

非線形時系列解析と新しい予測公式

岡部靖憲 (東京大学工学部計数工学科)

§1 KM_2O -ランジュヴァン方程式論—揺動散逸定理

実際の時系列の予測問題を扱っているときに、今まで発表してきた KM_2O -ランジュヴァン方程式論を精密化する必要を感じた。新たな弱定常性の定義を与え、 KM_2O -ランジュヴァン方程式論を再構成する。

W を計量ベクトル空間とする。整数 ℓ, r ($\ell < r$) に対して、 W の中を動く曲線 $Y : \{\ell, \ell+1, \dots, r\} \rightarrow W$ を

$$\mathbf{Y} = (Y(n); \ell \leq n \leq r)$$

と書き、 W 内の一次元の流れ、パラメーター n を時間、定義域 $\{\ell, \ell+1, \dots, r\}$ を時間域と呼ぶ。自然数 d に対して、 W 内の d 次元の流れとは、 d 個の一次元の流れ $\mathbf{Y}_j = (Y_j(n); \ell \leq n \leq r)$ ($1 \leq j \leq d$) の組 $\mathbf{Y} = (Y(n); \ell \leq n \leq r)$:

$$Y(n) \equiv {}^t(Y_1(n), Y_2(n), \dots, Y_d(n)).$$

のことを言う。

一般的な記法を導入する。 W の中の二つの L 次元の縦ベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_L), \mathbf{y} = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_L)$ に対して、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の内積行列を

$$(\mathbf{x}, {}^t\mathbf{y}) \equiv ((x_j, y_h))_{1 \leq j, h \leq L}$$

として定義する。これは $L \times L$ 型の行列である。

$(W, (*, *))$ を $\mathbb{R}$ 上の計量ベクトル空間とする。 W 内の d 次元の流れ $\mathbf{X} = (X(n); -N \leq n \leq N)$ が $(1, N)$ -定常性をもつとは行列関数 $R : \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\} \rightarrow M(d; \mathbb{R})$

が存在して

$$\begin{aligned}
(X(m), {}^tX(n)) &= R(m-n) & (0 \leq \forall m, n \leq N) \\
(X(-m), {}^tX(-n)) &= R(-m+n) & (0 \leq \forall m, n \leq N) \\
(X(m), {}^tX(-1)) &= R(m+1) & (0 \leq \forall m \leq N-1) \\
(X(1), {}^tX(-n)) &= R(1+n) & (0 \leq \forall n \leq N-1)
\end{aligned}$$

が成り立つときを言い、流れ $\mathbf{X}$ を d 次元の $(1, N)$ -定常流と言う。この行列関数 R を $(1, N)$ -定常流 $\mathbf{X}$ の共分散行列関数と名づける。

p を $1 \leq p \leq N$ を満たす任意の自然数とする。 $(1, N)$ -定常流の定義の関係式が成り立つ範囲を拡げて、 $(p, N+p)$ -定常流の定義を与える。

W 内の d 次元の流れ $\mathbf{X} = (X(n); -N \leq n \leq N)$ が $(p, N+p)$ -定常性をもつとは、行列関数 $R: \{-N-p, -N-p+1, \dots, N+p-1, N+p\} \rightarrow \mathbb{M}(d; R)$ が存在して

$$\begin{aligned}
(X(m), {}^tX(n)) &= R(m-n) & (0 \leq \forall m, n \leq N) \\
(X(-m), {}^tX(-n)) &= R(-m+n) & (0 \leq \forall m, n \leq N) \\
(X(m), {}^tX(-n)) &= R(m+n) & (0 \leq \forall m \leq N, 1 \leq \forall n \leq p) \\
(X(m), {}^tX(-n)) &= R(m+n) & (1 \leq \forall m \leq p, 0 \leq \forall n \leq N)
\end{aligned}$$

が成り立つときを言い、流れ $\mathbf{X}$ を d 次元の $(p, N+p)$ -定常流と言う。この行列関数 R を $(p, N+p)$ -定常流 $\mathbf{X}$ の共分散行列関数と名づける。特に p が N のとき、即ち、 $(N, 2N)$ -定常流のことを単に定常流と呼ぶことにする。

$\mathbf{X} = (X(n); |n| \leq N)$: 計量ベクトル空間 W 内の d 次元の $(1, N)$ -定常流とする。

$$T_n^\pm = \begin{pmatrix} R(0) & R(\pm 1) & \dots & R(\pm(n-1)) \\ R(\mp 1) & R(0) & \dots & R(\pm(n-2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\mp(n-1)) & R(\mp(n-2)) & \dots & R(0) \end{pmatrix}$$

で定義し、テープリッツ行列と言う。

次のことを注意する:

$$T_1^+ = T_1^- = R(0).$$

今後、次のテープリッツ条件を満たすものとする。

$$T_n^\pm \in GL(nd; \mathbb{R}) \quad (1 \leq \forall n \leq N+1).$$

$\mathbf{X} = (X(n); |n| \leq N)$: 計量ベクトル空間 W 内の d 次元の $(1, N)$ -定常流でテープリッツ条件を満たすものとする。

ベクトルの二つの集まり $\{X_j(\ell); 1 \leq j \leq d, 0 \leq \ell \leq N-1\}, \{X_j(\ell); 1 \leq j \leq d, -N+1 \leq \ell \leq 0\}$ がそれぞれ一次独立であることを示すので、 $X(n)$ の j 成分である $X_j(n)$ の部分空間 $M_0^{n-1}(\mathbf{X})$ への射影 $P_{M_0^{n-1}(\mathbf{X})} X_j(n)$ を直接書き下すと

$$P_{M_0^{n-1}(\mathbf{X})} X_j(n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=1}^d \gamma_{+j\ell}(n, k) X_\ell(k) \quad (1 \leq j \leq d)$$

を満たす実数の組 $\{\gamma_{+j\ell}(n, k); 1 \leq n \leq N, 0 \leq k \leq n-1, 1 \leq \ell \leq d\}$ が一意的に存在する。 $d \times d$ 型の行列 $\gamma_+(n, k)$ を

$$\gamma_+(n, k) \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{+11}(n, k) & \gamma_{+12}(n, k) & \cdots & \gamma_{+1d}(n, k) \\ \gamma_{+21}(n, k) & \gamma_{+22}(n, k) & \cdots & \gamma_{+2d}(n, k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{+d1}(n, k) & \gamma_{+d2}(n, k) & \cdots & \gamma_{+dd}(n, k) \end{pmatrix}$$

で定義すると、上は次のようにベクトル表現される：

$$P_{M_0^{n-1}(\mathbf{X})} X(n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n, k) X(k).$$

したがって

$$X(n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n, k) X(k) + \nu_+(n) \quad (1 \leq n \leq N)$$

と表現される。

同様に行列の組 $\{\gamma_-(n, k); 1 \leq n \leq N, 0 \leq k \leq n-1\}$ を用いて次のような後ろ向きの方程式を得る：

$$X(-n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-(n, k) X(-k) + \nu_-(-n) \quad (1 \leq n \leq N).$$

さらに、行列 $\gamma_\pm(n, 0)$ を特別に

$$\delta_\pm(n) \equiv \gamma_\pm(n, 0)$$

と置く.

$\mathbf{X} = (X(n); |n| \leq N)$: 計量ベクトル空間 W 内の d 次元の $(1, N)$ -定常流でテプリッツ条件を満たすものとする.

ベクトルの二つの集まり $\{X_j(\ell); 1 \leq j \leq d, 0 \leq \ell \leq N-1\}, \{X_j(\ell); 1 \leq j \leq d, -N+1 \leq \ell \leq 0\}$ がそれぞれ一次独立であることを示すので, $X(n)$ の j 成分である $X_j(n)$ の部分空間 $M_0^{n-1}(\mathbf{X})$ への射影 $P_{M_0^{n-1}(\mathbf{X})}X_j(n)$ を直接書き下すと

$$P_{M_0^{n-1}(\mathbf{X})}X_j(n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=1}^d \gamma_{+j\ell}(n, k) X_\ell(k) \quad (1 \leq j \leq d)$$

を満たす実数の組 $\{\gamma_{+j\ell}(n, k); 1 \leq n \leq N, 0 \leq k \leq n-1, 1 \leq \ell \leq d\}$ が一意的に存在する. $d \times d$ 型の行列 $\gamma_+(n, k)$ を

$$\gamma_+(n, k) \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{+11}(n, k) & \gamma_{+12}(n, k) & \cdots & \gamma_{+1d}(n, k) \\ \gamma_{+21}(n, k) & \gamma_{+22}(n, k) & \cdots & \gamma_{+2d}(n, k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{+d1}(n, k) & \gamma_{+d2}(n, k) & \cdots & \gamma_{+dd}(n, k) \end{pmatrix}$$

で定義すると, 上は次のようにベクトル表現される:

$$P_{M_0^{n-1}(\mathbf{X})}X(n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n, k) X(k).$$

したがって

$$X(n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n, k) X(k) + \nu_+(n) \quad (1 \leq n \leq N)$$

と表現される.

同様に行列の組 $\{\gamma_-(n, k); 1 \leq n \leq N, 0 \leq k \leq n-1\}$ を用いて次のような後ろ向きの方程式を得る:

$$X(-n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-(n, k) X(-k) + \nu_-(-n) \quad (1 \leq n \leq N).$$

さらに, 行列 $\gamma_\pm(n, 0)$ を特別に

$$\delta_\pm(n) \equiv \gamma_\pm(n, 0)$$

と置く.

§2 KM_2O -ランジュヴァン方程式論—構成定理

今までの設定とは逆に、任意に固定した自然数 d と N に対して、 $d \times d$ の実行列からなる組 $\{V, \delta_+(n); 0 \leq n \leq N\}$ が始めに与えられているとする。但し、 V は正定値の対称行列とする。

(第一段) まず、組 $(V_+(0), V_-(0))$ を

$$V_+(0) = V_-(0) = V$$

で定める。揺動散逸定理を考慮して、三つ組 $(V_+(1), \delta_-(1), V_-(1))$ を

$$\begin{cases} V_+(1) = V_+(0) - \delta_+(1)V_-(0) {}^t\delta_+(1) \\ \delta_-(1) = V_-(0) {}^t\delta_+(1)V_+(0)^{-1} \\ V_-(1) = V_-(0) - \delta_-(1)V_+(0) {}^t\delta_-(1) \end{cases}$$

によって定める。同じく揺動散逸定理を考慮して、数学的帰納法によって、三つ組 $(V_+(n-1), \delta_-(n-1), V_-(n-1))$ から三つ組 $(V_+(n), \delta_-(n), V_-(n))$ を

$$\begin{cases} V_+(n) = V_+(n-1) - \delta_+(n)V_-(n-1) {}^t\delta_+(n) \\ \delta_-(n)V_+(n-1) = V_-(n-1) {}^t\delta_+(n) \\ V_-(n) = V_-(n-1) - \delta_-(n)V_+(n-1) {}^t\delta_-(n) \end{cases}$$

によって、 $n=2$ から $n=N$ まで構成する。その際、次のことを仮定する必要がある：

$$V_+(n) \text{ は正定値である } (1 \leq n \leq N).$$

(第二段) つぎに、 $d \times d$ の実行列からなる組 $\{\gamma_+(n, k), \gamma_-(n, k); 0 \leq k < n \leq N\}$ を、散逸散逸定理を考慮して、次のアルゴリズムで構成する：

$$\begin{cases} \gamma_+(n, k) = \gamma_+(n-1, k-1) + \delta_+(n)\gamma_-(n-1, n-k-1) \\ \gamma_-(n, k) = \gamma_-(n-1, k-1) + \delta_-(n)\gamma_+(n-1, n-k-1). \end{cases}$$

そこで行列 $\gamma_{\pm}(n, 0)$ を

$$\gamma_{\pm}(n, 0) \equiv \delta_{\pm}(n)$$

と置いた。

(第三段) 任意の計量ベクトル空間 $(W, (\star, \star))$ とその中の $d(N+1)$ 次元線形部分空間 W_+ を考え, W_+ の中の正規直交ベクトル系を $\{w_j^+; 1 \leq j \leq d(N+1)\}$ とする:

$$\begin{cases} w_j^+ \in W_+ & (1 \leq j \leq d(N+1)) \\ (w_j^+, w_k^+) = \delta_{j,k}. \end{cases}$$

このとき, 計量ベクトル空間 W 内の d 次元のホワイトノイズ流 $\xi_+ = (\xi_+(n); 0 \leq n \leq N)$ を

$$\xi_+(n) \equiv {}^t(w_{nd+1}^+, w_{nd+2}^+, \dots, w_{nd+d}^+)$$

で定める. d 次元の流れ $\xi_+ = (\xi_+(n); 0 \leq n \leq N)$ の性質は

$$(\xi_+(m), {}^t\xi_+(n)) = \delta_{m,n}I \quad (0 \leq m, n \leq N)$$

のみである.

そのとき, W 内の d 次元の流れ $\nu_+ = (\nu_+(n); 0 \leq n \leq N)$ を

$$\nu_+(n) \equiv V_+(n)\xi_+(n)$$

で定める.

$$(\nu_+(m), {}^t\nu_+(n)) = \delta_{m,n}V_+(n)$$

が成り立つ.

(第四段) W 内の d 次元の流れ $\mathbf{X}_+ = (X(n); 0 \leq n \leq N)$ を, 前向き KM_2O -ランジュヴァン方程式を考慮して, 次のアルゴリズムに従って定義する:

$$\begin{aligned} X(0) &= \nu_+(0) \\ X(n) &= - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n, k)X(k) + \nu_+(n) \quad (1 \leq n \leq N). \end{aligned}$$

構成定理. $\mathbf{X}_+$ は次の定常性を満たす:

$$(X(m), {}^tX(n)) = R(m-n)$$

(第五段) 計量ベクトル空間 $(W, (\star, \star))$ の $d(N+1)$ 次元線形部分空間 W_- を考え, W_- の中の正規直交ベクトル系を $\{w_-^j; 1 \leq j \leq d(N+1)\}$ とする:

$$\begin{cases} w_-^j \in W_- & (1 \leq j \leq d(N+1)) \\ (w_-^j, w_-^k) = \delta_{j,k}. \end{cases}$$

ただし, (第三段) での $d(N+1)$ 次元線形部分空間 W_+ の中の正規直交ベクトル系 $\{w_+^j; 1 \leq j \leq d(N+1)\}$ とは

$$(\star) \quad (w_1^+, w_2^+, \dots, w_d^+) = (w_{-1}^-, w_{-2}^-, \dots, w_{-d}^-)$$

なる関係をもつとする.

計量ベクトル空間 W 内の d 次元の規格化されたホワイトノイズ流 $\xi_- = (\xi_-(-n); -N \leq -n \leq 0)$ を次で定める:

$$\xi_-(-n) \equiv {}^t(w_{-nd-1}, w_{-nd-2}, \dots, w_{-nd-d}).$$

関係式 $(\star)$ は

$$\xi_+(0) = \xi_-(0)$$

とベクトル表示される. d 次元の流れ ξ_- を特徴づける性質は次の正規直交性である:

$$(\xi_-(-m), {}^t\xi_-(-n)) = \delta_{m,n} I \quad (0 \leq m, n \leq N).$$

W 内の d 次元の流れ $\nu_- = (\nu_-(-n); -N \leq -n \leq 0)$ を

$$\nu_-(-n) \equiv V_-(n)\xi_-(-n)$$

で定める.

$$\nu_+(0) = \nu_-(0)$$

$$(\nu_-(-m), {}^t\nu_-(-n)) = \delta_{m,n} V_-(n) \quad (0 \leq m, n \leq N)$$

が成り立つ.

(第六段) W 内の d 次元の流れ $\mathbf{X}_- = (X_-(-n); -N \leq -n \leq 0)$ を, 後ろ向き KM_2O -ランジュヴァン方程式を考慮して, 次のアルゴリズムに従って構成する:

$$X_-(0) = \nu_-(0)$$

$$X_-(-n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-(n, k) X_-(-k) + \nu_-(-n) \quad (1 \leq n \leq N).$$

構成定理. $\mathbf{X}_-$ は次の定常性を満たす: その共分散関数は流れ $\mathbf{X}_+$ のそれと

$$(X_-(-m), {}^tX_-(-n)) = (X(n), {}^tX(m))$$

なる関係を満たす.

新しい予測公式—理論. 計量ベクトル空間 $(W, (\star, \star))$ の中の d 次元ベクトル $\nu_-(-1)$ で

$$(\nu_+(n), {}^t\nu_-(-1)) = I(n, 1) (\equiv -\delta_+(n+1)V_-(n) \quad (1 \leq n \leq N-1))$$

を満たすものが存在する.

KM₂O-ランジュヴァン方程式論の新しい予測公式—データ解析. $R(M+1)$ を

$$(\star\star) \quad R(M+1) \equiv (X(M), {}^tX(-1)) \quad (\text{空間平均})$$

で定める. これによって信頼できる見本共分散関数 $R(\star)$ の数が一つ増えた. あとは前の予測公式において M を $M+1$ に置き換えて新しい予測公式が得られる.

§3 KM₂O-ランジュヴァン方程式論—予測理論

$\mathbf{X} = (X(n); |n| \leq N)$: 計量ベクトル空間 W 内の d 次元の $(1, N)$ -定常流でテーパーリッツ条件を満たすものとする.

予測公式とは, 時刻 l から時刻 r ($-N \leq l \leq r < N$) 迄の情報 $\mathbf{M}_l^r(\mathbf{X})$ を用いて, p 時刻先の未来 $X(r+p)$ ($0 < p \leq N-r$) の動きを捕まえる公式のことである.

数学としては, ベクトル $X(r+p)$ を線形部分空間 $\mathbf{M}_l^r(\mathbf{X})$ に射影したベクトル

$$P_{\mathbf{M}_l^r(\mathbf{X})}X(r+p)$$

を具体的に求めることになる.

予測する際に, $\mathbf{M}_l^r(\mathbf{X})$ と直交する情報は切り捨てる考えである.

$P_{\mathbf{M}_l^r(\mathbf{X})}X(r+p)$ を前向きの(局所的)線形予測子と名づける.

1 期先予測公式. $\mathbf{X}$ を $(1, N)$ -定常流とする. 各 ℓ, r ($-1 \leq \ell \leq r < N$) に対して

$$P_{M_1^r(\mathbf{X})} X(r+1) = - \sum_{k=\ell}^r \gamma_+(r-\ell+1, k-\ell) X(k).$$

§4 KM_2O -ランジュヴァン方程式論—データ解析

自然数 d, N を固定し, $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}(n); 0 \leq n \leq N)$ を d 次元時系列とする. 各 $\mathcal{Z}(n)$ は $\mathbb{R}^d$ の元で表現された d 次元データである.

$\mu^{\mathcal{Z}}$ — — — 時系列 $\mathcal{Z}$ の見本平均ベクトル

$$\mu^{\mathcal{Z}} \equiv \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \mathcal{Z}(n)$$

$R^{\mathcal{Z}} = (R_{jk}^{\mathcal{Z}}(*))_{1 \leq j, k \leq d}$ — — — 時系列 $\mathcal{Z}$ の見本共分散行列関数

$$R_{jk}^{\mathcal{Z}}(n) \equiv \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N-n} (\mathcal{Z}_j(n+m) - \mu^{\mathcal{Z}})(\mathcal{Z}_k(m) - \mu^{\mathcal{Z}}).$$

$\tilde{\mathcal{Z}} = (\tilde{\mathcal{Z}}(n); 0 \leq n \leq N)$ — $\mathcal{Z}$ の規格化:

$$\tilde{\mathcal{Z}}_j(n) \equiv (R_{jj}^{\mathcal{Z}}(0))^{-1} (\mathcal{Z}_j(n) - \mu^{\mathcal{Z}}).$$

$R^{\tilde{\mathcal{Z}}} = (R_{jk}^{\tilde{\mathcal{Z}}}(*))_{1 \leq j, k \leq d}$ — その見本共分散行列関数

時系列解析での経験則より, 見本共分散行列関数 $R^{\tilde{\mathcal{Z}}}(n)$ の信頼できる n の最大数 M は次で与えられる:

$$M \equiv [3\sqrt{N+1}/d] - 1.$$

$\mathcal{LD}(\tilde{\mathcal{Z}})$ を時系列 $\tilde{\mathcal{Z}}$ に付随する見本 KM_2O -ランジュヴァンデータとする:

$$\mathcal{LD}(\tilde{\mathcal{Z}}) = \{\gamma_{\pm}(\tilde{\mathcal{Z}})(n, k), \delta_{\pm}(\tilde{\mathcal{Z}})(n), V_{\pm}(\tilde{\mathcal{Z}})(\ell); 1 \leq n \leq M, 0 \leq k \leq n-1, 0 \leq \ell \leq M\}.$$

d 次元時系列 $\tilde{\mathcal{Z}} = (\tilde{\mathcal{Z}}(n); 0 \leq n \leq N)$ は弱定常性の検定 $\text{Test}(S)$ を通過したとする.

時系列 $\tilde{\mathcal{Z}}_{N-M} = (\tilde{\mathcal{Z}}(N-M+n); 0 \leq n \leq M)$ はある d 次元弱定常過程 $\mathbf{X}_{N-M} = (X_{N-M}(n); 0 \leq n \leq M)$ の実現値であり, 系 $\mathcal{LD}(\tilde{\mathcal{Z}})$ は $\mathbf{X}_{N-M}$ に付随する KM_2O -ランジュヴァンデータの候補である.

1期先予測公式 時系列 $\tilde{Z}$ の時刻 N の1期先線形予測値 $\hat{\tilde{Z}}_1(N+1)$ を求める予測公式を与える。その際の態度は、確率過程 $\mathbf{X}_{N-M}$ が1期先まで弱定常性を保って時間発展すると仮定し、時系列 $\tilde{Z}$ の時刻 $N+1$ の1期先線形予測値を

$$\hat{\tilde{Z}}_1(N+1) \equiv P_{\mathbf{M}_1^M(\mathbf{X}_{N-M})} X_{N-M}(M+1) \text{ の実現値}$$

として採用することである。1期先の予測公式において $r=M, l=1$ とし、それは次で与えられる:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{Z}}_1(N+1) &= - \sum_{k=1}^M \gamma_+(\tilde{Z})(M, k-1) \tilde{Z}(N-M+k) \\ &= - \sum_{k=0}^{M-1} \gamma_+(\tilde{Z})(M, k) \tilde{Z}(N-M+k+1). \end{aligned}$$

文献

- [1]. Okabe, Y., *On a stochastic difference equation for the multi-dimensional weakly stationary process with discrete time*, Prospect of Algebraic Analysis(ed. by M. Kashiwara and T. Kawai), Academic press, Tokyo, 1988, pp. 601-645.
- [2]. Okabe, Y. and Y. Nakano, *The theory of KM_2O -Langevin equations and its applications to data analysis (I): Stationary analysis*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 45-90.
- [3]. Okabe, Y., *Langevin 方程式と因果解析*, 数学 **43** (1991), 322-346.
- [4]. ———, *自然科学と定常過程*, 数理科学 **340** (1991), 21-28.
- [5]. ———, *Applications of the theory of KM_2O -Langevin equations to the linear prediction problem for the multi-dimensional weakly stationary time series*, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), 277-294.
- [6]. ———, *A new algorithm derived from the view-point of the fluctuation-dissipation principle in the theory of KM_2O -Langevin equations*, Hokkaido Math. J. **22** (1993), 199-209.
- [7]. Okabe, Y. and A. Inoue, *The theory of KM_2O -Langevin equations and its applications to data analysis (II): Causal analysis*, Nagoya Math. J. **134** (1994), 1-28.
- [8]. Okabe, Y. and T. Ootsuka, *Applications of the theory of KM_2O -Langevin equations to the non-linear prediction problem for the one-dimensional strictly stationary time series*, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [9]. ———, *The theory of KM_2O -Langevin equations and its applications to data analysis (III): Prediction analysis*, in preparation.
- [10]. Okabe, Y. and A. Kaneko, *The theory of KM_2O -Langevin equations and its applications to data analysis (IV): Prediction analysis*, in preparation.