

- 2) T. C. Halsey et al., Phys. Rev. A33 (1986) 1141.
- 3) N. G. Makorov, Proc. London Math. Soc. 51 (1985) 369.
- 4) P. Grassberger (unpublished).
- 5) K. Honda et al. (to be published).
- 6) T. C. Halsey et al., Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 854.
- 7) P. Meakin et al., Phys. Rev. A34 (1986) 3325.

ランダム媒質中におけるクラックの成長モデルとサイズ分布

東北大・工 原 啓 明
一橋大・経 岡 山 誠 司

図形に見られる自己相似性は直接パターンとして観察される。しかし地殻の亀裂、材質（金属、コンクリート等）に発生したクラックは、そのパターンを直接見ることは出来ず、非破壊検査によって各要素（亀裂、クラック）のサイズ分布を知るだけである。

実験によれば、サイズ分布は、状況（環境）によって、フラクタル次元に相当する log-log プロットの直線上（べき分布）には乗らない^{1), 2)}。同様な事実はランダムカッティングのサイズ分布³⁾や、情報科学⁴⁾における（相対）度数—順位を表わすいろいろのグラにも見られる。

これはある意味では、フラクタルの概念を拡張する必要性があることを示唆している。

ここでは log-log プロットの直線からのずれを示す、ランダム媒質中におけるクラックのサイズ分布を、1つのモデルプロセスによって論じる。

ランダム媒質の構成要素として、大きさや応力 (σ) に対する応答の仕方で類別されたセグメント (Seg.) を考える。Seg. の種類を E ($= A, B, \dots$) で表わす。各 Seg. は、 t (時間) —依存性のある特性長 $L(E, t)$ によって $G(L(E, t))$ 個の等質なサブセグメント (S. Seg.) に分割されるものとする。ただし、 $t < 0$ では各 Seg. の個数は、共通に G_0 個とする (図1)。 $L(E, t)$ の t —依存性を求めるため、 σ のもとで S. Seg. に検出不可能な、微小なマイクロクラック (m. c.) の成長する

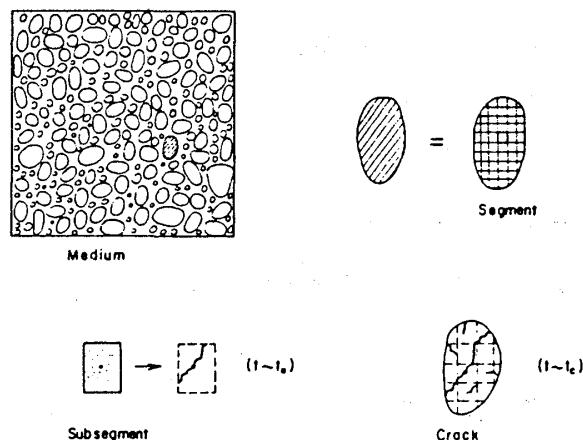


図 1

拡散に支配された凝集 (DLA) とそれに関連した現象
経路の場合の数 $N_{\text{path}}(E, t)$ を評価する。このため S. Seg. を、長さ極微小な $l_\mu (\ll L(E, t))$
の基本要素 $E_\mu (\mu = 1, 2, \dots, \nu)$ の組 (μ は方向を表わす) :

$$\begin{pmatrix} E_1, & E_2, & \dots & E_\nu \\ l_1, & l_2, & \dots & l_\nu \end{pmatrix} \quad (1)$$

で構成された“物質空間”と考えよう。 σ の作用で $\{E_\mu\}$ の 1 要素は m. c. の芽となり、発展の
プロセスは、 $\{E_\mu\}$ で“組み立てられた” N_{path} 個の 1 つの経路に沿って、他の基本要素を m. c.
に変えながら成長するものとする。

場合の数 $N_{\text{path}}(E, t)$ は、(1) を使って漸化式で表現出来る。この式を解くと $N_{\text{path}}(E, t) \sim R_E^t$ となる。ただし R_E は、 E をパラメーターとする定数で、 $1 = R_E^{-l_1 \tau_0} + R_E^{-l_2 \tau_0} + \dots + R_E^{-l_\nu \tau_0}$ (τ_0 : 単位長さ当りの時間) を満す。(1) の物質空間で成長する経路の方向 ($1, 2, \dots, \nu$) で張られる空間を、1 辺の長さ $L_{\text{path}}(E, t)$ で表わすと

$$N_{\text{path}}(E, t) \propto [L_{\text{path}}(E, t)]^\nu, \quad (2)$$

$$L_{\text{path}}(E, t) \propto R_E^{\frac{t}{\nu}} (\because N_{\text{path}}(E, t) \sim R_E^t), \quad (3)$$

実際発生する m. c. の長さ $L_{\text{mc}}(E, t)$ は、 $L_{\text{path}}(E, t)$ に比例すると考えられるから、

$$L_{\text{mc}}(E, t) (\propto L_{\text{path}}(E, t)) = A R_E^{\frac{t}{\nu}} \quad (4)$$

m. c. は、図 1 で示す様に、予定られた経路の 1 つに沿って他の基本要素を m. c. に変え、“連結した” m. c. (con. m. c.) を作る。やがて con. m. c. は、 $t \sim t_0$ で S. Seg. の境界に到達し S. Seg. を消滅させる。この時の con. m. c. の長さを方向 i を考えて、 $L_i(E, t)$ と表わす。初めに Seg. を S. Seg. に分割した特性長は $L_i(E, t)$ を i について平均したものである。

S. Seg. に関する方向性のある con. m. c. の長さを、(4) との類推から、

$$L_i(E, t) = C_i R_E^{\frac{t}{\nu}} \quad (C_i : \text{定数}) \quad (5)$$

とおく。 $L_i(E, t_0)$ で特徴づけられた個数 $G(L_i(E, t_0))$ は $t < t_0$ における個数より少なくとも 1 個だけ少なくなっている。即ち、 $L_i(E, t) \nearrow \Rightarrow G(L_i(E, t)) \searrow$ である。

m. c. 成長のシナリオは図 2 で示す。m. c. は成長段階によって I. 初期過程 ($\tau_0 < t \sim t_0$)、II. 中間過程 ($t_0 < t \sim t_c$)、III. 後期過程 ($t_c < t \sim t_{\text{con}}$) に分ける。

I. ($\tau_0 < t \sim t_0$) : con. m. c. の成長は、個数 $G(L_i(E, t))$ の減少率と con. m. c. の発生確率 $m_{\text{con. m. c.}}(\sigma, L_i(E, t))$ によって

$$-\frac{1}{G} \frac{dG}{dt} = m_{\text{con. m. c.}}(\sigma, L_i(E, t)) \quad (6)$$

と表わされ、 $m_{\text{con. m. c.}}$ は i 方向の m. c. の発生率 $m_i(\sigma)$ と (5) の成長率に比例するものとする：

$$m_{\text{con. m. c.}}(\sigma, L_i(E, t)) = \eta m_i(\sigma) \frac{1}{L_i} \frac{dL_i}{dt} \quad (7)$$

Ⅱ. ($t_0 < t \sim t_c$) : いくつかの S. Seg. にわたる con. m. c. は合体して chain を作るため、 $L_i(E, t)$ は急に大きくなる：

$$\lambda_i L_i(E, t - t_0) \equiv \tilde{L}_i(E, t), \quad (t > t_0), \quad (\lambda_i \gg 1) \quad (8)$$

合体した con. m. c. を ch. con. m. c. と略記する。ch. con. m. c. は更に合体しながら成長し、その両端が Seg. の境界に伸びると ($\sim t_c$)、Seg. 程度のサイズのクラックとして、初めて観測される。

Seg. E における ch. con. m. c. の密度を $\rho(\tilde{L}_i(E, t))$ と表わす。ch. con. m. c. の成長は ρ の時間変化によって、

$$\frac{d\rho}{dt} = m^{(\text{ch})}(\sigma, \tilde{L}_i(E, t)) \quad (9)$$

と表わされ、 $m^{(\text{ch})}(\sigma, \tilde{L}_i(E, t))$ (ch. con. m. c. の発生確率) および、 $t_0 \sim t_c$ の平均の発生率 $\langle m^{(\text{ch})} \rangle$ は、 $G(\tilde{L}_i(E, t))$ と

$$\frac{1}{\Delta t_{0c}} \int_{t_0}^{t_c} m^{(\text{ch})}(\sigma, \tilde{L}_i(E, t')) dt' = \langle m^{(\text{ch})} \rangle = -k_E G(\tilde{L}_i(E, t)) \quad (10)$$

$$(\Delta t_{0c} = t_c - t_0, \quad k > 0)$$

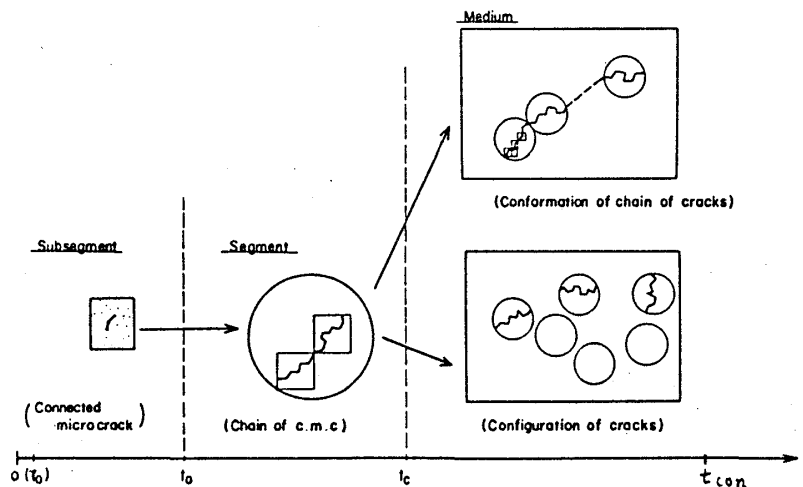


図 2

拡散に支配された凝集 (DLA) とそれに関連した現象で結ばれているものとする。即ち $G \searrow \Rightarrow \langle m^{(\text{ch})} \rangle \nearrow$ 。(9), (10) で求めた $\Delta \rho(\tilde{L}_i(E, t)) (= \rho(\tilde{L}_i(E, t)) - \rho(\tilde{L}_i(E, t_0)))$ を使って媒質中のクラックの総数 $Q(t)$ を評価すると

$$Q(t) = - \sum_i \sum_E k_E N_E G(\tilde{L}_i(E, t)) \equiv \sum_i Q_i(t). \quad (11)$$

(N_E : E 種の Seg. の個数)

観測可能な i 方向のクラックが発生する確率 $Q_i(t) / \sum_i Q_i(t)$ は $m(\sigma)$ として, (6), (7) から $G(\tilde{L}_i(E, t))$ を求め, (8) でスケーリングを行うと

$$\frac{Q_i(t)}{Q(t)} = \frac{\lambda_i^{-D}}{\sum_i \lambda_i^{-D}}, \quad (D = \eta m(\sigma)) \quad (12)$$

σ をかけた時の λ_i の i 依存性を, 具体的に $B_0(\sigma)i$ ($B_0(\sigma)$: 定数) とし, σ の容易軸に近い方向軸から番号をつける。長さ $\tilde{L}_i(\sigma)$ を

$$\tilde{L}_i(\sigma) = \lambda_i A_0(\sigma) R_0(\sigma)^{\frac{t}{\nu}} \quad (\lambda_i = B_0(\sigma)i) \quad (13)$$

で定義すると, $\tilde{L}_i(\sigma)$ の大小は, σ の容易軸に近い方向軸の順に

$$\tilde{L}_1(\sigma) < \tilde{L}_2(\sigma) < \dots \quad (14)$$

となる。

式(12)の分母に $A_0(\sigma) R_0(\sigma)^{\frac{t}{\nu}}$ をかけると,

$$\frac{Q_i(t)}{Q(t)} = \frac{\tilde{L}_i(\sigma)^{-D}}{\sum_i \tilde{L}_i(\sigma)^{-D}} \equiv m^{(\text{cr})}(\tilde{L}_i(\sigma)) \quad (15)$$

$m^{(\text{cr})}(\tilde{L}_i(\sigma))$ は, 長さ(13) (Seg. には関係しない) のクラックの発生確率を表わす。

Ⅲ. ($t_c < t \sim t_{\text{con}}$) : 媒質の状態は長さ $\tilde{L}_i(\sigma_1)$ のクラックの発生のパターンによって, (1°) 鎖状型, (2°) 分散型に分ける。いずれの場合も, 方向 i で長さ $\tilde{L}_i(\sigma)$ のクラック 数の組 $(n_1, n_2, \dots, n_K)$ によって, 規定される状態 $W^{(S)}(n_1, n_2, \dots, n_K : N)$, ($S = 1^\circ, 2^\circ$) は, 次の一般化されたランダム・ウォークの漸化式で表わされる。

$$W^{(S)}(n_1, n_2, \dots, n_K : N) = \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha=\pm} \tilde{P}_{N-1}^\alpha(n_i, \{n_j\} | n_i - \alpha \cdot 1, \{n_j\}) \times W^{(S)}(n_1, n_2, \dots, n_i - \alpha \cdot 1, \dots, n_K : N-1) \quad (16)$$

$$W^{(S)}(0, 0, \dots, 0 : 0) = 1, \quad (17)$$

$\tilde{P}_{N-1}^{\alpha}(n_i, \{n_j\} | n_i - \alpha \cdot 1, \{n_j\}) = m^{(cr)}(\tilde{L}_i(\sigma_1))$, ($\alpha = +$), 0 ($\alpha = -$) である。初期条件(17)と, (15)式を代入した $\tilde{P}_{N-1}^{\alpha}$ を, (16)に逐次代入して行くと

$$W^{(S)}(n_1, n_2, \dots, n_K : N) = \frac{N!}{\prod_i n_i!} \prod_i \left(\frac{\tilde{L}_i^{-D}(\sigma)}{\tilde{L}(D)} \right)^{n_i} \quad (18)$$

$$(\tilde{L}(D) \equiv \sum_i \tilde{L}_i^{-D})$$

となる。 $\sum n_i = N$, $\sum n_i \tilde{L}_i(\sigma) = L_c$ (1° では L_c はクラックの鎖の長さ, 2° では分布したクラックの総和の長さ)一定のもとで, (18)で定義したエントロピーを最大にする n_i は

$$n_i = \frac{\tilde{L}_i(\sigma)^{-D}}{\tilde{L}(D)} e^r e^{-\beta \tilde{L}_i(\sigma)} \quad (19)$$

$$(e^r = N / \sum_i (\tilde{L}_i(\sigma)^{-D} e^{-\beta \tilde{L}_i(\sigma)} / \tilde{L}(D)))$$

図3は $\log n_i = Y$, $\log \tilde{L}_i(\sigma) = X$ として, (19)をプロットしたものである。(16)式は連続体近似によって, K 次元のFokker-Planck (FP) 方程式になる。この解を経路積分で表わすと, m. c. の成長段階 ($I \rightarrow II$) を経過した後の III (1°) の軌跡は, もっと詳細に調べることが出来る。

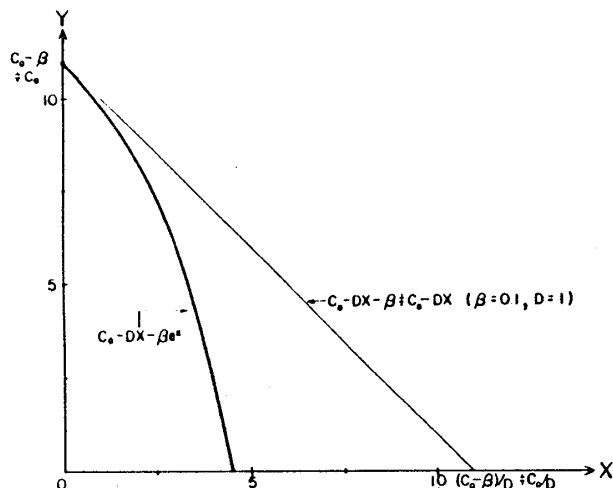


図 3

文 献

- 1) K. Mogi, Bull. Earthq. Res. Inst. **40** (1962) 831.
- 2) S. Niiseki, M. Satake and T. Kashiwabara, Progress of Acoustic Emission II, The Japan Society for Non-Destructive Inspection (M. Onoe, K. Yamaguchi and H. Takahashi eds.) (1984), 578.
- 3) 原 啓明, 藤田重次, 物性研究 **42-1** (1984), 19
- 4) 岡山誠司, 一橋大学研究年報, 自然科学 **25** (1986) 6月号, 3

有限寿命を考慮した成長模型

中部大・工

宮 島 佐 介