

二点接続問題

広島大理 河野實彦

1. 単独線型常微分方程式

$$(1) \quad t^n \frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{\ell=1}^n t^{n-\ell} \left(\sum_{r=0}^{2\ell} a_{\ell,r} t^r \right) \frac{d^{n-\ell} x}{dt^{n-\ell}}$$

に関する大域解について考察する。

上の微分方程式は複素全平面において $t=0$ で
確定特異点を, $t=\infty$ で rank 2 の不確定特異
点を持つている。先ず, それぞれの特異点の近傍
での解について述べておこう。

確定特異点, $t=0$ の近傍においては,

$$(2) \quad x_j(t) = t^{\rho_j} \sum_{m=0}^{\infty} G_j(m) t^m \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

で表現される基本解が存在する事実は周知の事
である。ここで, ρ_j は特性方程式

$$(3) \quad E(p) = [p]_n - \sum_{\ell=1}^n a_{\ell,0} [p]_{n-\ell} = 0$$

$$[p]_p = p(p-1) \cdots (p-p+1)$$

の根で $p_j - p_k \neq \text{整数} \ (j \neq k)$ と仮定しておく。

他方、不確定特異点 $t = \infty$ の近傍には、ある一つの $t = 0$ に中心を持つ扇状領域 S において、基本解 $x_S^k(t)$ ($k=1, 2, \dots, n$) が存在し、これらの解の行動を表現するものとして、

$$(4) \quad x_S^k(t) \cong x^k(t) \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad \text{in } S$$

なる漸近関係が成立つ事も良く知られた結果である。ここで、 $x^k(t)$ ($k=1, 2, \dots, n$) は微分方程式 (1) の形式解で

$$(5) \quad x^k(t) = \exp\left(\frac{\lambda_k}{2}t^2 + \alpha_k t\right) t^{\mu_k} \sum_{s=0}^{\infty} h^k(s) t^{-s}$$

なる形を有す。特性定数 $\lambda_k, \alpha_k, \mu_k$ については説明を加えれば、 λ_k は特性方程式

$$(6) \quad F(\lambda) = \lambda^n - \sum_{\ell=1}^n a_{\ell,2\ell} \lambda^{n-\ell} = 0$$

の根で、 $\lambda_j \neq 0$, $\lambda_j \neq \lambda_k \ (j \neq k)$ と仮定する。

すると, α_k, μ_k は次の式によって決められる定数である。

$$(7) \quad \alpha_k = \sum_{l=1}^n a_{l, 2l-1} \lambda_k^{n-l} / F'(\lambda_k)$$

$$(8) \quad \mu_k = \left\{ - \binom{n}{2} (\lambda_k^{n-1} + \lambda_k^{n-2} \alpha_k^2) \right. \\ + \sum_{l=1}^n a_{l, 2l} \binom{n-l}{2} (\lambda_k^{n-l-1} + \lambda_k^{n-l-2} \alpha_k^2) \\ + \sum_{l=1}^n a_{l, 2l-1} (n-l) \lambda_k^{n-l-1} \alpha_k \\ \left. + \sum_{l=1}^n a_{l, 2l-2} \lambda_k^{n-l} \right\} / F'(\lambda_k).$$

上の特性定数 $\rho_j, \lambda_k, \alpha_k, \mu_k$ の決め方からわかる事は微分方程式 (1) に一つの不変式が存在する事である, それは

$$(9) \quad \sum_{j=1}^n \rho_j = \sum_{k=1}^n \mu_k + n(n-1)$$

であり, この関係式は後に重要な役割を演ずる事になる。

さて, 話を元に戻して, 一つの扇状領域 S にあける基本解 $x_S^k(t)$ の漸近行動は一般に S に依存する, 即ち $x_S^k(t)$ は S と異なった

扇状領域 S' においては、もはや $x^k(t)$ をその漸近展開式として持たないのである。この事実は Stokes 現象と呼ばれている。

こうした Stokes 現象の解明にも、大域解の構成が必要である。そこで大域解の構成の一つの方法として、接続という手段が浮い上って来る。これは、不確定特異点の近傍における基本解 $x_s^k(t)$ と、確定特異点の近傍における基本解 $x_j(t)$ の一次結合で表現しようというのである。

$$(10) \quad x_s^k(t) = \sum_{j=1}^n C_j^k(S) x_j(t) \quad \text{in } S$$

における定数 $C_j^k(S)$ ($j, k=1, 2, \dots, n$) を決定してやればよい。

そこで、並に収束巾級数解 $x_j(t)$ の任意の扇状領域 S における漸近行動を調べる事により、例えば

$$(11) \quad x_j(t) \cong \sum_{k=1}^n \Gamma_j^k(S) x^k(t) \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad \text{in } S$$

なる関係式が得られたとすれば、定数 $C_j^k(S)$ は $\Gamma_j^k(S)$ から直ちに導かれるし、その上先の Stokes 現象も

$$(12) \quad x_S^k(t) \cong \sum_{j=1}^n G_j^k(S) \sum_{l=1}^n \pi_j^l(S') x^k(t) \quad \text{as } t \rightarrow \infty \text{ in } S'$$

なる関係式から 解明される事になる。

結局、我々の目的としては、巾函数と整函数との積として表現された確定特異点の近傍における基本解 $x_j(t)$ を調べ、定数 $\pi_j^k(S')$ ($j, k=1, 2, \dots, n$) (Stokes 係数) を決定するということになる。

2. 一般に 整函数の $t=\infty$ における行動を知るには、その展開式の係数を綿密に調べる必要がある。その意向にそって、上の微分方程式 (1) の解 $x_j(t)$ について言えば、その展開式 (2) の係数 $G_j(m)$ ($j=1, 2, \dots, n$) は

$$(13) \quad [p_j + m]_m G_j(m) = \sum_{l=1}^n \sum_{r=0}^{2l} a_{l,r} [p_j + m - r]_{m-l} G_j(m-r)$$

なる $2n$ 階 差分方程式 を満たしている事は 容易にわかるが、さてその後 どう解析するか。

そこで、我々は $2n$ 階 差分方程式 (13) の解 $G_j(m)$ の、低階の差分方程式の解による展開表現を試みるのである。余談であるが、こうした研究は Fuchs 型 微分方程式 については K. Heun

A. Endélyi の論文に見られる。Heun 型 微分方程式の解は 超幾何函数により展開出来るし、超幾何函数が巾級数展開出来るのは、巾函数が二つの確定特異点を持つ微分方程式の解であるからである。

低階の差分方程式としては 2 階の差分方程式

$$(14) \quad (m + \rho_k - \mu_k) g_j^k(m) = \alpha_k g_j^k(m-1) + \lambda_k g_j^k(m-2)$$

を導入する。これは 微分方程式 の 不確定特異点の rank により 必然的に導かれるものであり 基本差分方程式と呼んでも良からう。

さて、展開の話に入るが、その前に形式解 $x^k(t)$ の展開係数について説明しておかなければならぬ。いきなり、(5) 式を微分方程式に代入し、その係数 $h_p^k(s)$ の満たす差分方程式を導こうと努力しても、徒勞に終りそうなので、先ず

$$(15) \quad x_p^k(t) = t^{-p} \frac{d^p x^k}{dt^p} = \exp\left(\frac{\lambda_k}{2} t^2 + \alpha_k t\right) t^{\mu_k} \sum_{s=0}^{\infty} h_p^k(s) t^{-s}$$

とおいて、 $h_p^k(s)$ に関する差分方程式を導く。

こうすると

$$(16) \quad h_p^k(s) = \lambda_k h_{p+1}^k(s) + \alpha_k h_{p+1}^k(s-1) + (\mu_k + p + 1 - s) h_{p+1}^k(s-2)$$

$$(17) \quad f_{h,n}^k(s) = \sum_{l=1}^n \sum_{r=0}^{2l} a_{l,r} h_{n-l}^k(s+r-2l)$$

の $\Rightarrow$ の差分方程式が得られる。そこで、(16)式から

$$(18) \quad h_p^k(s) = \sum_{q=0}^{2p} \left\{ \sum_{r=0}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \binom{p}{q-r} \lambda_k^{p-q+r} \alpha_k^{q-2r} H^k(p,q,r;s) \right\} h^k(s-q)$$

なる表現式が得られるので、これを (17) 式に代入すれば $h^k(s)$ のみたす差分方程式が得られるという事になる。

準備が出来たので

$$(19) \quad f_{j,p}^k(m) = \sum_{s=0}^{\infty} h_p^k(s) g_j^k(m+s) \quad (p=0,1,\dots,n)$$

なる展開式を考えよう。

(16) (17) 式の両辺に $g_j^k(m+s)$ をかけ s について 0 から ∞ までの和を取れば

$$(20) \quad f_{j,p}^k(m) = (m + \rho_j + p + 1) f_{j,p-1}^k(m+2)$$

$$(21) \quad f_{j,n}^k(m) = \sum_{l=1}^n \sum_{r=0}^{2l} a_{l,r} f_{j,n-l}^k(m+2l-r)$$

が得られ、更に (20) から得られる

$$(22) \quad f_{j,p}^k(m) = [m + \rho_j + 2p]_p f_{j,0}^k(m+2p)$$

を (21) 式 に 代入 すれば

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & [m + \rho_j + 2n]_n f_{j,0}^k(m+2n) \\
 &= \sum_{l=1}^n \sum_{r=0}^{2l} a_{l,r} [m + \rho_j + 2n - r]_{n-l} f_{j,0}^k(m+2n-r)
 \end{aligned}$$

を得る。これは 取りも直さず, $f_{j,0}^k(m)$ が 差分方程式 (13) の 特殊解 である事を示しているのである。基本差分方程式 (14) には 二つの 独立な 解が存在するから, 結局 $2n$ 個の 特殊解が 得られた事になる。そこで 上の 形式的計算に 意味づけをしなければならぬ。

(i) $f_{j,p}^k(m)$ ($p=0,1,2,\dots,n$) は well-defined であるか。

(ii) $2n$ 個の 特殊解が 差分方程式 (13) の 基本解となるか。

肯定的答を得るためには (i) では 級数 (19) の 収束性を示さなければならぬし (ii) では Casorati - 行列を 検討する訳であるが, 兹には $q_{j1}^k(m), h_{jp}^k(s)$ の, m, s が 充分大 ときの 行動を 調べておく必要がある。計算は 省略するが, こうして 次の結果を得る事が出来る。

定理 係数 $G_j(m)$ ($j=1, 2, \dots, n$) は $f_j^k(m) \equiv f_{j,0}^k(m)$, $f_j^{k*}(m) \equiv f_{j,0}^{k*}(m)$ ($k=1, 2, \dots, n$) の一次結合として表現される。

$$(24) \quad G_j(m) = \sum_{k=1}^n \pi_j^k f_j^k(m) + \sum_{k=1}^n \pi_j^{k*} f_j^{k*}(m)$$

すなわち, Stokes 係数 π_j^k, π_j^{k*} , は次の一次式によって決定される定数である。

$$\begin{pmatrix} G_j(0) \\ G_j(-1) \\ \vdots \\ G_j(-2n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_j^1(0) & \dots & f_j^n(0) & f_j^{1*}(0) & \dots & f_j^{n*}(0) \\ f_j^1(-1) & \dots & f_j^n(-1) & f_j^{1*}(-1) & \dots & f_j^{n*}(-1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_j^1(-2n+1) & \dots & f_j^n(-2n+1) & f_j^{1*}(-2n+1) & \dots & f_j^{n*}(-2n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_j^1 \\ \vdots \\ \pi_j^n \\ \pi_j^{1*} \\ \vdots \\ \pi_j^{n*} \end{pmatrix}$$

3. $\pm z$ 二点接続問題の話に入る。

上の結果によって, 微分方程式 (1) の収束巾弔数解 $x_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, n$) は, 下記定義される $2n$ 個の函数 $x_j^k(t), x_j^{k*}(t)$ ($k=1, 2, \dots, n$) の一次結合として表わされる。即ち

$$(25) \quad x_j(t) = t^{\beta_j} \sum_{m=0}^{\infty} G_j(m) t^m$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \Gamma_j^k \left(\sum_{m=0}^{\infty} f_j^k(m) t^{m+\rho_j} \right) + \sum_{k=1}^n \Gamma_j^{k*} \left(\sum_{m=0}^{\infty} f_j^{k*}(m) t^{m+\rho_j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \Gamma_j^k x_j^k(t) + \sum_{k=1}^n \Gamma_j^{k*} x_j^{k*}(t)
\end{aligned}$$

そこで,

$$(26) \quad x_j^k(t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} f_j^k(m) t^{m+\rho_j}$$

$$(27) \quad x_j^{k*}(t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} f_j^{k*}(m) t^{m+\rho_j}$$

更に、上の巾級数展開式の係数 $f_j^k(m)$, $f_j^{k*}(m)$ は、基本差分方程式 (14) の解による巾級数展開式で与えられたこととを考慮すれば、例えば

$$\begin{aligned}
(28) \quad x_j^k(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\infty} k^k(s) g_j^k(m+s) \right) t^{m+\rho_j} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} k^k(s) \left(\sum_{m=0}^{\infty} g_j^k(m+s) t^{m+\rho_j} \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} k^k(s) x_j^k(t, s)
\end{aligned}$$

となる。そこで、次の段階として、函数

$$(29) \quad x_j^k(t, s) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} g_j^k(m+s) t^{m+\rho_j}$$

の解析を行う。実際、函数 $x_j^k(t, s)$ は簡単な微分方程式

$$(30) \quad t \frac{d x_j^k(t, s)}{dt} = \left[\lambda_k t^2 + d_k t + (\mu_k - s) \right] x_j^k(t, s) \\ + \lambda_k g_j^k(s-1) t^{\rho_j+1} + (s + \rho_j - \mu_k) g_j^k(s) t^{\rho_j}$$

を満足していることにより、求積法により、次のような積分による表現が得られる。

$$(31) \quad x_j^k(t, s) = \lambda_k g_j^k(s-1) t^{\rho_j+1} x(\sqrt{\lambda_k} t : s - \mu_k + \rho_j + 1 : \frac{\alpha_k}{\sqrt{\lambda_k}}) \\ + (s + \rho_j - \mu_k) g_j^k(s) t^{\rho_j} x(\sqrt{\lambda_k} t : s - \mu_k + \rho_j : \frac{\alpha_k}{\sqrt{\lambda_k}})$$

ここに

$$(32) \quad x(t : \nu : \delta) = \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2} t^2 (1-\tau^2) + \delta t (1-\tau)\right) \tau^{\nu-1} d\tau.$$

結局、微分方程式(1)の収束巾級数解 $x_j(t)$ の解析は、(32)の積分によって定義される函数 $x(t : \nu : \delta)$ の解析へと移行したことになる。このようにして、次の定理を得る。

定理(i) $\rho_j - \rho_k \neq \text{整数}$ ($j \neq k, j, k = 1, 2, \dots, n$)(ii) $\rho_j - \mu_k \neq \text{整数}$ ($j, k = 1, 2, \dots, n$)

$$(iii) \quad 0 < \frac{|\lambda_k|}{|\lambda_j - \lambda_k|} < \frac{1}{2(L_k |\lambda_k|)^2} \quad (j \neq k, j, k = 1, 2, \dots, n)$$

 L_k : constants

と仮定する。

$$S_p = \bigcap_{k=1}^n \left\{ p\pi - \frac{\pi}{2} \leq \arg \sqrt{\lambda_k} t \leq p\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$$

と仮定する。

(A) p が偶数のとき

$$(33) \quad x_j(t) \cong \sum_{k=1}^n \Gamma_j^k e^{p(\rho_j - \mu_k) \pi i} \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{\lambda_k^2}{2\lambda_k}\right) x^k(t) \\ + O(t^{\rho_j+1}) \quad t \rightarrow \infty \text{ in } S_p$$

(B) p が奇数のとき

$$(34) \quad x_j(t) \cong \sum_{k=1}^n \Gamma_j^{k*} e^{(p+1)(\rho_j - \mu_k) \pi i + \pi i} \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{\lambda_k^2}{2\lambda_k}\right) x^k(t) \\ + O(t^{\rho_j+1}) \quad t \rightarrow \infty \text{ in } S_p$$

 $(j=1, 2, \dots, n)$

が成立する。

詳し ≤ 12

M. Kohno : A two point connection problem for n -th order single linear ordinary differential equations with an irregular singular point of rank two, to appear.

五参照 $\pm 4 \leq 11$.