

Broadened Refined Similarity Hypothesis
- 相似変数 v のスケール依存とconditional 構造関数

電気通信大学名誉教授 細川 巖 (Iwao Hosokawa)

Kolmogorov (1962) の Refined Similarity Hypothesis は、等方性乱流の r の慣性領域において、相似変数

$$v = \Delta u_r / (r \varepsilon_r)^{1/3} \quad (1)$$

(ここに Δu_r は縦方向速度差、 ε_r はスケール r の平均局所散逸率。)の統計がレイノルズ数に依らず、普遍的であることを仮説するものであるが、これが局所的に縦方向速度和 $u_+ = (u_1 + u_2) / 2$ にも依存するものであることが明らかとなった。詳細はHosokawa (2007) を見られたい。この事実のDNSによる確認がS. Chen (2007) によってなされたことは、昨年 11 月の九州大応力研での研究集会で発表した。(応力研講究録参照。)

一方、最近、Kholmyansky & Tsinober (2008)が

$$\langle u_+^2 u_- \rangle = \langle \varepsilon \rangle r / 30 \quad (2)$$

($2u_- = \Delta u_r$ 。)の関係を、 $R_\lambda \approx 1600, 3400, 5900, 10700$ で実験的に確認したという preprintを受け取った。これはPhys. Fluidsに近々公表されるようである。

そこで、永年の間乱流研究の道標となった Refined Similarity Hypothesis が、そう簡単に失効することは、多くのマルチフラクタルの研究者にとって不本意のことと考え、Broadened Refined Similarity Hypothesis (BRSH) を提唱した(Hosokawa, 2007)。それは、

” 相似変数 v の統計は $u_+(r)$ に依存し、普遍的ではないけれども、

Δu_r の(n次)構造関数は、すべて $u_+(r)$ についてensemble average したもので理論構成をすれば、これまでの Refined Similarity Hypothesis の骨組みは使用可能。

ただし、 ε_r が統計的に $u_+(r)$ に依存しないという仮定が必要。”

というものである。最後の仮定は、 ε_r についての多くのマルチフラクタル理論を独立に使える余地を残したものであるが、もしこれが成り立たなければ、マルチフラクタル構造の中に $u_+(r)$ がパラメータとして混入することになり、間歇性の簡単な解析はまず無理であろう。

(敢えてこの仮定に理屈を付けるとすれば、式(2)の示すように $u_+(r)$ は慣性領域の速度差とdecorrelationできないが、粘性領域のそれとはdecorrelationできてよいとし、 ε_r はそ

の粘性領域での散逸過程から発生する物理量の局所平均であるとするなら、これは $u_+(r)$ とdecorrelationできても、おかしくはない。しかし、いずれ検証を要する。)

さて、 v の統計が $u_+(r)$ に依存するのであれば、 v^n のconditional ensemble averageがいかに弱くても r に依存する可能性を否定できない。しかし v^n の unconditional ensemble averageを使用するBRSHの下では、間欠指数 $\mu(q)$ と Δu_r のスケーリング指数 $\xi(p)$ の関係：

$$\xi(p) = p/3 - \mu(p/3) \quad (3)$$

は無傷で保たれるだろう。他の論拠から式(3)の補正を議論することができるが(Hosokawa, 2000), それはここで発生するものとは別である。

次に、 v^n のensemble averageが $u_+(r)$ によって条件付けられる仕方を見よう。

まず v と $u_+(r)$ のjoint確率 $p(v, u_+)$ を想定し、両変数はそれぞれのrmsでnormalizeしてあるものとし、その特性関数を $\varphi(x, y; r)$ とすると

$$\varphi(x, y; r) = \exp \left[\begin{array}{l} -x^2/2 - ix^3 S/3! + x^4(K-3)/4! + \dots - x^6 c/6! + \dots \\ -ixy^2 \langle u_+^2 v \rangle / 2 + xy^3 \langle u_+^3 v \rangle / 3! + x^2 y^2 \left(\langle u_+^2 v^2 \rangle - 1 \right) / 4 \\ + x^3 y \langle u_+ v^3 \rangle / 3! + ixy^4 \left(\langle u_+^4 v \rangle - 6 \langle u_+^2 v \rangle \right) / 4! + \dots \\ -y^2/2 \end{array} \right] \quad (4)$$

と表せる。 $u_+(r)$ の無条件確率は経験的にGauss分布を仮定した。

ここに S , K は v のskewness, kurtosisであり、これ自体弱いスケーリングを持っている(Hosokawa, 2000)。どのようにして v と $u_+(r)$ のcross hyper-cumulantsが、このようにいろいろなcross momentsによって表せるかは、特性関数のTaylor展開の各係数とその次数のcross momentsになっていなければならないことを使って確認できる。cross moments

は r に依存していると考えられる。 $\langle u_+^2 v \rangle$ は、式(1)と(2)より解析的表現を与えることができるが、他のものは精度の良いDNSか実験で、次のような v^n のconditional momentsのデータ処理によって計算するしかない。

$n=1$ の場合を計算しよう。

$$\begin{aligned}
\langle v; y \rangle &= \partial / i \partial x \varphi(x, y; r) |_{x=0} \\
&= \left[-y^2 \langle u_+^2 v \rangle / 2 - iy^3 \langle u_+^3 v \rangle / 3! + y^4 \left(\langle u_+^4 v \rangle - 6 \langle u_+^2 v \rangle \right) / 4! \right] \exp[-y^2 / 2]
\end{aligned} \tag{5}$$

これの逆フーリエ変換が、或る $u_+(r)$ を与えた時の v の条件付き平均値 $\langle v; u_+(r) \rangle$ に $u_+(r)$ の無条件確率をかけたものになる。すなわち、

$$\begin{aligned}
\int \langle v; y \rangle \exp[-iyu_+] dy / (2\pi) &= \int v p(v, u_+; r) dv \\
&= \left[\langle u_+^2 v \rangle / 2 \cdot \partial^2 / \partial u_+^2 - \langle u_+^3 v \rangle / 3! \cdot \partial^3 / \partial u_+^3 + \left(\langle u_+^4 v \rangle - 6 \langle u_+^2 v \rangle \right) / 4! \cdot \partial^4 / \partial u_+^4 \right] \\
&\times \exp[-u_+^2 / 2] / \sqrt{2\pi}
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\langle u_+^2 v \rangle / 2 \cdot H_2(u_+) + \langle u_+^3 v \rangle / 3! \cdot H_3(u_+) + \left(\langle u_+^4 v \rangle - 6 \langle u_+^2 v \rangle \right) / 4! \cdot H_4(u_+) \right] \\
&\times \exp[-u_+^2 / 2] / \sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

$\langle v; u_+(r) \rangle$ の Hermite 展開係数が、高次の cross moments に関連する事情がこれで分かる。これを $u_+(r)$ で積分すれば、当然 $\langle v \rangle = 0$ になる。

同様に $n = 2$ の場合は、

$$\begin{aligned}
\langle v^2; y \rangle &= \partial^2 / i^2 \partial x^2 \varphi(x, y; r) |_{x=0} \\
&= \left[1 - y^2 \left(\langle u_+^2 v^2 \rangle - 1 \right) / 2 - iy^3 \langle u_+^3 v^2 \rangle / 3! \right. \\
&\quad \left. + y^4 \left(\langle u_+^4 v^2 \rangle - 6 \langle u_+^2 v^2 \rangle + 3 \right) / 4! + O(y^5) \right] \exp[-y^2 / 2]
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\int \langle v^2; y \rangle \exp[-iyu_+] dy / (2\pi) &= \int v^2 p(v, u_+; r) dv \\
&= \left[1 + \left(\langle u_+^2 v^2 \rangle - 1 \right) / 2 \cdot H_2(u_+) + \langle u_+^3 v^2 \rangle^2 / 3! \cdot H_3(u_+) \right. \\
&\quad \left. + \left(\langle u_+^4 v^2 \rangle - 6 \langle u_+^2 v^2 \rangle + 3 \right) / 4! \cdot H_4(u_+) + \dots \right] \exp[-u_+^2 / 2] / \sqrt{2\pi}
\end{aligned} \tag{8}$$

同様に $n = 3$ の場合の最終式は、

$$\int \langle v^3; y \rangle \exp[-iyu_+] dy / (2\pi) = \int v^3 p(v, u_+; r) dv$$

$$\begin{aligned}
&= \left(S + \langle u_+ v^3 \rangle H_1(u_+) + \left(\langle u_+^2 v^3 \rangle - S \right) / 2 \cdot H_2(u_+) + \left(\langle u_+^3 v^3 \rangle - 3 \langle u_+^3 v \rangle \right) / 3! \cdot H_3(u_+) \right) \\
&\quad + \left(\langle u_+^4 v^3 \rangle - 6 \langle u_+^2 v^3 \rangle - 15 \langle u_+^2 v \rangle + 3S \right) / 4! \cdot H_4(u_+) + \dots \quad (9) \\
&\times \exp \left[-\frac{u_+^2}{2} \right] / \sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

同様に $n = 4$ の場合の最終式は,

$$\begin{aligned}
&\int \langle v^4; y \rangle \exp[-iyu_+] dy / (2\pi) = \int v^4 p(v, u_+; r) dv \\
&= \left(K + \langle u_+ v^4 \rangle H_1(u_+) + \left(\langle u_+^2 v^2 \rangle - 4K \right) / 2 \cdot H_2(u_+) \right) \\
&\quad + \left(\langle u_+^3 v^4 \rangle - 9 \langle u_+^2 v \rangle - 3 \langle u_+ v^4 \rangle \right) / 3! \cdot H_3(u_+) \\
&\quad + \left(\langle u_+^4 v^4 \rangle - 6 \langle u_+^2 v^4 \rangle - 36 \langle u_+^2 v^2 \rangle + 21K + 42 \right) / 4! \cdot H_4(u_+) + \dots \quad (10) \\
&\times \exp \left[-u_+^2 / 2 \right] / \sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

となる。

$\langle v^2; u_+(r) \rangle$ と $\langle v^3; u_+(r) \rangle$ は, S.ChenのDNSで得られたものが前掲の応力研講究録に示してある。前者はKolmogorov常数, 後者は-4/5のconditional valueであり, いずれも $u_+(r)$ に依存して変動しているのが分かる。

式(6)-(10)から分かるように, ここに登場するすべての高次相関量はDNSなどによる精密なデータの高次モーメントのHermite展開係数を求めることにより, 順次計算することができる。ただし, 解析表現をもった $\langle u_+^2 v \rangle$ は既知としなければならない。

参考文献

- Chen, S. (2007). Private communication.
Hosokawa, I. (2000). J. Phys. Soc. Jpn. **69**, 695.
Hosokawa, I. (2007). Prog. Theor. Phys. **118**, 169.
Kholmyansky & Tsinober (2008). Preprint, submitted to Phys. Fluids.
Kolmogorov, A. N. (1962). J. Fluid Mech. **13**, 82.