

多値論理とオートマトン

野村 昭弘

1 序 —— 問題の起源

1. 1. 論理代数とリレー回路

2 進リレー回路の設計に、論理^代代数（詳しくいえば、ブール代数の理論）が応用されるのは、よく知られているとおりである。それを初めて指摘したのは 中島 (1936)・シャノン (1938) 等であり、その要旨は、

ひとつのブール関数も表現するひとつのブール代数式が、
自然にひとつのリレー回路と表現する

ことを利用し、次のようにして設計を試みることにある。

1) 与えられた仕様（目標、計算すべき関数）を、ひとつのブール関数 f として表現する。

2) 与えられた基本素子（リレー、あるいはダイオードやトランジスタによる基本回路でもよい）の機能も、ブール関数 $f_1, f_2, \dots$ としてあらわす。（2変数関数のばあい、便宜上、2項演算記号を使ってあらわすこともある）

3) f を $f_1, f_2, \dots$ の合成関数として表現し、かつ（或る意味で）最も簡単な表現形式とえらぶ。

このようにして、関数をリレー回路が得やすくなるのである。

る。

こゝで自然に、次の2つの問題が生れる。

A) 予め指定された $f_1, f_2, \dots$ を用いて、任意に与えられた f と‘合成’することが出来るであろうか？

B) $f_1, f_2, \dots$ による合成関数として f , f の成るひとつの表現形式から出発して、より簡単な(最も簡単な)表現形式を求めるアルゴリズムを示せ。

問題 B) は, Quine, Veitch 以来, 古くから研究されている。

問題 A) は, 関数の集合

$$G = \{f_1, f_2, \dots\}$$

の性質を調べることになるが、たとえば

$$G_1 = \{x \vee y, x \wedge y, \neg x\}$$

$$G_2 = \{x | y\} \quad (\text{NAND 回路})$$

等は, ‘任意のブール関数を合成できる’ことが知られている。また,

$$G_3 = \{x \vee y, \neg x\}$$

でも充分なこと,

$$G_4 = \{x \vee y, x \wedge y\}$$

ではうまくゆかぬこと ($\neg x$ が合成できない) が知られている。

また, E. Post は, 初めてこの問題を一般的に論じ,

次に述べる結果を得ている。

最初に結果を紹介するために必要を、同章を用語・記号の説明しよう（厳密な定義は、2章に譲る）

すべて Γ -グラフ同数 Γ 集合を Ω と書く。

Γ -グラフ同数 Γ 成 Γ 集合 $G (\subseteq \Omega)$ に対し、 G に属する同数から（重複利用を許して）合成しようとしてすべて Γ -グラフ同数 Γ 集合を考え、それを $\overline{G}$ であらわす。 $G \subseteq \Omega$ が

$$1) \quad \overline{G} = \Omega$$

であるとき、 G は ‘complete’ または ‘不能’（伊吹）と呼ばれる。この言葉を使えば、我々の問題 A は、次のようにいふことができる。

A) G は complete であるか？ — G が complete であるための、必要充分条件を示せ。

G が条件 1) をみたし、さらに

$$2) \quad G' \subsetneq G \quad \text{ならば} \quad \overline{G'} \neq \Omega$$

であるとき、 G は ‘極小不能類’（伊吹）と呼ぶ。

$G \subseteq \Omega$ が、1), 2) の代りに

$$3) \quad \overline{G} \neq \Omega$$

$$4) \quad G' \subsetneq G \quad \text{ならば} \quad \overline{G'} = \Omega$$

をみたしているとき、 G は ‘極大’ であるといわれる。（極大とは、‘極大非不能’ の時である）。

定義 1 $M_0 = \{ f \in \mathcal{L} ; f(0, 0, \dots, 0) = 0 \}$

$M_1 = \{ f \in \mathcal{L} ; f(1, 1, \dots, 1) = 1 \}$

$M_2 = \{ f \in \mathcal{L} ; \text{すべて, ブール変数値 } (x_i) \text{ について, } f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)} \}$

$M_3 = \{ f \in \mathcal{L} ; \text{すべて } i \text{ について } x_i \leq y_i \text{ ならば, } f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n) \}$

$M_4 = \{ f \in \mathcal{L} ; f \text{ は, modulo 2 addition } \oplus \text{ に関する 1 次式としてあらわされる. すなわち,}$

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n \}$$

注意 M_2 はいわゆる ‘自己双対’ を同数族であり, M_3 は単調増大同数族である.

定理 1 (Post) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$ が complete であるためには, すべて M_i ($0 \leq i \leq 4$) について,

$$\mathcal{G} \not\subseteq M_i$$

であることが, 必要かつ充分である.

系 $M_0 \sim M_4$ はすべて極大であり, これらと共に, 極大な同数族はない.

伊吹等は, これらの結果を独立に証明し, また極小不能類の性質を調べて, 42 種の極小不能類を求め, かつ (或る意味で) 既約不能類はそれらに限ることを証明した.

1. 2 オートマトンの合成

本節で述べた問題 A は, そつまゝ, オートマトンの理論にも拡張できる. まず, 便宜上,

‘同じ信号系 U 上の, 多入力オートマトン’ (1)

というものを定義しておく (以下, (1) のことを単にオートマトンと呼ぶ)

定義 2 U を或る任意の空でない有限集合とする.

U 上の n 入力オートマトンとは, 関数

$$f: U^{m+n} \longrightarrow U^m \quad (\text{状態セン移関数})$$

$$g: U^{m+n} \longrightarrow U \quad (\text{出力関数})$$

および

$$\begin{aligned} \delta_0 \in U^m & \quad (m=0 \text{ の場合, } \delta_0 \text{ は } U \text{ の} \\ & \quad \text{特定要素}) \end{aligned}$$

の組

$$A = (\delta_0, f, g)$$

のことであらう.

$m (\geq 0)$ を, オートマトン A の, ‘内部状態’, ‘次元’
といふ, δ_0 を初期状態といふ.

このようにオートマトンを定義しておくとき, (U 上の) オートマトン同士, 接続・合成が, 自然に定義される. そこで, 問題 A の拡張が, 意味をもちてくる.

A) ららかじめ指定された ‘基本的なオートマトン’

$$A_1, A_2, \dots$$

と用いて、任意に与えられたオートマトン A が、(或る直当を意味で) 合成し得るためには、基本オートマトンの集合

$$\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, \dots \}$$

は、どんな性質をもたなければならぬか？

この問題を(見かけ上)弱めると、次のような問題と与えることができる。

A') 基本オートマトンの集合

$$\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, \dots \}$$

によって、任意に与えられた関数

$$f: U^n \longrightarrow U$$

を「計算する」オートマトンが合成できるためには、 $\mathcal{A}$ はどんな性質をもたなければならぬか？

注意 A' は、 A と、内部状態が 0 次元のオートマトンに限定したものである。

これらの問題は、Shannon 等が編集した Automata Studies (1956) の中で、いさ早く ~~Hinsky~~^{Kleene} および von Neumann によってとりあげられている。これに因んで、以下

A) と Kleene 型の問題

A') と Neumann 型の問題

と呼ぶことにする。

~~Minsky~~ Kleene - Neumann の問題は、‘基本的なオートマトン’としてどんなものも許すが、によっていろいろ分類できる。Minsky は、(神経細胞について、或る仮定に基づく) 或る条件をみたす、いわゆる ^(有限決) 定的オートマトン (definite automaton — ‘deterministic’ より強い) を考え、次のような事実を指摘した。

1) ‘monotone increasing automaton’ だけでは、任意のオートマトンを合成することはできない。

2) AND, OR, NOT の三つの gate 回路 (一定遅れをもつ) があれば、任意のオートマトンを実現できる。

これは $T=10, 11$ について、結果であるが、これは、一般の場合について、次の事実を示唆している。

3) $\mathcal{A}$ が、 $\mathcal{A}'$ の意味で ‘充分’ (可能) であれば、 $\mathcal{A}$ の意味でも ‘充分’ (可能) である。

これは、問題 $\mathcal{A}$ が、問題 $\mathcal{A}'$ に reduce できることを示している。

von Neumann は、彼の論文 [4] の中で、

一定の時間遅れ δ をもつ、二重 gate 回路

を基本オートマトンとする ($T=10, 11$ の場合) 問題 $\mathcal{A}'$ と考察し、次の事実を指摘した。

‘一定遅れ $\delta > 0$ をもつ NAND 回路だけでは、任意のブール関数を計算することはできない’ (遅延遅れを調整する *delay element* が必要である)。

この注意は、 $\delta = 0$ の場合と $\delta > 0$ の場合とで、問題が本質的に異なることを示すので、非常に重要であった。

注意 $\delta = 0$ ならば、二進 *gate* 回路の機能はブール関数 (NAND *gate* をら $\times 1$) によってあらわされるから、問題 A' は、ブール関数族の *completeness* の問題に一致する。

1. 3. 多値論理関数とオートマトン.

U を少なくとも2つの要素をもつ有限集合とし、

‘一定遅れ $\delta \geq 0$ をもつ U 上の *gate* 回路’

というものを想定してみよう。その回路の機能は、数学的には、ひとつの関数 (多値論理関数!)

$$f: U^n \longrightarrow U$$

(n は入力線の数, $n \geq 1$) と、定数

$$\delta \geq 0$$

この組

$$(f, \delta) \dots \dots \dots (2)$$

によってあらわされる。これを基本的なオートマトンとして活用して、Neumann 型の問題を考えることは、現在の立

場としては、充分広いものといえよう（なお、Loomis 等は、 $\Gamma = \{0, 1\}$ の場合に限って、更に広い基本オートマトンと考察している）。
主として S -definite automaton

時間量子 Δ が与えられて (clock), δ が

$$\delta = n\Delta \quad (n \text{ は非負整数})$$

の形にあらわせば、と仮定すれば、(2) の代わりに、

$$(k, n) \quad \dots \dots \dots (3)$$

と与えてもよい。次章では、その立場から、Neumann 型の問題を論じてみたい。

（なお、一般の場合、~~Minsky~~ ^{Kleene} の問題については、[5] 参照）

参考文献

- [1] Post, E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logics. Princeton (1941)
- [2] 伊吹公夫, 他『可能論理用数系の一般論』理学誌, 46, No 7, pp 934-940 (1964)
- [3] Minsky, A. Some universal elements for finite automata, Automata studies (1956)
- [4] von Neumann, J. Probabilistic Logics and the synthesis, Ibid.
- [5] Nagaki, A. Functional studies of Automata (I)

補

gate 回路 について gate 回路とは, いくつかの '入力線' から信号を受け, 一定の法則で変換を施し, 対応する信号を, 一定時間後に, 1本の出力線から送り出す装置のことである. 信号の種類は, 入出力共に同一で, その集合を $\mathcal{U}$ とする.

1) $\mathcal{U}$ は有限集合である. 以下,

$$\mathcal{U} = (k) = \{0, 1, \dots, k-1\}$$

と規定する. ($k \geq 2$)

2) 入・出力の信号は, 離散的な時間 $t \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ の関数である.

3) 時刻 $t \in \mathbb{N}$ における入力 x_i , 出力 y と $x_i(t)$, $y(t)$ であらわすことにすれば, それらの関係は, 或る

$$f \in \mathcal{Q}_n(k), \quad d \in \mathbb{N}$$

によって, 次のようにあらわされる.

$$y(t+d) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

f, d は, gate 回路それぞれに固有の関数および定数で, '出力関数' および '時間遅れ定数' と呼ばれる.

数学的には, f と d との組

$$(f, d) \in \mathcal{Q} \times \mathbb{N}$$

を, 'gate 回路' と呼んで差しつかえない.

2 多値論理関数族

2.1 諸記号

はじめに本章で用いる記号の定義を述べておく。

整数 $k \geq 2$ に対して,

$$(k) = \{0, 1, \dots, k-1\}$$

とおく。

(k) 上の n 変数関数とは, $(k)^n$ で定義された, 関数値が (k) に属する関数のことである. $k=2$ をら,

(2) 上の 3 変数関数

とは, 3 変数のブール関数 (論理関数) に他ならない。

(k) 上のすべての n 変数関数の集合を

$$\Omega_n(k)$$

と書き,

$$\Omega(k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n(k)$$

とおく ((k) は, 時に必要があれば, 省くこともある)。

$\Omega(k)$ の要素を, (k) -関数と呼ぶ。

(k) 上の gate 回路とは, $\Omega(k)$ に属する関数 f と, 非負整数 d との組

$$(f, d)$$

のことである。すべての gate 回路の集合は, 直接

$$\Omega(k) \times N$$

により、あらわされる。

さて、gate 回路の集合

$$\mathcal{F} \subseteq \Omega \times N$$

がひとつ指定されたとしよう。これに対し、

$$F_n = \{ f \in \Omega \mid (f, n) \in \mathcal{F} \}$$

とおくと、 (k) -関数族の列

$$F_0, F_1, F_2, \dots$$

が得られる。これを使って、gate 回路どうしの接合を定義したいのであるが、そっさらに、関数合成のさうとした定義と迷っておかなければならない。

関数合成 (ばらばら (k) を固定してやる。

1) $f \in \Omega_m$, $g_1, \dots, g_m \in \Omega_n$ に対し、関数

$$f(g_1 \times \dots \times g_m) \in \Omega_n$$

を、次のように定義する。

$$f(g_1 \times \dots \times g_m)(x_1, \dots, x_n)$$

$$= f(g_1(x_1 \dots x_n), \dots, g_m(x_1 \dots x_n))$$

2) $f \in \Omega_m$, $G \subseteq \Omega_n$ に対し、

$$f \circ G = \{ f(g_1 \times \dots \times g_m) \mid g_1, \dots, g_m \in G \}$$

とおく。もちろん、

$$f \circ G \subseteq \Omega_n$$

3) $f \in \Omega$, $G \subseteq \Omega$ に対し,

$$f \circ G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f \circ (G \cap \Omega_n))$$

とおく.

4) $F \subseteq \Omega$, $G \subseteq \Omega$ に対し,

$$F \circ G = \bigcup_{f \in F} f \circ G$$

とおく.

注意 こゝように定義された $\circ$ は, 結合律をみたす:

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$

Projection N 個の変数値から, i 番目の変数値をえらぶ関数を projection といふ, 記号 P_i^N であらわす.

$$P_i^N(x_1, \dots, x_N) = x_i$$

$$P_N = \{ P_i^N ; 1 \leq i \leq N \},$$

$$\mathcal{P} = \bigcup_{N=1}^{\infty} P_N$$

とおく.

注意 Projection は, 変数のおきかえと表現するのうに利用される. たとえば, $h(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, g(x_1, x_3))$

$$\iff h = f(P_2^3 \times g(P_1^3 \times P_3^3))$$

さて、いよいよ gate 回路の合成の定義にとりかかろう。

1) (f, d_0) および $(g_1, d_1), \dots, (g_m, d_m)$ によって、 (h, d) が合成できるとは、次の2つの ~~条件がみたされていること~~ 条件がみたされていることという。

$$1.1) \quad f \in \Omega_n, \quad h = f(g_1 \times \dots \times g_m)$$

$$1.2) \quad d_1 = d_2 = \dots = d_m, \quad d = d_0 + d_1$$

2) $\mathcal{F} \subseteq \Omega \times \mathbb{N}$, $\mathcal{F}' = \{(P, 0) ; P \in \mathcal{P}\}$ とする。

$\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ に属する gate 回路によって、合成できるすべての gate 回路の集合を、 $\tilde{\mathcal{F}}$ とあらわす。

定義1 $\mathcal{F} \subseteq \Omega \times \mathbb{N}$ が Ω -complete であるとは、次の条件がみたされることという。

$$\forall f \in \Omega \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (f, n) \in \mathcal{F}$$

注意 ~~Ω -completeness~~ $\tilde{\mathcal{F}}$ は、関数族 F_n を用いて、次のように特徴づけられる。

$$F^{(n)} = \{ f \in \Omega ; (f, n) \in \tilde{\mathcal{F}} \}$$

とおくことにしよう。すると、

$$1) \quad F^{(n)} \supseteq F_n$$

$$2) \quad F^{(n)} \supseteq F^{(n-s)} \circ F^{(s)} \quad (s \leq n)$$

$$3) \quad F^{(0)} \supseteq F^{(0)} \circ (F^{(0)} \cup \emptyset)$$

$$4) \quad (F^{(n)}) \text{ は, } 1) \sim 3) \text{ を満たす関数族の列で,}$$

$\subseteq$ の意味で最小である.

すると, $\tilde{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{(n)}$ であって,

$$\tilde{F} \text{ が } \Omega\text{-complete} \iff \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{(n)} = \Omega$$

後の証明の中では, 専らこの特微づけを利用する.

2. 2. 既知の結果

A. 多値論理関数族の completeness

最初に, 特殊な場合

$$F_0 \neq \emptyset, \quad F_1 = F_2 = F_3 = \dots = \emptyset$$

を考慮しよう. この場合は,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F^{(n)} = F^{(0)}$$

で, $F^{(0)}$ は, F_0 の, 次のようにして定義される 'free closure' $\bar{F}_0$ に一致する.

定義 2 $F \subseteq \Omega$ に対し, $\bar{F}$ を次のように定める.

$$1) \quad \bar{F} \supseteq F$$

$$2) \quad \bar{F} \supseteq \bar{F} \circ (\bar{F} \cup \emptyset)$$

3) $\overline{F}$ は, 1), 2) とみたす同数族の中で, $\subseteq$ の意味で最小である.

$k=2$ の場合, 問題は F_0 の completeness に帰着され, 既に述べたように, Post - 伊吹によつて, 完全に解決されている.

$k \geq 3$ の場合, 問題はやはり

$$\overline{F}_0 = \Omega(k)$$

に帰着される. これは, 多値論理同数族の completeness に他ならない. これも古くからとり扱われているが, 決定的に解かれたのは, 近年である (Rosenberg, 1965). 以下, 主要な概念と結果とを, 紹介してみよう (概念は, 多くの証明でも使用する).

1変数の (k) -同数の集合 Ω_1 と, その空でない部分集合 $S \subseteq \Omega_1$ を考える.

定義 3

$$F(S) = \{ f \in \Omega_1 ; f \circ S \subseteq S \}$$

注意 $S \subseteq \Omega_1$ だから, $f \circ S \subseteq \Omega_1$ である.

S としては, 今の場合, 次の条件とみたすものが重要である.

1) S は, 同数合成 $f \circ g$ に関して, 半群をなす

$$2) \quad S \subsetneq \Omega_1$$

$$\boxed{\{I\} \subsetneq S}$$

$$3) \quad S \text{ は恒等写像 } I(x) = x \quad \text{を含む:}$$

これらの条件を満たす $S \subseteq \Omega_1$ と, Ω_1 の

regular subsemigroup

という. すると, 次の補題が 成り立つ.

補題 1 1) 任意の $S \subseteq \Omega_1$ について, $\overline{F(S)} = F(S)$

2) S が *regular* ならば, $F(S) \neq \Omega$

定理 1 (Butler)

$\overline{F} \supseteq \Omega_1$ であるための必要充分条件は, 任意の

regular subsemigroup S について,

$$F \not\subseteq F(S)$$

となることである.

定理 2 (Post-Stupeski ~~著~~ Butler)

$$\overline{F} = \Omega$$

であるための必要かつ充分な条件は,

$$1) \quad \overline{F} \supseteq \Omega_1$$

かつ

$$2) \quad F \not\subseteq N$$

なることである. ただし, N は, $k=2$ のとき,

$$N = M_4 \quad (\text{Post})$$

で、 $k \geq 3$ のときは、次のような集合である (Stupeski)

$N =$ (全射 (onto) でない関数のすべて, 集合)

∪ (effective variable と 1 個しか含まないような
関数のすべて, 集合)

注意 $k \geq 3$ の場合, 全射でないすべての 1 変数の関数の
集合を S_1 ($\subseteq \Omega_1$) とすると, 実は

$$N = F(S_1)$$

である.

応用例 $k = 2$ の場合, regular subsemigroup は 4 つあ
って,

$$S_0 = \{x, 0\}$$

$$S_1 = \{x, 1\}$$

$$S_2 = \{x, \bar{x}\}$$

$$S_3 = \{x, 0, 1\}$$

となる. 容易にわかるように,

$$M_i = F(S_i) \quad 0 \leq i \leq 3$$

である.

極大類の概念は, 多値論理関数についてもそのまま拡張さ
れる. 定理 2 からわかるように,

$$N, F(S) \quad (S \text{ は regular})$$

の形の集合族 (有限個) の中で, $\subseteq$ の意味で極大なものか,

極大 (非可能) 類になり, それ以外に極大な類はない. また, 次の事実も, もはや明らかである.

F が complete $\iff$ 任意の極大類 M について,
 $F \not\subseteq M$.

Jablonski は, $k=3$ の場合のすべて極大類を決定した (それらは 18 個ある). この場合, 伊吹の意味での同値類も決定され, 個数もわかっている (419 個 — 宮川). 極小可能系も今や決定不能であるが, 個数が大きいので, 計算機によらなければならぬであろう.

Rosenberg は, $k \geq 3$ の場合の極大類を調べ, すべて極大類の特徴づけに成功した. (Jablonski の結果は, この結果から簡単に導かれる). 彼の証明は長大かつ難解であるが, *subsemigroup* の代わりに, 元同値 (からきよさ, 同数族) を考慮したところが特色である. 次に, 筆者の工夫した記法によって, その概念だけ紹介しよう.

(k) の要素を成分とする, n 次元タテベクトルの集合を, $V_n(k)$ と書くことにしよう. (k), 添字 n は, 時には省略する)

$$f: (k)^n \longrightarrow (k)$$

は, 自然に

$$f_n: V_n(k)^n \longrightarrow V_n(k)$$

えき代りに, $F(R)$ を考えてもよい. また, 実は

$$1 \leq n \leq 4$$

だけきえればよいこともわかってゐる (Salomaa).

Rosenberg の証明は, この Salomaa の結果に基づいてゐる.

参考文献

- [1] Rosenberg, I. Structure de la classe des fonctions définies dans un ensemble fini quelconque. CR. Acad. Sci. Paris T260 (1965)
- [2] Jablonski, J. Functional structure of k -valued logics, Trudi Math. Institute Steklova 51 (1958) pp 5 - 142.
- [3] Butler, J. On complete and independent sets of operations in finite algebras Pacific J. of Math, 10 (1960) 1169 - 1179
(functions over a finite domain)
- [4] Salomaa, A : On basic groups for the set of
Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Series A, I, }
L338 (1963)
- [5] Stupeski : CR de la Société
des Sciences et des Lettres de Varsovie, classe III,
32 Année (1939) pp 102 - 109

B 同一-delay 多値論理関数族の completeness

次に,

$$F_1 \neq \phi, \quad F_n = \phi \quad (n \neq 1)$$

の場合と考察しよう. この場合,

$$F^{(0)} = \phi,$$

$$F^{(1)} = F_1 \circ \phi$$

$$F^{(n)} = F^{(n-1)} \circ F^{(1)}$$

であるから,

$$F^n = F^{n-1} \circ F^1$$

$$F^1 = F_1 \circ \phi$$

とおく,

$$\widetilde{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^n$$

と定めると,

$$\widetilde{F}_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^{(n)}$$

となる.

定義5 $F \subseteq \Omega$ とする.

$$F \text{ が } \sim\text{-complete} \iff \widetilde{F} = \Omega$$

$$F \text{ が } \sim\text{-maximal} \iff 1) \widetilde{F} \neq \Omega$$

$$2) F' \not\supseteq F \Rightarrow \widetilde{F}' = \Omega$$

注意 これは Kudryavtsev 流の定義である. 伊吹はや、異

る定義を与え、その方が工学的に意味のある結果を含むのであるが、数学的にきちんと述べるには、少し準備が必要で、こゝでは省略する。

$\sim$ -maximal 分類の決定は、 $k=2$ の場合について、Kudryavtiev が1960年に、伊吹が（独立に、やゝ異なる定義の下で）1964年に与えた。定義の違いのために、極大類の個数が違、てくる（Kudryavtiev 8個、伊吹7個）が、可能性に因する同値類の個数は一致する。（18個）

$k \geq 3$ の場合については、次の定理が成立する。

定理3 $F \subseteq \Omega$ が $\sim$ -complete であるための必要充分条件は、次の2つである。

1) $\forall$ maximal class M ($\sim$ -max ではない)

$$\forall n : F^n \not\subseteq M \quad \dots\dots (*)$$

2) $a, b \in (k), a \neq b$ について、

$$K(a, b) = \{f \in \Omega; f(a, \dots, a) = f(b, \dots, b)\}$$

とおくと、

$$\forall a \neq b \in (k). \quad F \not\subseteq K(a, b)$$

注意 (*) の否定をとれば、

$$\exists n : F^n \subseteq M \quad \dots\dots (**)$$

つまり、 $\sim$ -complete でない同数族は、 $K(a, b)$ か、あるいは、或る maximal class の (**) を 含まれる

イミで、'べき根'になる。この maximal class の特徴づけはもうできているから、その結果を利用すれば、 $\sim$ -maximal class の特徴づけができる筈である。実際、 $k=2$ の場合、Kudryavtiev の結果は容易に導かれ、 $k=3$ の場合には、次のことがわかる。

定理4 $k=3$ の場合、 $\sim$ -maximal classes は丁度 30個 存在する。

一般の場合の特徴づけも、今や時間の問題である。

C - 一般、 Ω -completeness

一般、 $\mathcal{F} \subseteq \Omega \times \mathbb{N}$ の Ω -completeness は、

$$F_n = \{ f \in \Omega ; (f, n) \in \mathcal{F} \}$$

と利用すると、次のように特徴づけられる。

定理5 $\mathcal{F} \subseteq \Omega \times \mathbb{N}$ が Ω -complete であるためには、次の条件が必要かつ十分である。

$$1) \forall \text{ maximal class } M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq 1)$$

$$\exists m \in \mathbb{N} \quad (m \geq 0) : F^{(m,n)} \not\subseteq M$$

注意 $F^{(s)}$ の定義は、p 13

$$2) \text{ 但し } \bar{F}_0 \neq \Omega \quad \text{ならば、} \exists n.$$

$$\forall a, b \in (k), a \neq b : F^{(n)} \not\subseteq K(a, b)$$

B に述べた定理は、この定理から直ちに導かれる。

一般の場合にも、' $\mathcal{L}$ -maximal class' の定義ができれば、その特徴づけも問題にしよう。それは無限個になるが、 $k=2$ の場合には、Kudryavtiev が特徴づけに成功している（その結果も、定理 5 を使えば、割合簡単に導くことができる）。 $k \geq 3$ の場合も、やればできるところまで来ているが、未だ実行していない。

最後に、残された問題とまとめて述べておこう。

1) $\sim$ -maximal class の特徴づけ ($k \geq 4$)

2) $\mathcal{L}$ -maximal class の特徴づけ ($k \geq 3$)

定義に選れば、

3) closure operations の比較・検討 — 特に、伊吹の closure について、位置づけ

4) 基本オートマトンの拡張 — gate 回路の代りに、 $\mathcal{S}$ -definite automaton と呼ぶ (Loomis), 等。

参考文献

- [1] Kudryavtiev, V. B. Teorema Polnosti dlja odnogo klassa avtomatov bez obratnoy svyazi. Doklady Akademii Nauk 132 (1960) pp 272 - 274

3 定理の証明

本章で述べた定理のうち、定理3~5は筆者が証明したので、~~次~~以下その証明を述べる。便宜上、定理5の証明から始める。

3.1 基本定理の証明

定理 (再掲) $\mathcal{F} \subseteq \Omega \times N$ が Ω -complete

$$\iff 1) \forall M \text{ maximal } \forall n \geq 1 \exists n \geq 0 \\ F^{(n)} \notin M$$

$$\stackrel{(\geq 1)}{\iff} 2) \# \overline{F_0} \neq \Omega \text{ なら、} \\ \exists n \forall a, b \in (k) \quad a \neq b \quad F^{(n)} \notin K(a, b)$$

(証明)

($\Rightarrow$)

$$h(x, y) = \text{Max}\{x, y\} \oplus 1$$

という関数を考える。($\oplus$ は modulo k の和) これは

$$\overline{\{h\}} = \Omega$$

をみたす (Webb)

$$h'(x, y) = \text{Max}\{x, y\} \oplus (k-1)$$

とおいても、

$$\overline{\{h'\}} = \Omega$$

となる。

$\mathcal{F}$ が Ω -complete なら、

$f \notin K(a, b)$ for all $a \neq b$
 である。(証明)

1) について.

case 1. $\exists$ 定数関数 $a(x) = a \notin M$ の場合.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ が } \Omega\text{-complete} &\Rightarrow \exists m : a \in F^{(m)} \\ &\Rightarrow a \in F^{(mn)} \Rightarrow F^{(mn)} \not\subseteq M. \end{aligned}$$

case 2. $\forall$ 定数関数 $a \in M$ の場合.

$$H(x, y, u, v) = \begin{cases} h(x, y) & \text{for } u=0, v=1 \\ x & \text{for } u=v \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく (但し h は Webb の関数). すると

$$h \notin M$$

である. $\mathcal{F}$ が Ω -complete なら,

$$\exists m : H \in F^{(m)}$$

であるが,

$$Id(x) = H(x, x, x, x) \in F^{(m)}$$

であるから,

$$H = Id^{n-1} \circ H \in F^{(mn)}$$

ところが $0, 1, x \in M$ で

$$H(x, y, 0, 1) = h(x, y) \notin M$$

だから, $H \notin M$. 故に $F^{(mn)} \not\subseteq M$. (証明)

($\Leftarrow$)

補題 1 $\forall a \neq b. F^{(n)} \not\subseteq K(a, b)$

$\Rightarrow \forall m, \forall a \neq b. F^{(m,n)} \not\subseteq K(a, b)$

補題 2 $\forall a \neq b. F^{(n)} \not\subseteq K(a, b), G = F^{(n)} \cap \Omega_1$

$\Rightarrow G = \Omega_1$ (1変数関数, 全体)

または $F(G) \neq \Omega$

補題 3 $\forall a \neq b. F^{(n)} \not\subseteq K(a, b)$

$G = F^{(n)} \cap \Omega_1 \subsetneq \Omega_1 \Rightarrow \exists M \text{ max. } F(G) \subseteq M.$

以下, $\overline{F}_0 \neq \Omega$ の場合を考える.

(証明第1段) $\mathcal{F}(n) = \{ (f, i) \in \mathcal{F} ; i \leq n \}$

とおく.

$F(n)_m = \{ f \in \Omega ; (f, m) \in \mathcal{F}(n) \}$

$F(n)^{(m)} = \{ f \in \Omega ; (f, m) \in \widetilde{\mathcal{F}}(n) \}$

とおく. 明らかに,

$n_1 \leq n_2 \Rightarrow F(n_1)^{(m)} \subseteq F(n_2)^{(m)} \subseteq F^{(m)}$

$n \geq m \Rightarrow F(n)^{(m)} = F^{(m)}$

(証明第2段)

$F(n)^{(m+n)} = \bigcup_{i=1}^n F(n)^{(i)} \circ F(n)^{(m+n-i)}$

注意 $F(n)_m = \emptyset$ for $m > n.$

$$G_n = \Omega_1 \cap F(n)^{(n)}$$

と置く,

$$G_n = \bigcup_{i=1}^n F(n)^{(i)} \circ G_{(n-i)} \quad \dots\dots (*)$$

$G \subseteq \Omega_1$ は有限個しかないから, sequence (block)

$$\cancel{G_n}, G_{n+1}, \dots, G_{n+n}$$

も有限個しかない. 従って, いつかは同じ block が2回現われ, (*)式からわかるように, その先は ~~同じ block が繰り返す~~ 同じ pattern が反復してあらわれる (循環). そこで, 循環の初項を G_s , 周期を d として

$$l(n) = ds$$

$$N(n) = p \prod_{i=1}^n l(i)$$

と置く. ただし, p は

$$\forall a \neq b \quad F^{(p)} \not\subseteq K(a, b)$$

となるような定数である.

(証明の手段) $N(n)$ は $N(n-1)$, p の倍数である.

また, 任意の $n \geq 1$ について,

$$F(n)^{(N(n))} \cap \Omega_1 = F(n)^{(2N(n))} \cap \Omega_1$$

である. これを $G(n)$ とおく:

$$G(n) = F(n)^{(N(n))} \cap \Omega_1 \subseteq \Omega_1$$

明らかに

$$G(1) \subseteq G(2) \subseteq G(3) \subseteq \dots \subseteq \Omega_1$$

Ω_1 は有限集合だから, $\exists j$:

$$G(j) = G(j+1) = G(j+2) = \dots = G$$

(証明が4段) $G \neq \Omega_1$ と仮定して矛盾を導く.

$G \neq \Omega_1$ なら, 補題3 から $\exists M: F(G) \subseteq M$.

ところが 定理の仮定1) により, $\exists m \geq 0$:

$$F^{(m)}(g') \not\subseteq M \quad (\Rightarrow F^{(m)}(g') \not\subseteq F(G))$$

すなわち

$$\exists h \in F^{(m)}(g'), \quad h \notin F(G)$$

すなわち $\exists h \in F^{(m)}(g'), \exists g_1, \dots, g_n \in G$

$$h(g_1 \times \dots \times g_n) \notin G.$$

ところが, $g' = N(g)$ とおくと,

$$h \in F^{(mN(g))}(N(g))$$

$$F^{(mN(g))}(N(g)) \cap \Omega_1 = G \quad \dots (8)$$

$$F^{(N(mN(g)) - mN(g))}(mN(g))$$

$$\supseteq F(g)^{((N(mN(g)) - 1)mN(g))} \supseteq G$$

故に

(次頁注意参照)

$$F^{(N(mN(g)))}(mN(g)) \supseteq F^{(mN(g))}(mN(g)) \circ F^{(*)}(mN(g))$$

$$\supseteq h(g_1 \times \dots \times g_n) \notin G$$

$$\text{たゞ } (*) = (N(mN(g)) - mN(g))$$

これは (8) に矛盾する.

注意 $F(mN(q))^{(N(mN(q)))} = F(mN(q))^{(mN(q)N(mN(q)))}$

(証明第5段) $G = \mathcal{Q}_1$ と仮定してよい.

定理9の条件を, $n = N(q)$, $M = N$ の場合に当てはめれば,

$$\exists m : F^{(mN(q))} \not\subseteq N$$

明らかに

$$F^{(mN(q))} \supseteq G = \mathcal{Q}_1$$

だから,

$$\widetilde{F} \supseteq \widetilde{F^{(mN(q))}} = \overline{F^{(mN(q))}} = \mathcal{Q}$$

(証明)

基本定理から, 定理3と導くのは簡単である.

定理4の証明は長くなるので省略するが, 便利を補題だけ掲げておく.

補題4 $F \not\subseteq N \Rightarrow \forall n \geq 1 : F^n \not\subseteq N$

補題5 $F \not\subseteq \{1\text{-次円数}\} \Rightarrow \forall n \geq 1 :$

$$F \not\subseteq \{1\text{-次円数}\}$$

補題6 (宮川) $F(E_{01}) \cap F(E_{12}) \subseteq F(C_1)$

ただし

$$E_{ab} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \right\} \subseteq V_2(\mathfrak{p}),$$

$$C_a = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} \right\} \subseteq V_2(\mathfrak{p})$$