

McIntyre, Schumacher, Woodhouseモデルによるクラリネットのシミュレーション

九工大情報工 橋崇哲 高橋公也

1 はじめに

クラリネットの数値シミュレーションには、Schumacher[2]による微分方程式(以下Schumacherモデルと記す)を用いる方法とMcIntyre, Schumacher, Woodhouse[3]による写像関数(以下M. S. W. モデルと記す)を用いる方法がある。この2つのモデルはともに線形共鳴器である管体の効果を多重時間遅れとして取り込んでいるところに力学系としての特徴がある。Schumacherモデルの方が現実のクラリネットにより近いと考えられるが、式が複雑なためパラメータも多く計算にも時間がかかる、リードの開閉に伴う数値的な発散を防ぐためのしきい値の選び方によっても解が変わるといった問題が存在する。それに対してM. S. W. モデルはそういった問題はなく簡単にシミュレーションができる。またリードの振動が音圧と吹鳴圧との差のみによって決まる状態では2つのモデルは定性的に同じ振る舞いをする事がわかっている。これらのことからM. S. W. モデルによってクラリネットの発音機構の概略を調べることは有益であると考えられる。

本研究の目的は、反射関数によって系の振る舞いがどのように変わるかを調べることである。そこで、M. S. W. モデルの写像関数及び反射関数は現実のクラリネットの性質を考慮して次のように設定した。

(1) 写像関数の非線形性を弱くする

(2) 反射関数には遅延時間が短い小さな反射と遅延時間が長い大きな反射を考える

(1)の性質によって、周期倍分岐のような写像の非線形性を原因とする振る舞いは起こりにくく考えられる。しかし、(2)だけでも、反射の位置や幅によっては非常に複雑な波形を出力できることがわかった。

第2章で本研究で用いたモデルについて述べ、第3章1節に全体的な振る舞いを、2節に2つの反射の遅延時間の比を1対2にした場合の振る舞いを示した。第4章で結果を簡単にまとめる。

2 M. S. W. モデル

2.1 M. S. W. モデル

M. S. W. モデルでは、マウスピース部分を次のように表す[3]。

$$\begin{aligned} \text{if } p > P_c \text{ then } F &= C(p - P_0 + \alpha)(P_0 - p) && \text{(リードが開いている状態)} \\ \text{if } p \leq P_c \text{ then } F &= 0 && \text{(リードが閉じている状態)} \\ \alpha &= P_0 - P_c \\ & && \dots \quad (2-1) \end{aligned}$$

変数

F : 口からマウスピースへ流入する空気の流量

p : マウスピース内音圧

定数

P_0 : 吹鳴圧 C : 関数の高さ

α : リードが閉じるときの音圧 P_c と P_0 との差

* Fには特性インピーダンスが既に掛け合わされているとする。以下のFも同様。

本研究では、写像関数の性質を決めるC及び α の値を井戸川の実験([3]~[6])を参考に次のように固定している。

$$C = 0.5 \quad \alpha = 1$$

図1に(2-1)によって与えられる音圧 p と流量 F の関係とクラリネットのマウスピース部分の概略図を表す。

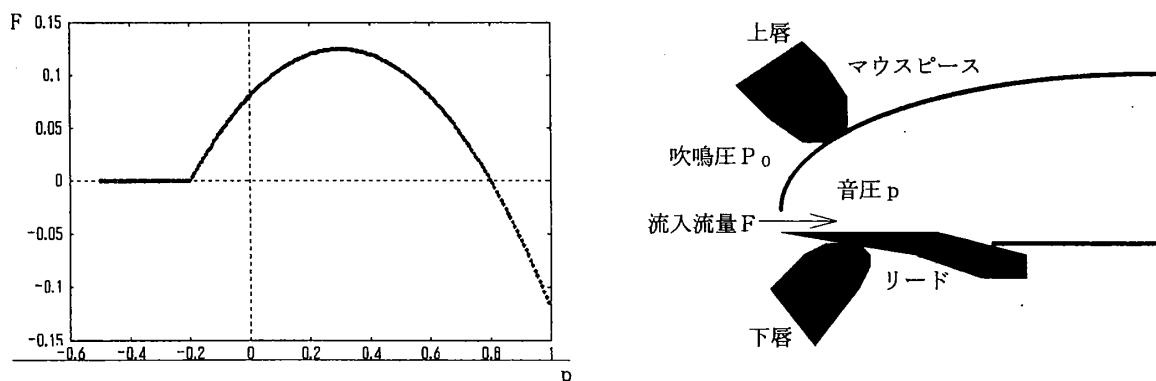


図1 $p-F$ 曲線 ($P_0 = 0.8$) 及びマウスピース部分の概略図

次に反射関数 $r(t)$ を用いると、過去の音圧 p 、流量 F と現在のそれらの関係は、

$$p = F + p_{inc}; \quad p_{inc} = \int_0^\infty r(t') [p(t-t') + F(t-t')] dt' \quad \dots \quad (2-2)$$

と表される。

(2-1), (2-2) から p と F を p_{inc} の関数として書くことができる。さらに時間を離散化することによって次式を得る。

$$\begin{aligned} p_{inc_i} &= \sum_{l=1}^{\infty} r_l [p_{i-l} + F_{i-l}] \\ \text{if } p_{inc_i} > P_c \text{ then} \\ p_{i+1} &= \frac{-(\alpha - 2P_0 + a) + \sqrt{\alpha^2 + 2a(\alpha - 2P_0) + a^2 + 4ap_{inc_i}}}{2} \\ F_{i+1} &= -p_{inc_i} + p_{i+1} \\ \text{if } p_{inc_i} \leq P_c \text{ then} \\ p_{i+1} &= p_{inc_i}; \quad F_{i+1} = 0 \\ \text{ただし } a &= 1/C \quad \dots \quad (2-3) \end{aligned}$$

さらに $X = p + F$ と置くと

$$\begin{aligned} p_{inc_i} &= \sum_{l=1}^{\infty} r_l X_{i-l} \\ X_i &= f(p_{inc_i}) \\ f(p_{inc_i}) &= \begin{cases} \text{if } p_{inc_i} > P_c \text{ then } -p_{inc_i} - (\alpha - 2P_0 + a) + \sqrt{\alpha^2 + 2a(\alpha - 2P_0) + a^2 + 4ap_{inc_i}} \\ \text{if } p_{inc_i} \leq P_c \text{ then } p_{inc_i} \end{cases} \\ \dots & \quad (2-4) \end{aligned}$$

関数 f を図示すると図 2 のようになる。

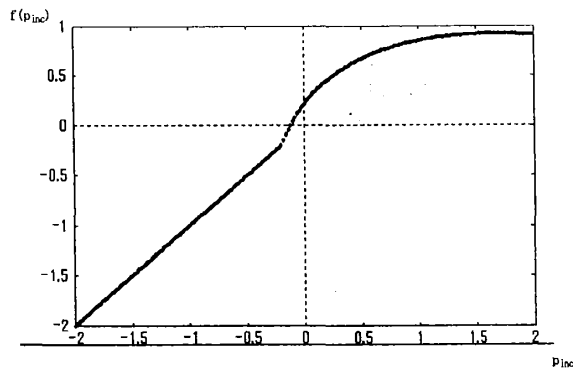


図 2 写像関数 $f(pinc)$ ($P_0 = 0.8$)

2.2 反射関数

ここでは A, B 2つの反射があるとし、反射関数は次の 2つのタイプを用いる。B は管体の開口端反射を考慮したものであり、A はマウスピースや音口等による小さな反射を考慮したものである。

(1) デルタ関数型

$$r_{\delta_i} = A \delta_{i t_a} + B \delta_{i t_b}$$

(2) ガウス関数型

$$r_i = A g(i, t_a, \sigma_a) + B g(i, t_b, \sigma_b)$$

$$\text{ただし } g(i, tr, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\left(\frac{i-tr}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right\}$$

t_a, t_b : 反射の遅延時間

σ_a, σ_b : 反射の幅(分散)

A, B : 反射の大きさ

ここでは、 $A = -0.1$ $B = -0.9$ と固定している。
反射関数の例を図 3 に示す。

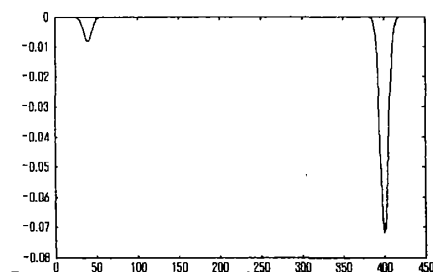
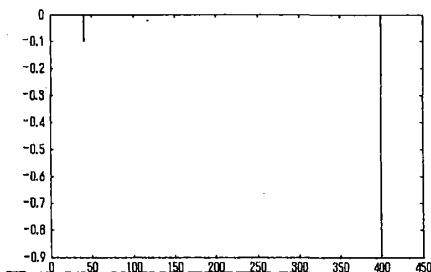


図 3 反射関数の例 左 デルタ関数型； 右 ガウス関数型

2.3 完全反射の場合の解析

完全反射すなわちデルタ関数型反射関数で $A = 0$, $B = -1$ の場合、この系は、

$$p_{inc,i+1} = -f(p_{inc,i})$$

で表される1次元写像となる。この場合 $P_0 < 0.5$ では安定固定点が1つ存在する（リードが振動せず息が抜けている状態）が、 $P_0 > 0.5$ では安定な2周期点（矩形波）が発生する。ただし非線形性を弱く設定しているためにそれ以上の周期倍分岐は起きない。また初期点を $p_{inc} = 0$ とした場合 $P_0 \geq 1$ ではリードが閉じた状態になり発振しない。従って以下のシミュレーションでは $0.5 \leq P_0 \leq 1$ の場合に注目する。

3 結果

3.1 全体的な分岐

このシステムで発生できる代表的な波形を図4に示す。基本的な波形は矩形波と高調波だが、そのあいだに矩形波と高調波が混在した合成波がしばしば発生する。また t_a 対 t_b が奇数比になっていないと、(c)のような高調波がでることがある。ただしガウス関数型反射関数で分散が大きい場合、緩和があるため奇数比以外の場合でも奇数比の高調波と基本的に同じ形となる。

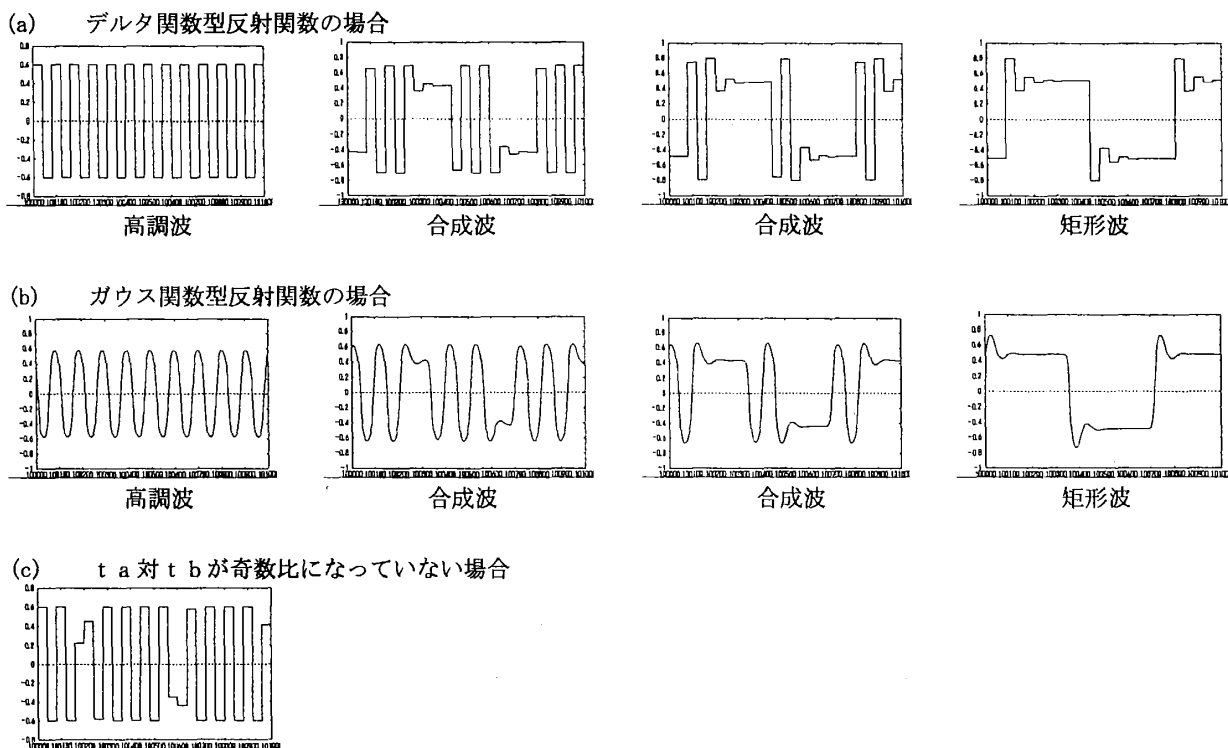
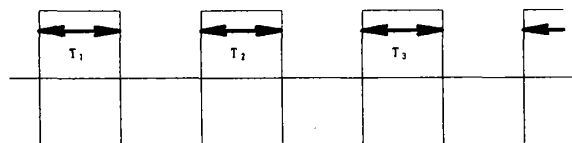


図4 代表的波形の例（横軸：写像回数，縦軸：音圧 p ）

このように様々な波形が出力されるが、出力される波形をいちいち目で調べ分類していくのは大変なので、次のような量を定義し用いることにする。



$$E = \frac{1}{N} (T_1^2 \log T_1^2 + T_2^2 \log T_2^2 + T_3^2 \log T_3^2 + \dots) \quad (2-5)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M T_i^2 \log T_i^2$$

N : データの総数

M : N内に含まれる正の部分の数

(2-5) 式により定義される量Eをここでは便宜上エントロピーと呼ぶ。

P₀を変化させた場合の波形のエントロピーを図5に示す。ただしP₀は連続的に変化させたのではなく、例えばP₀=0.7として初期状態（すべて0にする）から計算し、今度はP₀=0.71にして再び初期状態から同じように計算する、という方法をとっている。

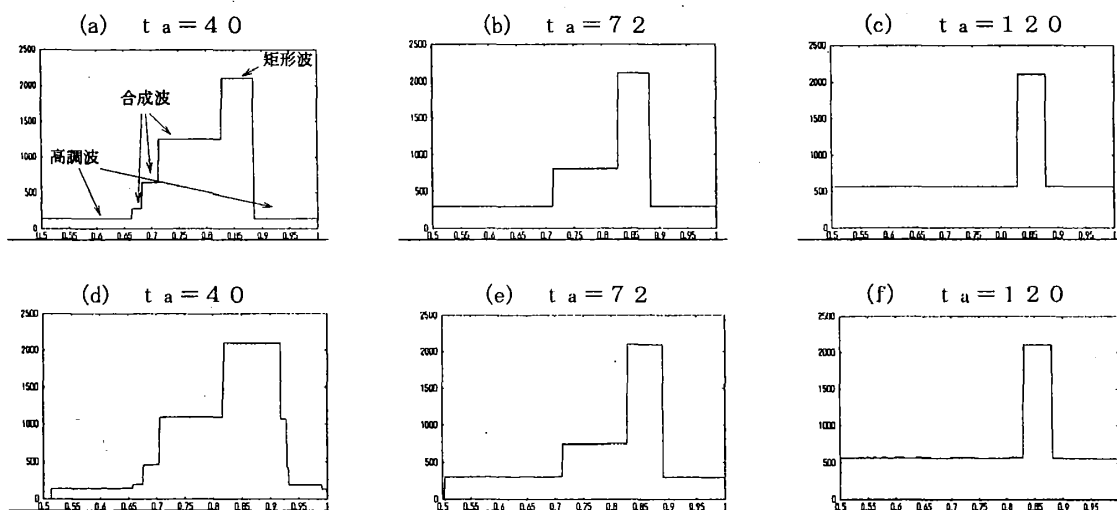


図5 エントロピーの例 $t_b = 360$

(a) (b) (c) : デルタ関数型

(d) (e) (f) : ガウス関数型 ($\sigma_a = \sigma_b = 3$)

P_0 だけでなく t_a/t_b もパラメータとしたときの波形発生の様子は平石によって調べられている[7]。その結果を図6に示す。ただし、この場合も t_a や P_0 は連続的に変化させたのではない。この図を見ると、 t_a/t_b が小さいとき多くの種類の波形が発生することが分かる。この場合 P_0 が大きくなるにつれて、“高調波” → “合成波” → “矩形波” → “合成波” → “高調波” の順番に発生する。また $t_a/t_b = 1/2$ の前後で高調波が見られるが、ちょうど $1/2$ になるところでは高調波は観測されず特異な領域となっている。以下この場合についての詳細な結果について述べる。

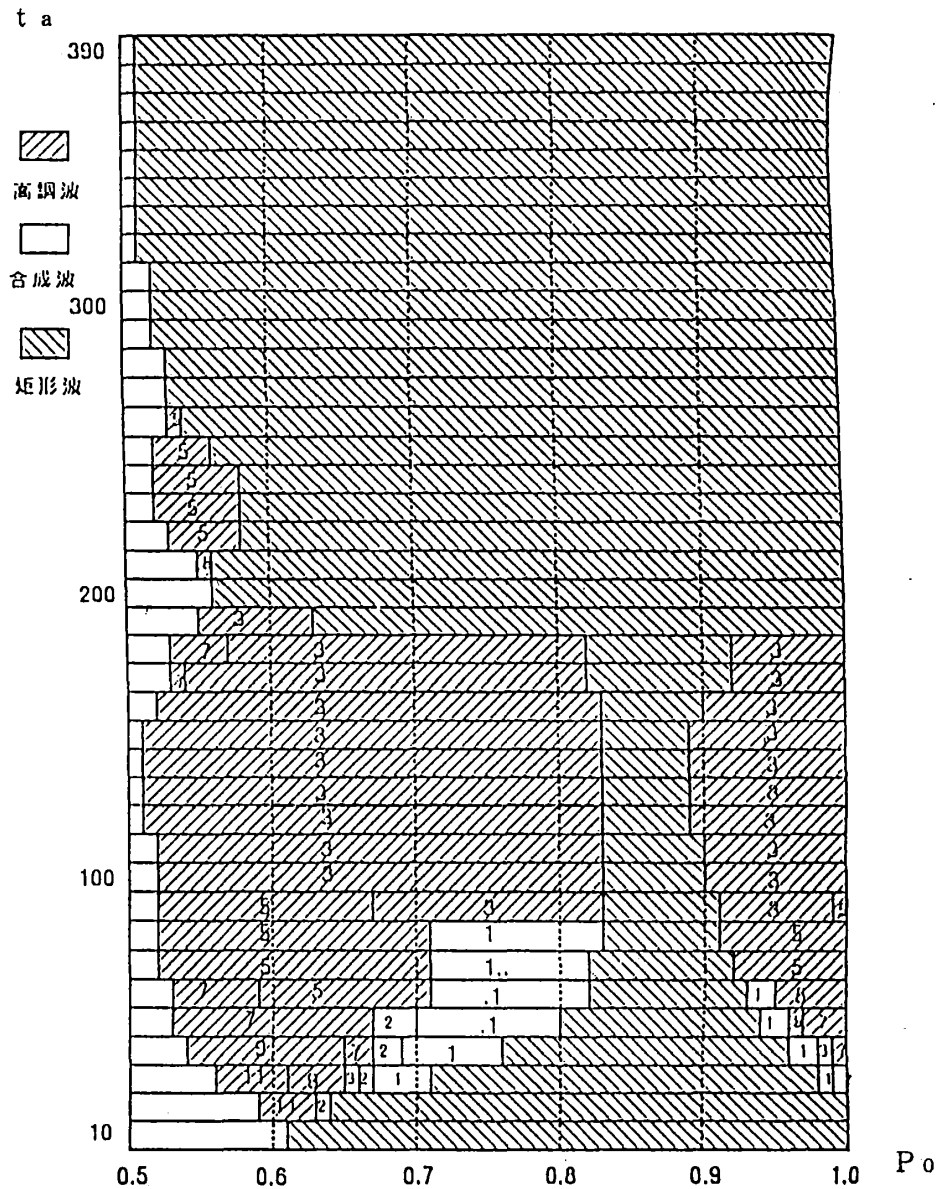


図6 全体の分岐図 ($t_a = 10 \dots 390$, $t_b = 400$; $\sigma_a = \sigma_b = 5$)
中に書かれている数字は、高調波の場合は矩形波に対する倍数を表し、
合成波の場合は矩形波の間に現れる高調波の数を表している。

3.2 t_a 対 t_b を 1 対 2 にしたときの振る舞い

2つの反射の遅延時間の比を 1 対 2 に固定しデルタ関数型及びガウス関数型反射関数のそれぞれについてシミュレーションを行った。以下その代表的な場合について述べる。

3.2.1 デルタ関数型反射関数の場合

反射関数 A の遅延時間 t_a が 180, 反射関数 B の遅延時間 t_b が 360 の場合のエントロピーと代表的な波形を図 7 に示す。

エントロピーが揺らいでいる領域では図 7 (b) のような準周期的な波形が、一定値になっているところでは図 7 (c) のような矩形波が発生している。

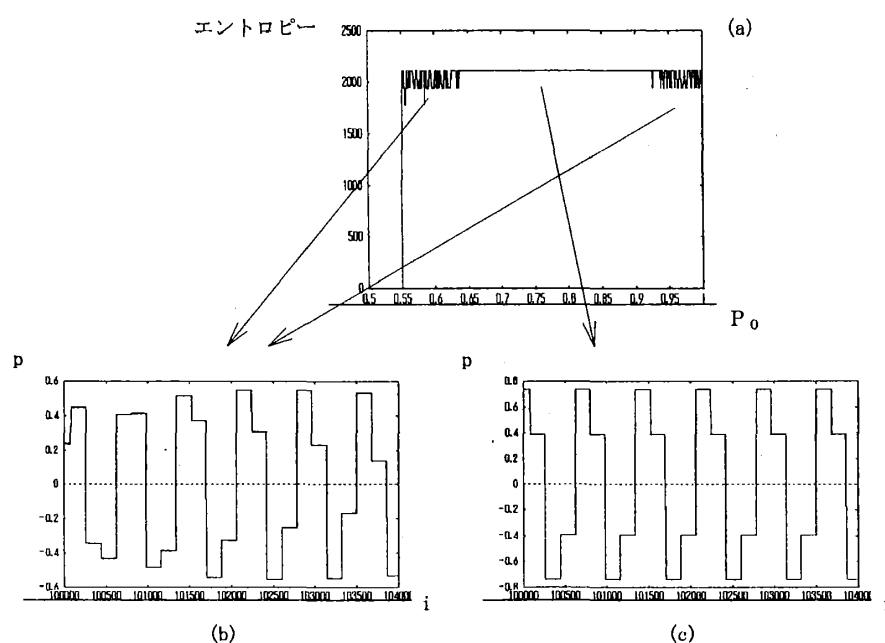


図 7 $t_a = 180$, $t_b = 360$ の場合のエントロピーと波形

反射関数がデルタ関数型でさらに遅延時間の比が 1 対 2 の場合は、次のように 2 変数の写像に変換でき、2 次元空間で完全に表せる。

x_i, y_i が分かっているとすると

$$\begin{aligned} x'_i &= f(Ax_i + By_i) \\ y'_i &= f(Ay_i + Bx_i) \\ x_{i+1} &= f(Ax'_i + By'_i) \\ y_{i+1} &= f(Ay'_i + Bx'_{i+1}) \end{aligned}$$

•
•
•

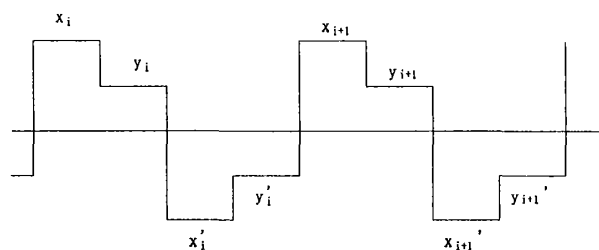


図8に代表的な相図と全体の分岐図の概略を示す。これらから準周期的な波はトーラスに、矩形波は周波数ロックの状態に対応しているのが分かる。

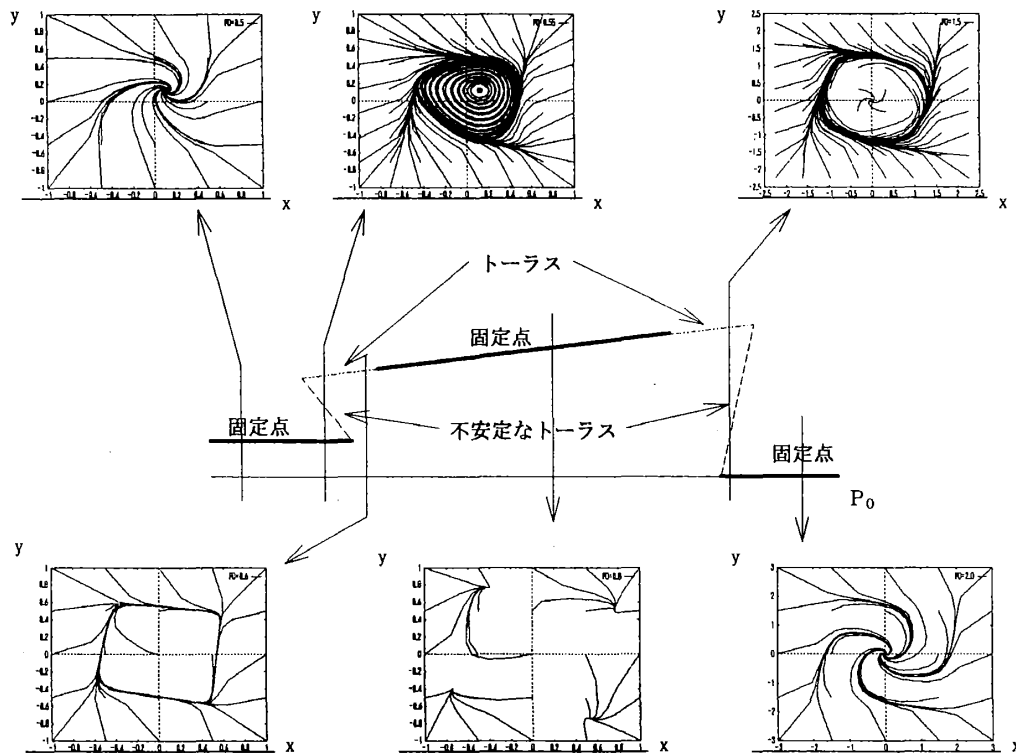


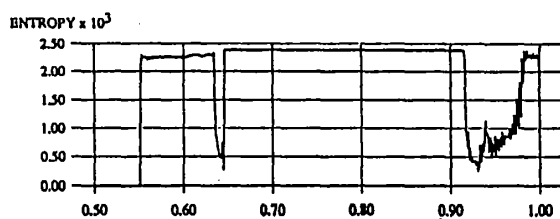
図8 代表的な相図と全体の分岐図の概略

3.2.2 ガウス関数型反射関数の場合

ガウス関数型反射関数でも、2つの反射の幅が同じくらい、またはBの幅の方が大きい場合は、デルタ関数型と基本的には変わらない（準周期解が緩和され角が取れて高調波に近くなる程度）。しかし、Aの幅をBに対して大きくするとトーラスがロックを起こす直前及び再びトーラスになる直後の部分が壊れて、非常に複雑な波形を作り出す。（図9）

この波形は、デルタ関数型反射関数で見られる波形とは全く異なっているように見えるが、データを長く取ってみると間欠的に変化する準周期解の構造が残っていることが分かる。図10(a)はデルタ関数型反射関数で P_0 を0.92としたもの、図10(b)は同じ条件で $\sigma_a = 5$, $\sigma_b = 1$ としたもの、図10(c)は同じ条件で $\sigma_a = 8$, $\sigma_b = 1$ としたものである。(a)にみられる間欠的な準周期解の構造が σ_a が大きくなるにつれて若干壊れつつも残っている。また、これらの波形は非常に複雑ではあるが、パワースペクトルをとるとカオス的ではなく準周期的であることが分かった。

(a) エントロピー



(b) $P_0 = 0.92$ のときの波形

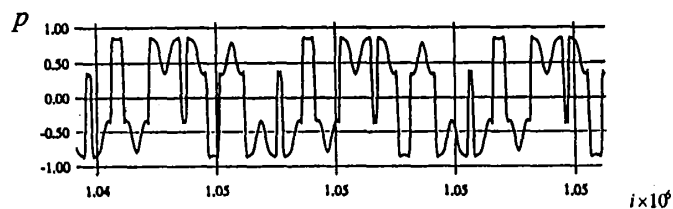
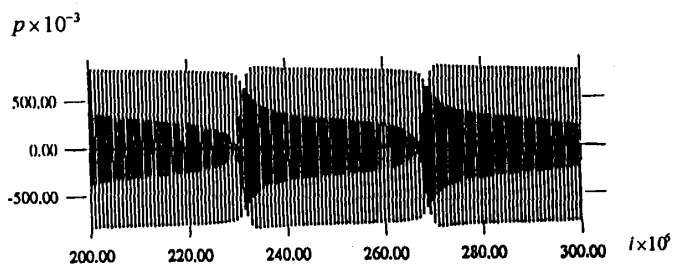
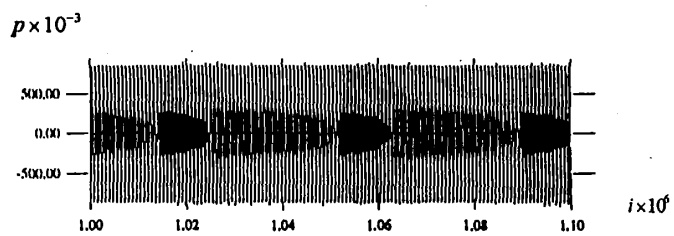


図9 ガウス関数型反射関数で見られる複雑な波形 ($\sigma_a = 8, \sigma_b = 1, t_a = 200, t_b = 400$)

(a) デルタ関数型反射関数の場合



(b) ガウス関数型反射関数 ($\sigma_a = 5, \sigma_b = 1$)



(c) ガウス関数型反射関数 ($\sigma_a = 8, \sigma_b = 1$)

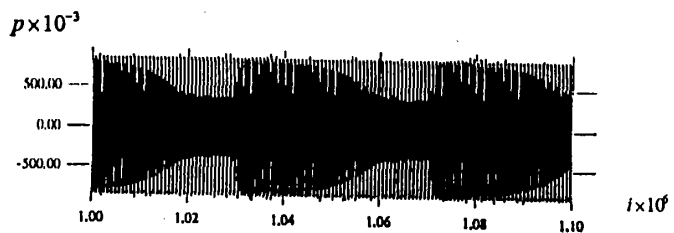


図10 デルタ関数型及びガウス関数型反射関数での波形の比較
($P_0 = 0.92, t_a = 200, t_b = 400$)

4. まとめ

クラリネットを多重時間遅れの入った写像としてモデル化したM.S.W.モデルを用いシミュレーションを行った。まず管体による時間遅れを特徴づける反射関数を変化させシステムの振る舞いがどのように変わるか調べた。全体的には、 P_0 が大きくなるにつれて “高調波” → (合成波) → “矩形波” → (合成波) → “高調波” の順番に発生する (P_0 は定数であり変更するたびに初期条件から計算し直す)。これは井戸川の人工吹鳴実験と基本的には同じである。しかし実験では P_0 を連続的に変化させており様々なヒステリシス構造が現れるが、本研究ではいまのところ実験のようなヒステリシスは見られない。

反射の遅延時間の比を1対2にしたときにはシステムは特異的な振る舞いを示す。2つの反射の幅を変えると、準周期的な波から矩形波へ遷移する臨界領域で複雑な波形が現れるのは前述のとおりである。またこの場合定常状態に落ちつくまでかなり長い過渡状態が現れる。図10には100万回計算したデータをのせているが、これは他の高調波や矩形波などに比べて定常状態に落ちつくのが非常に遅いためである。これが実時間でどのくらいになるかというと、例えば反射Bの遅延時間が400で0.4msに対応すると考えると、1回写像が0.01msになり100万回の計算は10秒に相当する。実際の演奏で目的の音に到達するのに5秒や10秒かかるようではとても実用にはならないだろう。もちろんふつう使われる音に対応する矩形波はすぐ定常状態になるため、そのような心配は不要だろうが、演奏者が意識的なり無意識的に不安定な過渡状態を用いている可能性は否定できないと考えられる。

本研究からこのシステム(非線形写像+2重時間遅れ)はマウスピース部分の非線形性が大きくなくても、様々な波形を出力できることが分かった。3.2.1節を除けば初期条件は総て0であり、あらかじめ種となる波形を入力しておけばさらに多数の波形を出力できるだろう。それにもかかわらずカオスと呼べる波形は見つかっておらず、せいぜい図10のような複雑ではあるが準周期的な波形が現れる程度である。現実の楽器でも周期的及び準周期的な波形が多くカオス的な波形はわずかしは見つかっていないことを考えると、M.S.W.モデルがクラリネットの振る舞いをかなり忠実に再現している可能性は大きい。今後、吹鳴圧を変化させた場合のヒステリシスを伴う分岐に対するSchumacherモデルやM.S.W.モデルを用いた理論的解析及び時間遅れの入った力学系の持つ性質の解明が強く望まれる。

謝辞

本研究に当たって、貴重なヒントを与えてくださった立命館大学池田研介教授、数々の論文やデータを惜しみなく提供して下さった埼玉工業大学井戸川徹教授に深く感謝します。

参考文献

- [1] N.H.Fletcher and T.D.Rossing, "The Physics of Musical Instruments" (Springer - Verlag, New York, 1991)
- [2] R.T.Schumacher, "Ab Initio calculations of the oscillations of a clarinet," *Acustica* 48, 71-85(1981).
- [3] M.E.McIntyre, R.T.Schumacher and J.Woodhouse, "On the oscillations of musical instruments," *J. Acoust. Soc. Am.* 74, 1325-1345(1983).
- [4] 井戸川徹, "楽器の非線形振動 - 木管楽器について -," *物性研究* 55-2, 154-176(1990-11).
- [5] 井戸川徹, "管楽器のカオス - クラリネットを中心に -," *日本音響学会* 49巻1号(1993).
- [6] 井戸川徹, "最近における木管楽器の音響学的研究," *日本音響学会* 44巻12号(1988).
- [7] 平石大介, 修士論文 "木管楽器の発音機構," 九州工業大学(1993).
- [8] 池田研介, "光カオスは応用可能か?," *光学* 第17巻第10号(1988).