

Residual Eisenstein series of degree two

東北大学 理学部 数学科 渡部 隆夫

(Takao Watanabe)

序 $G = Sp_4$ を有限次代数体 F 上定義された次数 2 のシンプレクティック群とし、 K をアデール群 $G(\mathbb{A})$ の中の標準的な極大コンパクト部分群とする。 $G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K$ 上の L^2 -関数としての Hilbert 空間は、直交分解

$L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K) = L^2(G, K) \oplus L^2(B, K) \oplus L^2(p_1, K) \oplus L^2(p_2, K)$ を持つことが知られている。但し、 B は Borel 部分群、 p_1, p_2 は極大放物的部分群である。ここでは、 $L^2(B, K)$ の中の離散スペクトルの空間 $L_d^2(B, K)$ を調べる。

1. G のルート系

極大トラス, Borel 部分群を

$$T = \{ t(a, b) = \text{diag}(a, b, a^{-1}, b^{-1}) \}$$

$$B = NT, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} A & S \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix} \mid A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = {}^t S \right\}$$

とする。 $\rho_i : T \rightarrow G_m \quad (i=1, 2)$ を

$$\rho_1(t(a, b)) = a, \quad \rho_2(t(a, b)) = ab$$

で定義すれば $\text{Hom}(T, G_m) = \mathbb{Z}\rho_1 + \mathbb{Z}\rho_2$ で, G の (T, B)

に関する単純ルートは $\alpha_1 = 2\rho_1 - \rho_2, \quad \alpha_2 = 2(\rho_2 - \rho_1)$ と

正ルートは $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ となる。

α_i に対応するコルートを $\alpha_i^\vee$ とかく。

特に $\alpha_1^\vee(a) = t(a, a^{-1}), \quad \alpha_2^\vee(a) =$

$t(1, a)$ であり, $\mathfrak{u} = \mathbb{R}\rho_1 + \mathbb{R}\rho_2,$

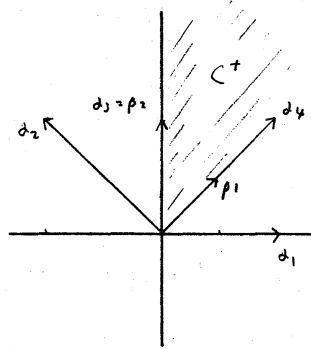
$\mathfrak{u}^* = \mathbb{R}\alpha_1^\vee + \mathbb{R}\alpha_2^\vee$ とし, $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle$

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{u} \times \mathfrak{u}^* \rightarrow \mathbb{R}$ と $\langle \rho_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$

$(i, j = 1, 2)$ で定める。 $\mathbb{R}\rho_1$ ($\mathbb{R}\rho_2$) に関する対称変換

を σ (τ) とすれば, Weyl 群 W は σ, τ で生成される。

$C^+ = \mathbb{R}_+\rho_1 + \mathbb{R}_+\rho_2$ は Weyl 部屋となる。



2. $T(\mathbb{A})$ の Langlands 分解

準同型 $H: T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{u}^*$ を $H(t(a, b)) = \log|a|_{\mathbb{A}} \alpha_1^\vee + \log|ab|_{\mathbb{A}} \alpha_2^\vee$ (ここで $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ はイデールノルム) で定義し,

$T' = \text{Ker } H$ とおく。このとき $T(F) \subset T', \quad K_T := T(\mathbb{A}) \cap K \subset T'$

で, $T(F) \backslash T' / K_T$ は コーホクト群となる。 F の実素点

(複素素点) の個数を r_1 (r_2) とする。対角的な埋め

込み, $T(\mathbb{R})_+ := \{t(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}_+\} \hookrightarrow T(\mathbb{R})^{r_1} \times T(\mathbb{C})^{r_2}$ に

よって $T(\mathbb{R})_+$ を $T(\mathbb{A})$ の部分群とみると, 直積分解

$T(A) = T(\mathbb{R}) + T'$ をもつ。

$\Omega(T) := \text{Hom}(T(F) \backslash T' / K_T, \mathbb{C}^\times)$ とすれば、これは
 $(\mathbb{Z}^{n+n-1} \times \mathcal{O}(F)^\times)^{\otimes 2}$ に同型である。ここで、 $\mathcal{O}(F)^\times$ は F の
 イデアル類群の双対群とす。 $\chi \in \Omega(T)$ に対して、
 $\Gamma(A)$ 上の関数 Φ_χ を、合成 $\Gamma(A) \rightarrow N(A)T(\mathbb{R}) + T(F) \backslash \Gamma(A)/K$
 $= T(F) \backslash T' / K_T \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^\times$ で定義する。

3. Eisenstein 級数

$\delta = \rho_1 + \rho_2$ とおく。岩沢分解 $\Gamma(A) = N(A)T(A)K$ により
 H を $\Gamma(A)$ 上の左 $N(A)T(F)$ -不変、右 K -不変な写像に
 拡張する。

今、 $\chi \in \Omega(T)$ と $\lambda \in \mathcal{U}_\mathbb{C} := \mathcal{U} \otimes \mathbb{C}$ に対して

$$E(s, \Phi_\chi, \lambda) = \sum_{\gamma \in B(F) \backslash \Gamma(F)} e^{\langle \lambda, H(\gamma\delta) \rangle} \Phi_\chi(\gamma\delta)$$

とすれば、右辺の和は $\text{Re } \lambda \in \mathbb{C}^+ + \delta$ のとき、 $\Gamma(F) \backslash \Gamma(A)$ の
 任意のコンパクト集合上絶対一様収束し、更に $\mathcal{U}_\mathbb{C}$ 上 λ の
 有理関数に解析接続できることが知られている。

さて、 $\mathcal{F}(C_c^\infty(\mathcal{U}))$ を $C_c^\infty(\mathcal{U})$ の Fourier 変換で得られた
 Paley-Wiener 型の関数の空間とす。このとき、 $L^2(B, K)$ は

$$\hat{\varphi}_\chi(s) = \int_{\text{Re } \lambda = s} \varphi(\lambda) E(s, \Phi_\chi, \lambda) d\lambda, \quad \varphi \in \mathcal{F}(C_c^\infty(\mathcal{U})), \chi \in \Omega(T)$$

(Λ は $(\mathfrak{c} + \delta)$ の中の固定点) の張る空間の $L^2(G(F) \backslash G(A)/K)$ の中での閉包として与えられる。

$E(\mathfrak{s}, \mathfrak{c}_x, \Lambda)$ の特異点をみつけるために、その定数項を計算する。今の場合、これは

$$\int_{N(F) \backslash N(A)} E(m\mathfrak{s}, \mathfrak{c}_x, \Lambda) dm = \sum_{w \in W} e^{\langle w\Lambda + \delta, H(\mathfrak{s}) \rangle} M(w, \Lambda, x) \chi_{w, x}(\mathfrak{s})$$

となる。ここで

$$(3.1) \quad M(w, \Lambda, x) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ w(d_i) < 0}} \frac{\zeta(\langle \Lambda, d_i^\vee \rangle; x \cdot d_i^\vee)}{\zeta(\langle \Lambda, d_i^\vee \rangle + 1; x \cdot d_i^\vee)}$$

で、 $\zeta(s; x \cdot d_i^\vee)$ は量指標 $x \cdot d_i^\vee$ に関する Γ -因子付きの Hecke L -関数である。一般に $E(\mathfrak{s}, \mathfrak{c}_x, \Lambda)$ ($x \in \Omega(T)$) の特異点は $M(w, \Lambda, x)$ ($w \in W, x \in \Omega(T)$) の特異点に含まれることが知られており、(3.1) から $M(w, \Lambda, x)$ の特異点は $\langle \Lambda, d_i^\vee \rangle = k$ という形の $\mathfrak{u} \in \mathfrak{a}$ 中の超平面の和集合である。更に、次の事実がある

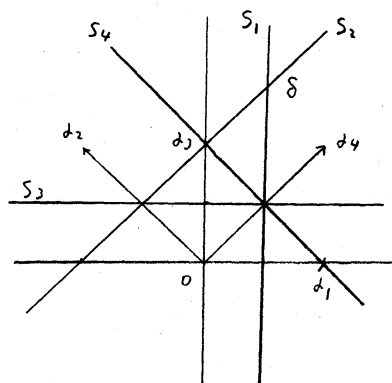
(3.2) $L^2(\mathfrak{B}, K)$ のスペクトル分解に寄与する特異超平面は $\langle \Lambda, d_i^\vee \rangle = k$, k は正の実数 という形のものに限る。

([5] Theorem 7.4, [6] Theorem 5.12)

従って、Hecke L -関数の性質から、(3.2) に適合する特異超平面は $S_i = \{ \Lambda \in \mathfrak{u} \mid \langle \Lambda, d_i^\vee \rangle = 1 \}$, $1 \leq i \leq 4$ の4つだけである。

4. 剰余 Eisenstein 級数

各 S_i 上 $S_i = \mathbb{C} u_i + v_i$, $u_1 = \beta_2$, $u_2 = \beta_1$, $u_3 = d_1$, $u_4 = d_2$, $v_i = d_i/2$, $1 \leq i \leq 4$ とかける。そこで



$$E^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}_x, \lambda)$$

$$:= \int_C E(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}_x, \lambda + z v_i) dz$$

(C は複素平面の原点の周りの十分小さい円とす)

$\lambda \in S_i$, $1 \leq i \leq 4$ を剰余 Eisenstein 級数と呼ぶ。(これは恒等的に 0 になることもある)。例えば $F = \mathbb{Q}$ のとき, $E^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}_x, \lambda)$ は本質的に

$$E^{\sim}(z, s) = \sum_{(c, d) \in p_1(z) \setminus \Gamma(z)} \det(T_m(z))^s |\det(cz + d)|^{-2s}$$

$z \in \mathfrak{H}_2$ = 次数 2 の Siegel 上半空間

$$p_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & B \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \mid A \in GL_2, B = {}^t B \right\}$$

と同じである。

一般論より, $E^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}_x, \lambda)$ の間にも関数方程式の成り立つことが知られている。例えば λ が自明な指標のとき

$$\lambda = z u_1 + v_1 \in S_1 \text{ に対して}$$

$$E^1(\vartheta, \varphi_x, \sigma\tau\Lambda) = \frac{\zeta(z + \frac{3}{2}) \zeta(2z+1)}{\zeta(z - \frac{1}{2}) \zeta(2z)} E^1(\vartheta, \varphi, \Lambda)$$

$$E^3(\vartheta, \varphi_x, \tau\Lambda) = \frac{\zeta(z + \frac{1}{2})}{\zeta(z - \frac{1}{2})} E^1(\vartheta, \varphi, \Lambda)$$

$$E^3(\vartheta, \varphi_x, \sigma\tau\Lambda) = \frac{\zeta(z + \frac{1}{2}) \zeta(2z+1)}{\zeta(z - \frac{1}{2}) \zeta(2z)} E^1(\vartheta, \varphi, \Lambda)$$

となる。但し、 $\zeta(z)$ は F の Γ -因子付きの Dedekind ゼータ関数とする。 $E^2(\vartheta, \varphi_x, *)$, $E^4(\vartheta, \varphi_x, *)$ の間にも同様の関数等式がある。

5. 剰余スベクトル

$1 \leq i \neq j \leq 4$ に対して、 Λ_{ij} を S_i と S_j の交差点とする。
 4.17. $f_{ij}^x(\vartheta) = \text{Res } \Lambda = \Lambda_{ij} E^i(\vartheta, \varphi_x, \Lambda)$ とおく。このとき一般論より ([5], Theorem 7.4, [6] (Chapter VI)), $L^2_d(B, K)$ には $\{f_{ij}^x \mid 1 \leq i \neq j \leq 4, x \in \Omega(T)\} \cap L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})/K)$ によって張られることがわかる。

今、 $A(F) = \{\mu \in \mathcal{U}(F)^\wedge \mid \mu^2 = \mu_0 (= \text{自明な指標})\}$ とおき、 $\mu \in A(F)$ に対して $\chi(\mu, \mu) \in \Omega(T)$ を $\chi(\mu, \mu)(t(a, b)) = \mu(ab)$ で定義する。このとき直接の計算で次の証明できる。

定理 1 各 $\mu \in A(F)$ に対して

$$f_\mu = \begin{cases} f_{1,3}^{x(\mu,\mu)} & \text{if } \mu \neq \mu_0 \\ f_{1,2}^{x(\mu,\mu)} & \text{if } \mu = \mu_0 \end{cases}$$

とすれば, f_μ ($\mu \in A(F)$) は $L^2_d(B, K)$ の直交基である.

特に, $\dim L^2_d(B, K) = \#(A(F)) = [U(F) : U(F)^2]$.

定理 2 各 $\mu \in A(F)$ に対して $\pi(\mu)$ を f_μ で生成された $G(A)$ -加群とする. このとき, 任意の $\mu \in A(F)$ に対して $\pi(\mu)$ は 既約 K -spherical nontempered の保型表現で, $\pi(\mu)$ と $\pi(\nu)$ が同値になるのは, $\mu = \nu$ の時に限る.

実際には, $\pi(\mu)$ を制限テンソル積分解したときの局所因子 $\pi_v(\mu)$ をすべての素点 v で完全に決定できる. 従って $\pi(\mu)$ の standard L -関数を計算できる.

定理 3 $\mu \neq \mu_0$ のとき $\pi(\mu)$ の standard L -関数は $\zeta_F(s) L(s, \mu)^2 L(s+1, \mu) L(s-1, \mu)$ である. ここで $\zeta_F(s)$ は F の Dedekind ゼータ関数, $L(s, \mu)$ は μ の Hecke L -関数とする.

References

- [1] J. Arthur, Eisenstein series and the trace formula, Proc. Sympo. Pure Math. 33, part 1, Amer. Math. Soc. (1979), 253 - 274.
- [2] A. Borel, Automorphic L-functions, Proc. Sympo. Pure Math. 33, part 2, Amer. Math. Soc. (1979), 27 - 61.
- [3] Harish - Chandra, Automorphic Forms on Semisimple Lie Groups, Lecture Notes in Math. 62, Springer - Verlag, Berlin, 1968.
- [4] S. Helgason, Groups and Geometric Analysis, Academic Press, New York, 1984.
- [5] R. P. Langlands, On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series, Lecture Notes in Math. 544, Springer - Verlag, 1976.
- [6] M. S. Osborne and G. Warner, The Theory of Eisenstein Systems, Academic Press, New York, 1981.
- [7] T. Watanabe, Residual spectrums of Sp_4 , preprint.
- [8] A. Weil, Basic Number Theory, 3rd edition, Springer - Verlag, Berlin, 1974.