

乱流境界層における平均速度プロファイルと乱れの構造 ===その普遍性をもとめて===

名古屋大学工学研究科 辻 義之
Nagoya University Yoshiyuki TSUJI

1 はじめに

平板乱流境界層の平均速度プロファイルについて、数年来研究してきた内容を報告しました。主に実験データの解析を中心にしたもので、詳しい内容については、文献 [20]-[27] を参照していただくと幸いです。ここでは、主な結果を簡略にまとめ、日ごろ抱いている疑問についても触れてみました。

2 平均速度プロファイル

流体力学の教科書には、乱流境界層の平均速度分布としては対数法則が、また円管流れの場合にはベキ乗速度分布がよく揚げられています。両者の使い分けについてあまり意識したことはありませんでしたが、90年代の初めから、平板乱流境界層にもベキ乗則を推奨する試みが始まりました。

2.1 対数則かベキ乗則か？

圧力勾配のない平板乱流境界層において、平均速度プロファイルに対数則を支持する研究として、例えば [5, 8, 14, 16, 17, 18]、またベキ乗則を支持する研究は、例えば [3, 7] があります。ここ数年は下火になりましたが、最終決着が得られた [2, 4] というよりは、両研究グループが議論に疲れたという感があります。実験に携わる者としては、測定精度の高いデータを解析することはもちろんですが、条件についても例えば、平均圧力勾配、流れ場の二次元性、壁面せん断応力の（速度分布に依存しない）独立な測定法、壁から測定プローブまでの正確な位置の決定、など基本的ですがこれらの項目を明確にしたうえでの測定を心がける必要があります。論文によっては、これらの項目をあいまいにしたまま、結果のみを強調しすぎるものがあります。

平均速度プロファイルを対数則、ベキ乗則でフィットしてみるのですが、おおかたの室内実験（大型風洞ではない）では、運動量厚さに基づくレイノルズ数 (R_θ) が 5000 以下なので、両者の違いは明確にはでき

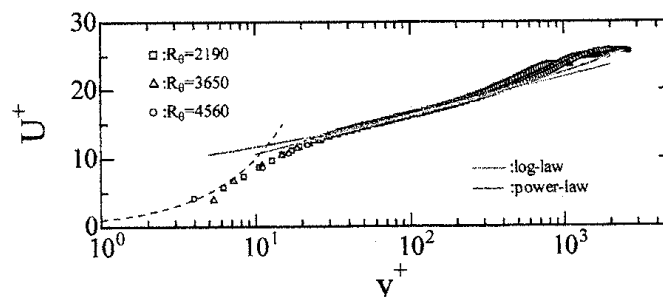


図1 乱流境界層における平均速度プロファイル。縦軸および横軸は内層変数で無次元化。

ません。図1にその1例を示します。この結果を見るかぎり、壁からのある領域では、対数則もベキ乗則も実験精度の範囲内でよく一致しているといえます。

平均速度プロファイルに、対数則なりベキ乗則の普遍速度分布が期待できるのは、十分に高いレイノルズ数が達成される必要があることを我々はしばしば見落としがちです。高いレイノルズ数のデータを解析してみると、低いレイノルズ数では決して見出すことのできない特徴に気づきます。Kolmogorov がいうところの慣性小領域についても同様で、 R_λ (テイラーマイクロスケール λ と速度変動の標準偏差に基づくレイノルズ数) が、数百程度では、慣性領域の性質を細かく調べるのに限界があるのではと感じています。そうかといっても、高いレイノルズ数のデータを得ることはなかなか難しく、限られた実験装置でしかおこなえないことになります。平板乱流境界層のレイノルズ数が低いデータしか持ち合わせていない場合に、従来とはまったく異なった観点から平均速度プロファイルを考えてみたいというのがこの研究の始まりでした。後に高レイノルズ数のデータを解析したときに、レイノルズ数が低い場合に得られた知見がどのように修正する必要があったのかを、以下に述べていきたいとおもいます。

3 乱れの構造：確率密度関数

「乱れの構造」という表現は、必ずしも適切ではないのかもしれませんが。ここでは瞬時速度をレイノルズ分解したとき、その変動速度が備える統計的性質を意図したものです。ここでは、統計量として、確率密度関数を扱います。

3.1 PDF 不変領域

流方向の瞬時速度をレイノルズ分解し； $\tilde{u} = U + u'$ 、変動速度の標準偏差を u_r とします。室内実験では、通常は空間に固定された1点での時系列データしか得られません。境界層の壁からの距離を y とすると、 u_r は壁からの距離によって変わりますし、確率密度関数型もかわります。ここでは特に、無次元化速度 $u \equiv u'/u_r$ について考えます。壁からの位置 y における u の確率密度関数を $P_y(u)$ とします。すなわち、 $P_y(u)$ が壁からの位置とレイノルズ数によってどのように変化するかを調べることになります。そのためには、確率分布型を定量的に評価することが必要になります。そこで、確率分布を族とする空間における距離として、以下のKLダイバージェンス (KLDと略す) を利用します [1, 10]。離散化された確率分布 $P(\mathbf{s})$ と $Q(\mathbf{s})$ ($\{\mathbf{s}\} = \{s_1, s_2, \dots\}$) に対して、

$$D(P\|Q) \equiv \sum_{\{\mathbf{s}\}} P(s_i) \log_e (P(s_i)/Q(s_i)), \quad (1)$$

を計算します。KLDは非負の量で、 $P(\mathbf{s})$ の分布型が $Q(\mathbf{s})$ に近いほど小さな値を持ち、 $P(\mathbf{s})$ と $Q(\mathbf{s})$ が厳密に一致する場合にはゼロとなります。つまり、 $P(\mathbf{s})$ と $Q(\mathbf{s})$ の分布型の類似度ををはかる一つの測度になります。境界層中でのダイバージェンス $D(P_y\|P'_y)$ の分布を図2に示しますが、壁から近いある領域では、その領域に含まれる任意の2点での確率分布型が類似していることがわかります。図中の壁からの距離は境界層厚さで無次元化してあります。この領域を取り出すためには、ガウス分布からの相違を測ることで可能です。ガウス分布を P_G とします。図3には、KLDの分布を平均速度分布とともに示したものです。 $D(P_y\|P_G)$ が一定となる y の範囲では確率分布型が類似することになります。この領域の始まりと終わりをそれぞれ、 y_s^+ , y_e^+ とあらわすことにして (上付記号 + は内層変数での無次元化です)、 $[y_s^+, y_e^+]$ をPDF不変領域として定義します。

PDF不変領域がレイノルズ数とともにどのように変化するかは興味ある課題です。図4には、 R_θ に対する不変領域の変化を示しました。レイノルズ数とともに不変領域は増大していきますが、その始まりは、レ

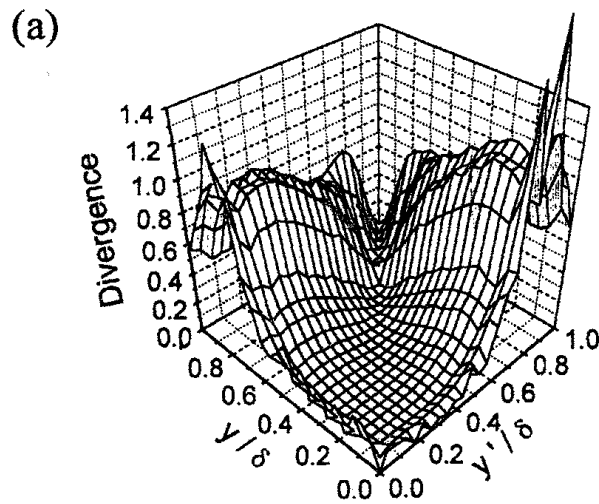


図2 乱流境界層におけるダイバージェンスの分布.

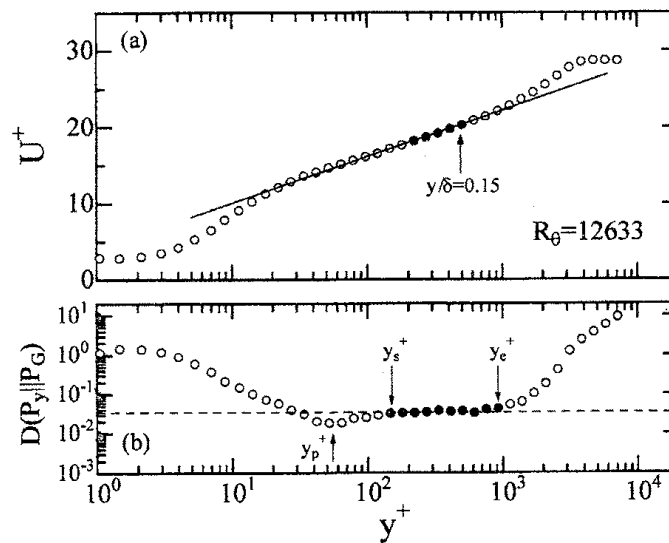


図3 (a) 平均速度プロファイルと対数分布. (b) ダイバージェンスの分布.

レイノルズ数が大きくなると ($5000 < Re$), $y_s^+ \simeq 180$ となります。レイノルズ数が小さいときには、より壁近くから不変領域は始まります。境界層中の長さ尺度との関係調べましたが、 y_e^+ は Rotta-Clauser 長さ $\Delta \equiv \int_0^\delta U_0 - U(y) dy / u_\tau$ で次のようにスケールできます; $0.049 \cdot \Delta^+$ 。

図3について、幾つかのコメントしておきます。平均速度プロファイルを補完している実線は対数則で、Österlund(1999) によるものです [16, 17]。カルマン定数および切片の値は、 $\kappa = 0.38$, $B = 4.1$ です。彼が見出した対数領域は、黒丸で示しましたが、 $200 \leq y^+ \leq 0.15\delta^+$ です。PDF 不変領域は、対数領域とその始まりはほぼ同じですが、より広い範囲に存在しています。

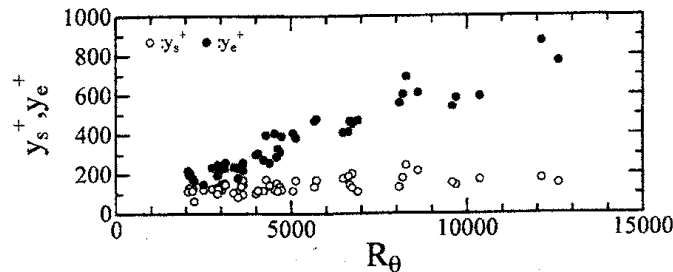


図4 PDF 不変領域のレイノルズ数依存性.

KLDはPDF型の類似度を測る指標ですから、ある敷居値 TH を設定して、 $D(P_y||P_G) \leq TH$ を満足する領域を抽出することもできます。この場合、 TH の大きさはPDFの類似度の強さとでも考えられます。 TH が小さいほど、 P_y はGauss分布により類似します。レイノルズ数が小さな境界層を解析していたときには、十分に広い不変領域を見出すことができずに、敷居値を調整して不変領域を抽出していました。仮に、 $TH = 0.035$ とすると、図3から、不変領域の始まりは $y_s^+ \simeq 30$ となり、古典的な対数領域の始まりと一致します。しかし、敷居値の調整をすることが必要ないことは、高いレイノルズ数を解析してはじめて気づきました。 $y^+ \simeq 55$ でKLDは極小値を持ちます。この位置 y_p^+ では、確率分布がもっともGauss分布に類似します。また、平均速度分布には小さなこぶ（バンプ）が存在することに気づきます。これについては、後ほど触れることにします。

3.2 PDF型のレイノルズ数依存性と普遍性

PDF不変領域では、変動速度のPDFが壁からの位置 y によらず、互いに類似します。しかし、そのPDF型のレイノルズ数依存性については、詳しく調べてみる必要があります。ダイバージェンス $D(P_y||P_G)$ をPDF不変領域 $[y_s^+, y_e^+]$ で平均して、レイノルズ数に対してプロットしました（図5）。 $R_\theta \leq 5000$ ではレイノルズ数依存性が認められます。すなわち、PDF型は不変領域内では互いに類似しますが、レイノルズ数依存性を持ちます。そして、高いレイノルズ数では $\langle D(P_y||P_G) \rangle$ がほぼ一定となることから、PDF型に普遍型があることがわかります。図6にPDFを示しましたが、確かにその普遍型が存在することがわかります。中心部で少しだけGauss分布からずれ、すその(tail)はGauss分布より小さな値を示します。どうして、このような分布になるのかは、興味のある問題であり、引き続き調べていきたい内容です。

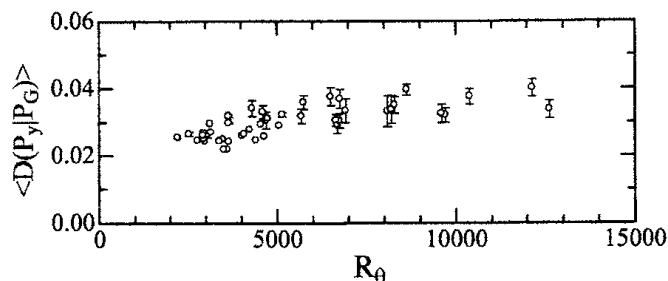


図5 PDF 不変領域におけるダイバージェンスのレイノルズ数依存性.

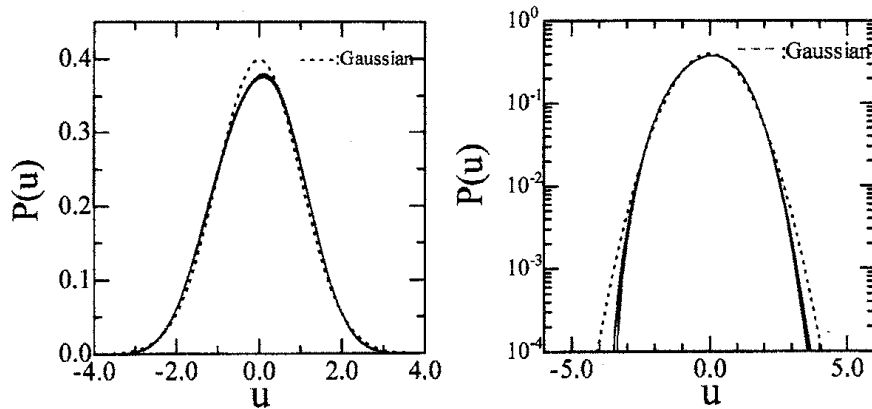


図6 PDF 不変領域における PDF 型.

3.3 PDF 不変仮説

平板乱流境界層中の PDF 型を調べていくうちに、その不変分布、レイノルズ数依存性や普遍性を以下の仮説でまとめられるのではないかと考えるようになりました [13, 27]。乱流境界層では、主流の非乱流領域がエントレインメントによって、内層に運びこまれます。そこで、このような効果が顕著にならない、 $y^+ \leq y_e^+$ を対象にします。速度変動はこれまでの解析どおり、主流方向の変動速度をその標準偏差で無次元化した $u = u'/u_r$ とします。レイノルズ数は代表長さを壁からの距離 y 、代表測度を u_r とし、 $Re_y \equiv u_r y / \nu$ とします。

第一仮説 領域 $y \leq y_e$ において、 y がそれほど大きくなく、レイノルズ数 Re_y が小さい場合には、 u の PDF 型はレイノルズ数のみに依存する。

第二仮説 領域 $y \leq y_e$ において、十分大きなレイノルズ数 $1 \ll Re_y$ が与えられた場合、 u の PDF 型はレイノルズ数 Re_y に依存せず、普遍型を示す。

さて、この仮説が成り立つのかを手持ちの実験データ ($2000 \leq Re_\theta \leq 13000$) で調べてみました。図7 (a) には、ダイバージェンスの値をレイノルズ数に対してプロットしてあります。多くの実験条件のデータが、複雑なかたちですが、1つの曲線上に分布しており、これは第一仮説を支持するものです。同様の図面を横軸をリニアスケールにしてプロットしてみます。ダイバージェンスはレイノルズ数の増加とともに一定値に近づき、 $500 < Re_y$ では PDF 型の普遍性をあらわしています。これは、第二仮説を支持する実験結果と考えることができます。

3.4 対数領域との関係

平板乱流境界層における平均速度プロファイルが、Österlund(1999)の主張どおりに対数速度分布だとすると、PDF 不変領域と対数領域との関係、PDF 不変性と対数法則との関係は明確にすべき課題だと考えられます。実験データに基づく見解は既に示してありますが [27]、ここではその結果のみをまとめることにします。

PDF 不変領域 $[y_s^+, y_e^+]$ は、その始まりは $y_s^+ \simeq 100$ からレイノルズ数 Re_θ の増加とともに徐々に増加して、 $y_s^+ \simeq 180$ に漸近します。 y_e^+ は Rotta-Clauser 境界層厚さでスケールされます； $0.049 \cdot \Delta^+$ 。不変領域

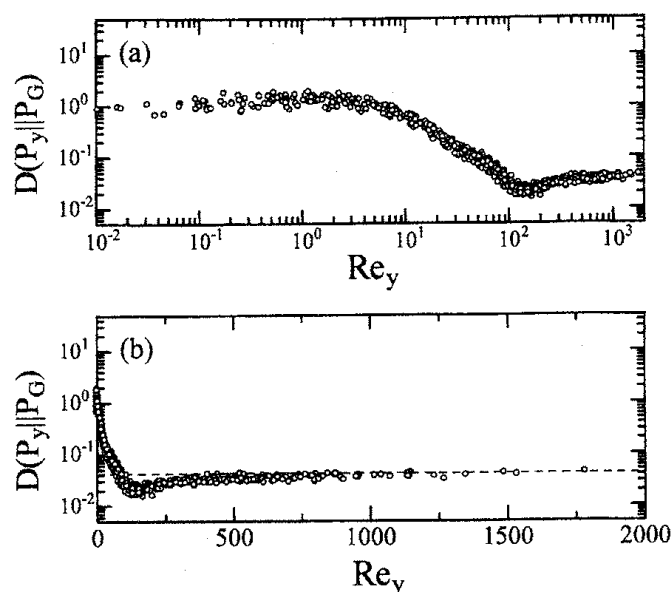


図7 PDF 不変仮説とダイバージェンス

は、Österlund(1999) の提案する対数領域 ($200 \leq y^+ \leq 0.15\delta^+$) を含む広い範囲に存在します。また、壁近くでの PDF 方程式に、PDF 不変仮説と 2 つの実験的経験式をもちいることから、対数則を導くことができます。その過程でカルマン定数は一意に与えられ、対数領域は $180 \leq y^+ \leq 0.021 \cdot \Delta^+ + 96.5$ と決まります。このとき、対数領域の終わりを境界層厚さ δ に対してプロットすると、 0.15δ から 0.2δ の範囲に分布します。この方法は、流体運動の方程式から仮定なしに対数領域の導出をしたわけではないので、説得性にかけるかもしれませんが、少なくとも 3 つの点で興味深い結果が得られます。1 つは、カルマン定数を一意的に決定できること、2 つめは、対数領域を一意的に決めることができることです。最後の 1 つは、壁近くでの新しい速度プロファイル (4.1 節参照) を導くことができることです。

3.5 粗面境界層における PDF 不変領域

滑面乱流境界層ばかりでなく、粗面乱流境界層にも対数領域が存在することは実験的には古くから知られています。谷 一郎先生、古屋善正先生、浜 良助先生など日本の研究者が多くの輝かしい成果を残しています。ここでの疑問は、粗面乱流境界層に PDF 不変領域は存在するのか？その際の PDF 型はどうなっているのかです。ここでも簡潔に結果のみをまとめることにします。図 8 には平均粗度 $k_s = 1.71$ の砂粒粗面での平均速度プロファイルを示したものです。塗りつぶした記号が、滑面と同様の方法で抽出した PDF 不変領域にあたります。PDF 不変領域は対数領域に比べて狭い範囲に存在します。これは滑面境界層とは逆の傾向です。どうしてこのようになったかを考えてみますと、粗面の場合には原点補正という操作があり、この結果として平均速度分布がより広い領域で対数則に従う傾向を示したことが考えられます。仮に原点補正をしない場合の速度分布を波線で示しました。そこにはもはや広い範囲の対数領域は存在せず、PDF 不変領域は原点補正の影響をうけない対数領域とよく対応していることがわかります。PDF 不変領域における PDF 型は滑面の場合とよく一致しています。

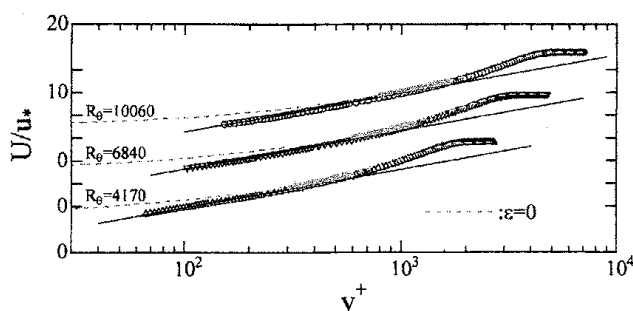


図8 砂粒粗面境界層の平均速度プロファイルと PDF 不変領域.

3.6 整構造との関係

そもそも、乱流境界層に対数則が現れる物理的背景は何かをよく考えたものでした。むかし読んだ文献に、“In the event the large scale structures of the turbulent boundary layer are “hairpin eddies”, and if as argued here, the logarithmic region reflects the character of these structures, then the form of these structures must in some sense be independent of Reynolds number since the logarithmic region has been found to be extent at all measured Reynolds numbers, and the logarithmic law found invariant with Reynolds number.” [19]、という記述があり、ずっと頭の隅にのこっていました。つまり、対数領域は境界層中の秩序構造（私はこの言葉の変わりに、恩師が良く用いていた”整構造”をもちいます）となんらかの関係があるというものです。整構造を定義すること自体が大問題であり、これが実験的研究の進展を妨げた面もあります。いろいろ考えましたが、整構造の定義に主観が入り込まない方法として POD (Proper Orthogonal

Decomposition) があります。図9 (a) には、流方向の瞬時の速度分布を24本の熱線風速計を用いて測定した等値面を示しました。PODによって抽出される整構造を図9 (b) に示します。整構造がPDF不変仮説にどれくらい寄与するのかを詳しく調べました。結果として、整構造はPDF不変領域を構成するための必要かつ十分な条件には成り得ないことがわかりました [25]。対数領域は、壁近くでの作られた乱れのエネルギーが外層へと運ばれる過程で形成されるという肖像が浮かびます。簡単な解析では確かにそのようなことが起こっていそうですが、詳しい解析は今後の課題です。

4 幾つかの懸念

この章は、乱流境界層の研究をはじめてから、日ごろ感じている幾つかの懸念についてまとめてみました。

4.1 あたらしい速度プロファイル

平均速度分布には、主流方向速度のPDFがGauss分布にもっとも類似する位置に小さなバンプが存在します。バンプを対数領域に含めるかどうかは、平均速度プロファイルを決める上で重要な問題です。レイノルズ数が小さい場合には、バンプを含めざるおえません。そうしないと、対数領域自体が無くなってしまいます（例えば、図1ではバンプを含めて対数則がフィットされています）。レイノルズ数が小さな境界層の平均速度分布を対数則でフィットしたデータを注意深く見ると、対数則から少しずれてることに気づきます。その

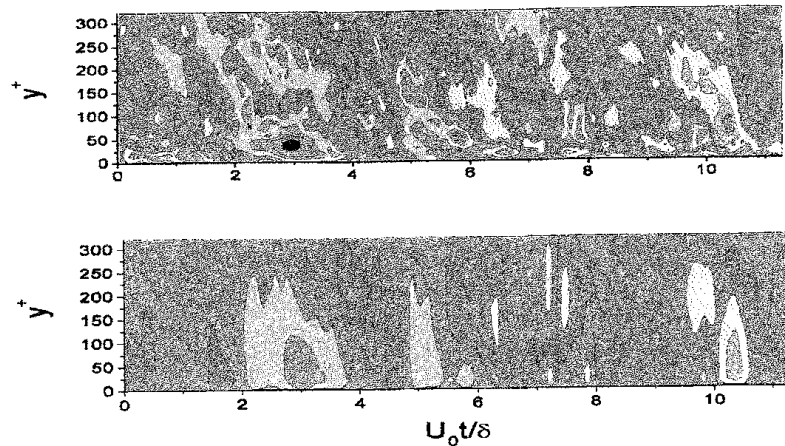


図9 (a) 流方向変動速度の等値面、(b)PODにより抽出された整構造。

場合には、対数領域の始まりは古典的な $y^+ \simeq 30$ となります。また、カルマン定数もバンプを含めた傾きとなりますから、 $\kappa = 0.41$ 程度が妥当でしょうか。しかし、このバンプは対数領域に本当に含めてもよいのでしょうか？低いレイノルズ数の実験データを解析する限りは、その答えは得られません。高いレイノルズ数の速度プロファイルを見て初めて、ああバンプは対数領域の一部ではなく、その外縁に横たわるのが対数領域なのだと理解できます。バンプの近くの数値分布は、Oberlack の提示した、 $U^+ = 1/\kappa \cdot \ln(y^+ + A) + B$ で近似できます [15, 11]。定数 A のオーダーは1です。3.4 節で述べた、PDF 方程式から得られる第三番目の興味ある結果は、この定数 A を一意に与えることができることです。また、定数 A と y_p^+ は密接に関係していることもわかりました。

4.2 レイノルズ数

平均速度プロファイルを議論するには、高いレイノルズ数が必要であることはすでに述べました。平板乱流境界層の場合には、 $5000 < R_\theta$ でないと対数領域の存在を実験的に取り扱うことは難しと考えられます。同じ普遍則という観点からすると、Kolmogorov の慣性小領域でのエネルギースペクトル型についても、十分に大きなレイノルズ数でないと、実験では取り扱いが難しいことが連想されます。乱流境界層の平均速度プロファイルと Kolmogorov の-5/3 乗則は、しばしば対比されることがあります。それらが成立する物理背景は当然異なっていますが、先達の議論にみられるように、現象論的にはいくつかの類似点が挙げられます。この研究では、平均速度プロファイルのバンプを取り扱つかいましたが、エネルギースペクトルにも散逸領域の始まりにバンプが確認されます。バンプは-5/3 乗領域に含めないのは当然でしょうが、レイノルズ数が低い場合には、バンプ領域を含んでべき指数を決めていることが多いようです。1 decade 以上の慣性小領域が見出されるためには、 R_λ が数千程度必要と考えられます。Kolmogorov が意図した粘性に独立な小スケール運動の普遍的性質が実現されるのは、バンプを超えた低波数の領域と考えるのが妥当でしょう。 $R_\lambda \simeq 10000$ のエネルギースペクトル（1次元）をみると、確かにそのような普遍領域の存在を確認できます（図10参照 [28]）。-5/3 乗則は、その後、Kolmogorov 自身によって修正されることとなります。べき指数の修正は微量で、実験のみからその値を確定することはむづかしく、簡単なモデルがあったことが、研究の進展を促したといえます。最近の世界最大の一様等方場の DNS の結果では、間欠性指数が従来の値よりも多きことを報告

しています [9]。その物理的解釈は著者らによっては示されていませんが、より高いレイノルズ数における乱流の知見から解決されるのではないかと予測しています。

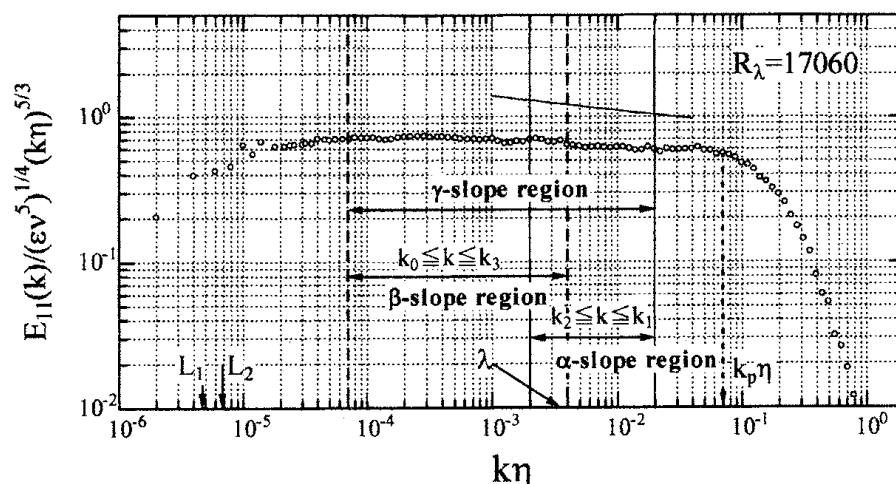


図 10 大気乱流の 1 次元エネルギースペクトル。

4.3 チャンネル流れと境界層

チャンネル流の数値計算で多くの成果をあげている研究者が言った言葉”Wall-bounded flows I think are about to be finished, but that means that should get together and try to reach a consensus.”がこのところ気になっていました。チャンネル流も境界層も壁乱流と分類されるのでしょうか、両者はおなじ流れ場と考えてもよいのでしょうか？チャンネル流れで明らかにされた知見は、境界層でも通用するのでしょうか？壁近くの現象に限れば、両者は同じものと多くの人は考えています。わたしも当然そう考えていました。そして、最近の実験では、平均速度プロファイルについても境界層と同様のカルマン定数が得られています [6]。しかし、手元にあるいくつかのデータを比較してみると、いくつかの疑問がわいてきます。二次元チャンネル流の実験はまだおこなっていませんが、正方形ダクトのデータを解析してみました。層外の主流が存在しないという観点からは、チャンネル流と同等と考えられます。PDF 普遍領域の大きさですが、境界層と同程度の条件でも、ダクトの場合にはより広い範囲にわたって存在しています。また、境界層中での変動圧力と主流方向速度の相関を計測しましたが、その分布はチャンネル流とは定性的に異なっていました [26]。詳しい内容は別途報告したいと考えていますが、境界層の場合は主流の影響が壁近くまで及んでいることが、これらの相違に起因しているのではないかと予想しています。

参考文献

- [1] Amari, S., 1985, *Differential-Geometrical Methods in Statistics*, Lecture Notes Stat., Vol.28, p.1.
- [2] Afzal, N., 2001, "Power law and log-law velocity profiles in turbulent boundary-layer Flow: equivalent relations at large Reynolds numbers", *Acta Mechanica*, **151**, pp.195-216.

- [3] Barlenblatt, G. I., 1993, "Scaling laws for fully developed turbulent shear flows, part 1. Basic hypothesis and analysis", *J. Fluid Mech.*, **248**, pp.513-520.
- [4] Bushmann, M. H., and Gad-el-Hak, M., 2003, "Debate Concerning the Mean-Velocity Profile of a Turbulent Boundary Layer", *AIAA Journal*, **41**, pp.565-572.
- [5] Degraaff, D. B. and Eaton, J. K., 2000, "Reynolds-number scaling of the flat-plate turbulent boundary layer", *J. Fluid Mech.*, **422**, pp.319-346.
- [6] Zanon, E. S., Durst, F., and Nagib, H., 2003, "Evaluating the Law of the Wall in Two-dimensional Fully Developed Turbulent Channel Flow", *Phys. Fluids*, **15**, p.3079.
- [7] George W. K. and Castilio, L., 1997, "Zero-pressure-gradient turbulent boundary layer", *Appl. Mech. Rev.*, **50**, pp.689-729.
- [8] Hites, M. H., 1997, "Scaling of high-Reynolds number turbulent boundary layers In the national diagnostic facility", Ph.D. thesis, Illinois Institute of Technology.
- [9] Kaneda, Y., Ishihara, T., Yokokawa, M., Itakura, K., and Uno, A., 2003, "Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box", *Physics of Fluids*, **15**, L21.
- [10] Kullback, S., 1959, *Information Theory and Statistics*, Wiley, London.
- [11] Lindgren, B., Österlund, J. M., and Johansson, A. V., 2002a, "Evaluation of New Scaling Laws for Turbulent Boundary Layers Using the KTH Data-Base", 40th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 14-17 January, Reno, Nevada.
- [12] Lindgren, B., Johansson, A. V., and Tsuji, Y., 2004, "Universality of Probability Density Distributions in the Overlap Region in High Reynolds Number Turbulent Boundary Layers, *Physics of Fluids*, **16**, pp.2587-2591.
- [13] Osaka, H., Kameda, T., and Mochizuki, S., 1998, "Local skin friction coefficient evaluated by direct measurement method and mean flow quantities in a turbulent boundary layer", *JSME Int. J. Fluids and Thermal Eng.* **41**, pp.123-129.
- [14] Oberlack, M., 2001, "A unified approach for symmetries in plane parallel turbulent shear flow", *J. Fluid Mech.*, **427**, pp.299-328.
- [15] Österlund, J. M., 1999, "Experimental studies of zero pressure-gradient turbulent boundary layer flow", Doctoral thesis, Royal Institute of Technology.
- [16] Österlund, J. M., Johansson, A. V., Nagib, H. M. and Hites, M. H., 2000, "A note on the overlap region in turbulent boundary layers", *Phys. Fluids*, Vol.12, pp.1-4.
- [17] Panton R. L., 2002, "Evaluation of the Barenblatt-Chorin-Prostokishin power law for turbulent boundary layers", *Physics of Fluids*, **14**, pp.1806-1808.
- [18] Purtell, L. P., Klebanoff, P. S., and Buckley, F. T., 1981, "Turbulent boundary layer at low Reynolds number", *Physics Fluids*, **24**, pp.802-811.
- [19] Tsuji, Y. and Nakamura, I., 1999, "Probability density function in the log-law region of low-reynolds number turbulent boundary layer, *Phys. Fluids*, **11**, pp.647-658.
- [20] Tsuji, Y., Nakamura, I. and Kushida, T., 1999, "The PDF Profile in the Log-law Region and the Contribution from Coherent Structures", *Proceedings of TSFP1*, September 12-15, Santa Barbara.
- [21] Tsuji, Y., Miyachi, K. and Nakamura, I., 2001, "Invariant Assumption of PDF Profiles in the Log-law Region in Smooth and Rough Wall Turbulent Boundary Layers", *Proceedings of TSFP2*, June 27-29, KTH Sweden, pp.509-512.

- [22] 辻 義之, 宮地 圭, 中村育雄, 2002, "平板乱流境界層対数速度分布領域における変動速度確率密度関数の特性", 日本機化学会論文集B編, 68 巻, p.785.
- [23] Tsuji, Y., Lindgren, B., and Johansson, A.V., 2003, "Invariant Assumption of PDF and Mean Velocity Profile in High-Reynolds Number Turbulent Boundary Layers", Proceedings of TSFP2, June 25-27, Sendai Japan, pp.135-137
- [24] 辻 義之, 宮地 圭, 鈴木孝裕, 中村育雄, 2004, "平板乱流境界層対数速度分布領域における変動速度確率密度関数の特性第三報：対数法則領域における整構造の役割", 日本機化学会論文集B編, 70 巻, p.1679.
- [25] Tsuji, Y., Fransson, J. H. M., Alfredsson, P. H., and Johansson, A. V., 2005, "Pressure Statistics in High-Reynolds Number Turbulent Boundary Layer", Proceedings of TSFP4, June 27-29, Williamsburg, U.S.A.
- [26] Tsuji, Y., Lindgren, B., and Johansson, A.V., 2005, "Self-similar Profile of Probability Density Functions in Zero-pressure Gradient Turbulent Boundary Layers", submitting.
- [27] Tsuji, Y., 2004, "Intermittency Effect on Energy Spectrum in High-Reynolds Number Turbulence", Phys. Fluids, **16**, pp.L43-46.