

Fermat の大定理について

上智大 理工 和田秀男

奇素数 P に対して次の式が有理整数解を持つとする:

$$(1) \quad x^p + y^p + z^p = 0, \quad (xyz, P) = 1.$$

このとき $B_{p-3} \equiv B_{p-5} \equiv B_{p-7} \equiv B_{p-9} \equiv 0 \pmod{P}$ が成立
つ (Minimamoff [1]). B_{p-n} はベルヌイ数である. 最近,
計算機を用いて $B_{p-11} \equiv B_{p-13} \equiv B_{p-15} \equiv B_{p-17} \equiv B_{p-19} \equiv 0 \pmod{P}$
 P) が得られたのでその方法を示そう.

§1. 方法 まず Kummer の criteria を用い Minimamoff
は

$$(2) \quad B_{p-n} \cdot P_n(t) \equiv 0 \pmod{P}, \quad (n=3, 5, \dots, P-2)$$

を示した. $P_n(x)$ は次のような $\mathbb{Z}$ 係数 $n-1$ 次多項式で
ある:

$$P_n(x) = a_{n,1}x - a_{n,2}x^2 + \dots - a_{n,n-1}x^{n-1},$$

$$a_{n,m} = m^{n-1} - \binom{n}{1}(m-1)^{n-1} + \binom{n}{2}(m-2)^{n-1} - \dots + (-1)^{m-1}\binom{n}{m-1}.$$

また x, y, z を (1) の解としたとき, t は

/

$A = \left\{ \frac{y}{x}, \frac{x}{y}, \frac{z}{x}, \frac{x}{z}, \frac{z}{y}, \frac{y}{z} \right\}$ の任意の元である.

合同式 (2) は左辺を既約分数に直したとき、分子が P で割れることを意味する. $a_{n,m} = a_{n,n-m}$ となるので $P_n(x)$ は $x(1-x)$ で割り切れる. たとえば $n=11$ のとき

$$P_{11}(x) = x(1-x)(1 - 1012x + 46828x^2 - 408364x^3 + 901990x^4 - 408364x^5 + 46828x^6 - 1012x^7 + x^8)$$

となる. $P_n(x) = x(1-x)Q_n(x)$ とおけば $Q_n(x) = 0$ は逆数方程式となり、根はすべて正の単根である (Krasner [3]).

もし $P_n(t) \not\equiv 0 \pmod{P}$ となる元 $t \in A$ が存在したならば、(2) より $B_{p-n} \equiv 0 \pmod{P}$ が得られる. A の正体はわからないが $x + y + z \equiv x^p + y^p + z^p \equiv 0 \pmod{P}$ を使えば t を A の任意の元としたとき

$$A = \left\{ t, \frac{1}{t}, -1-t, -\frac{1}{t+1}, -\frac{1+t}{t}, -\frac{t}{1+t} \pmod{P} \right\}$$

となり、3通りの可能性がある.

$|A|=3$ の場合. このとき $A = \left\{ 1, -2, -\frac{1}{2} \pmod{P} \right\}$

となる. もし $Q_n(-2) \not\equiv 0 \pmod{P}$ が得られたならば、

$B_{p-n} \equiv 0 \pmod{P}$ となる. $Q_n(x) = 0$ の根は正根ばかりなので $Q_n(-2) \not\equiv 0$ である. たとえば $Q_{11}(-2) =$

$34082521 = 11 \cdot 41 \cdot 75571$ となる. もし (1) が成立つならば

$$(3) \quad x^{p-1} \equiv 1 \pmod{P^2}$$

が成立 (Wieferich [2]). $11, 41, 75571$ は (3) を満たさないのて $Q_{11}(-2) \not\equiv 0 \pmod{P}$ が得られた.

$|A|=2$ の場合 このとき $A = \{t \mid t^2 + t + 1 \equiv 0 \pmod{P}\}$ となる. もし A の 2 元に対し $Q_n(t) \equiv 0 \pmod{P}$ ならば $Q_n(x) \equiv (1+x+x^2)R_n(x) \pmod{P}$ となるはずである. よって $Q_n(x)$ を $(1+x+x^2)$ で割ってみる.

$Q_n(x)$ も $(1+x+x^2)$ も逆数方程式なので、商も逆数方程式となるはずである. 計算量を半分にするために余りは $\frac{n-3}{2}$ 次の所とし、 $S_n \cdot x^{\frac{n-3}{2}}$, ($S_n \in \mathbb{Z}$) とする.

$S_n = 0$ とすると $Q_n(x) = 0$ が虚根を持つてしまうので $S_n \neq 0$ である. たとえば

$$\begin{aligned} Q_{11}(x) = & (1+x+x^2)(1-1013x+47840x^2 \\ & -455191x^3+47840x^4-1013x^5+x^6) \\ & +1261501x^4 \end{aligned}$$

となる. $S_{11} = 1261501 = 683 \cdot 1847$ であり $683, 1847$ は (3) を満たさないのて $Q_{11}(t) \not\equiv 0 \pmod{P}$ となる.

$|A|=6$ の場合 6 元の A の元に対して $Q_n(t) \equiv 0 \pmod{P}$ ならば $Q_n(x)$ は

$$\begin{aligned} F(x) = & (x-t)(x-\frac{1}{t})(x+1+t)(x+\frac{1}{1+t})(x+\frac{1+t}{t})(x+\frac{t}{1+t}) \\ = & 1+3x+ax^2+(2a-5)x^3+ax^4+3x^5+x^6 \end{aligned}$$

$$(a = -(1 + 3t - 5t^3 + 3t^5 + t^6) / \{t^2(1+t)^2\})$$

で割り切れるはずである。 a の値はわからないので、変数として扱い割り算を実行する：

$$(4) \quad Q_n(x) = F(x) \cdot T_n(x) + U_n(a) \cdot \{x^{(n-7)/2} + x^{(n+1)/2}\} \\ + V_n(a) \cdot \{x^{(n-5)/2} + x^{(n-1)/2}\} + W_n(a) \cdot x^{(n-3)/2} \\ (T_n(x) \in \mathbb{Z}[a, x], U_n(a), V_n(a), W_n(a) \in \mathbb{Z}[a]).$$

さて $\mathbb{Q}[a]$ の中で考えると $U_n(a), V_n(a), W_n(a)$ の最大公約数は 1 であることを証明しよう。もし最大公約数 $D_n(a) \in \mathbb{Z}[a]$ の次数 m が 1 次以上ならば、(4) の両辺に適当な自然数 k を掛けると

$$(5) \quad k \cdot Q_n(x) = k \cdot F(x) \cdot T_n(x) + D_n(a) \cdot E(x) \\ (E(x) \in \mathbb{Z}[a, x], \deg D_n(a) = m \geq 1)$$

となる。 $D_n(a)$ を t の有理式で表わすと

$$(6) \quad D_n(a) = b_m a^m + b_{m-1} a^{m-1} + \dots \\ = \frac{1}{t^{2m}(1+t)^{2m}} \{b_m (-t^6 - \dots - 1)^m \\ + b_{m-1} t^2 (1+t)^2 (-t^6 - \dots)^{m-1} + \dots\} \\ = \frac{1}{t^{2m}(1+t)^{2m}} G(t) \\ (G(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg G(x) = 6m)$$

となる。 $Q_n(x) = 0$ は正根しかないのので $Q_n(x)$ と $Q_n(-1-x)$ の終結式 R は 0 でない。よって $0 < |R| < P$ なる素数 P に対してはどのような $t \in \mathbb{Z}$ を積ってきても

同時に

$$(7) \quad Q_n(t) \equiv 0 \pmod{P}$$

$$Q_n(-1-t) \equiv 0 \pmod{P}$$

が成立することはない (Krasner [3]). 代数体には無限に多くの 1 次の素イデアルが存在することから $t \in \mathbb{N}$ を十分大きく取れば $P \mid G(t)$, $|R| < P$, $|b_m| < P$, $b < P$ となる素数 P が存在する. この P に対しては (5), (6) より (7) が両式とも成立し、矛盾である. よって $U_n(a)$, $V_n(a)$, $W_n(a)$ の最大公約数は 1 である. よって

$$(8) \quad A_n(a) \cdot U_n(a) + B_n(a) \cdot V_n(a) + C_n(a) \cdot W_n(a) = D_n \in \mathbb{N}$$

$$(A_n(a), B_n(a), C_n(a) \in \mathbb{Z}[a])$$

となる $A_n(a)$, $B_n(a)$, $C_n(a)$, D_n が存在する. もしある a に対して $U_n(a) \equiv V_n(a) \equiv W_n(a) \equiv 0 \pmod{P}$ ならば (8) より $D_n \equiv 0 \pmod{P}$ となる. よって $D_n \not\equiv 0 \pmod{P}$ ならば (4) より $Q_n(t) \not\equiv 0 \pmod{P}$ となる. たとえば $D_{11} = 11$ となり $P = 11$ は (3) を満たさないのて $B_{p-11} \equiv 0 \pmod{P}$ が得られる.

このような方法で 3 つの場合にそれぞれ例外的な素数 p を求め、次にこれらが (3) を満たさないことを確かめ

$$B_{p-11} \equiv B_{p-13} \equiv B_{p-15} \equiv B_{p-17} \equiv B_{p-19} \equiv 0 \pmod{P}$$

が得られた.

§2. アルゴリズム. まず苦労したのは自然数の素因子分解である. 今回は一番単純な方法で行なった.

まず, m が素数か否かは

$$\exists a, (a, m) = 1, a^{m-1} \not\equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow m = \text{合成数}$$

$$\left. \begin{array}{l} m-1 = g_1^{a_1} \cdots g_r^{a_r}, \quad g_i = \text{素数} \\ \forall i, \exists a_i, a_i^{m-1} \equiv 1 \pmod{m} \\ a_i^{(m-1)/g_i} \not\equiv 1 \pmod{m} \end{array} \right\} \Rightarrow m = \text{素数}$$

で判定した. $m = \text{合成数}$ のときは m を分解するために,

$\sqrt{m}$ 以下の奇数 (ただし 3 と 5 と 7 の倍数はぬかした) で小さい順に割っていった. 割り算は倍長の浮動小数計算で実行した. 精度内の整数に対して正しく四則算法は行なわれているはずで, もし正しい整数の答が得られないとしたら, その計算機は欠陥商品である.

次に (4) のような変数 a を含む割り算であるが, $U_n(a)$, $V_n(a)$, $W_n(a)$ の次数は $\left[\frac{n-5}{4} \right]$ 次以下なので,

$a = -1, 0, 1, 2$ 等の $\left[\frac{n-5}{4} \right] + 1$ 個の値を代入し,

(4) を実行し, 連立 1 次方程式を解いて $U_n(a)$, $V_n(a)$, $W_n(a)$ の係数を求めた.

さて, 一番苦労したのは (8) 式を満たすなるべく小さな D_n を求めることであつた. 勿論, ユークリッドの互除法で求めるのだけれど, たとえば $n = 19$ のとき次のよう

に計算した.

$$(9) \quad b_3 \cdot a^3 + b_2 \cdot a^2 + b_1 \cdot a + b_0$$

$$(10) \quad c_3 \cdot a^3 + c_2 \cdot a^2 + c_1 \cdot a + c_0$$

$$(11) \quad d_3 \cdot a^3 + d_2 \cdot a^2 + d_1 \cdot a + d_0$$

の3式の最大公約数を求めるために、適当に整数倍して他の式より引くという同値な変形を繰り返す. たとえば $b_3 \neq 0$, $c_3 = d_3 = 0$ とすることが出来る. 次に (10), (11) の2式に対して同様の変形を行ない $c_2 \neq 0$, $d_2 = 0$ と変形出来る. 次に (9) を $(9) \times c_2 / (b_3, c_2) - (10) \times b_3 \cdot a / (b_3, c_2)$ と変形し次数をへらした. この変形は一般には同値な変形でない. このように大きな数が現われないように次数を下げてゆき、次数が0になるまで行なった. このようにして得られた D_n は一般には (8) で表わされる D_n の最小値とはかぎらない. しかし $n \leq 19$ の場合、変形を吟味することにより、最小値を求めることが出来た. 次に計算結果をまとめてみよう. 少ないデータではあるが、この表より、 n が素数か否かにしたがって $D_n = n$ または 1 となるような気がする.

$Q_{11}(-2)=34082521=11 \cdot 41 \cdot 75571$
 $Q_{13}(-2)=9363855865=5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 20579903$
 $Q_{15}(-2)=3547114323481=\text{prime}$
 $Q_{17}(-2)=1771884893993785=5 \cdot 17 \cdot 20845704635221$
 $Q_{19}(-2)=1128511554418948441=7 \cdot 19 \cdot 916933 \cdot 9253728769$
 $S_{11}=1261501=683 \cdot 1847$
 $S_{13}=-151846331=-7 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 47 \cdot 2731$
 $S_{15}=25201039501=11 \cdot 331 \cdot 419 \cdot 16519$
 $S_{17}=-5515342166891=-23 \cdot 401 \cdot 13687 \cdot 43691$
 $S_{19}=1538993024478301=7 \cdot 19 \cdot 7691 \cdot 8609 \cdot 174763$
 $D_{11}=11$
 $D_{13}=13$
 $D_{15}=1$
 $D_{17}=17$
 $D_{19}=19$

References

- [1] M.Mirimanoff, L'équation indéterminée $x^l+y^l+z^l=0$ et le criterium de Kummer, J. Reine Angew. Math., 128(1905), pp.45-68.
- [2] A.Wieferich, Zum letzten Fermatschen Theorem, J. Reine Angew. Math., 136(1909), pp.293-302.
- [3] M.M.Krasner, Sur le premier cas du théorème de Fermat, C. R. Acad. Sci. Paris, 199(1934), pp.256-258.