.

- 5) 細川 敏: 航空宇宙技術研報告 NAL TR-75(1964) pp12
- 6) Hosokawa, I.: JPSJ 21 (1966) 538-41.
- 7) Rosen, G.: Phys. FL. 3 (1960) 519-24, 525-8
- 8) 望友正: 乱流 1962, 棋書店