

多タイプ Galton-Watson process の 漸近的性質について

佐賀大 理工 小倉幸雄

① 差分方程式系

$$(1) \begin{cases} u(n+1; s) = F(u(n; s)), & n \in \langle 0, \infty \rangle \\ u(0; s) = s, & 0 \leq s \leq 1^{(1)}, \quad s \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

$$\text{但し, } F^i(s) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} p_{\alpha}^i s^{\alpha}, \quad p_{\alpha}^i \geq 0, \quad \sum_{\alpha} p_{\alpha}^i = 1,$$

の解 $0 \leq u(n; s) \leq 1$ を母函数にもつ $\mathbb{Z}_+^d$ 上の Markov process $(Z(n), P_{\alpha})$ を多タイプ Galton-Watson process という。方程式系 (1) について、次のことが知られている。

定理 1 (Sevast'yanov [4]) 原点に最も近い fixed point q が唯一つ存在してそれは次の意味で stable である：

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u(n; s) = q, \quad 0 \leq s \leq q.$$

行列 $Q = [\partial F^i(q) / \partial s^j]_{i,j=1}^d$ の Perron-Frobenius 根を ρ と

1) $s = (s^1, \dots, s^d)$ とするとき、 $0 \leq s^i \leq 1$, $i \in \langle 1, d \rangle$ の意味である。この記法は行列についても用いる。

するとき, (2)の速さについて次の定理がある.

定理 2 (Iirina [2], Ioffe and Spitzer [3]) 行列 Q が positively regular²⁾ で, $\rho < 1$ ならば $A(s) \neq 0$ ($s \in \mathbb{R}$) があって

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n; s) - \rho^n}{\rho^n} = A(s)u, \quad 0 \leq s \leq \rho,$$

但し u は ρ に対応する行列 Q の右-固有ベクトル, がなりたつ. 更に $\mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}$ 上の分布 $\{P_i^*(\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}}$ があって

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{e_i}(Z(n) = \alpha \mid Z(n) \neq 0, Z(n) \rightarrow \infty) = P_i^*(\alpha),$$

$$\alpha \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}, i \in \langle 1, d \rangle,$$

がなりたつ.

② 行列 Q が positively regular でないとき, 上の (3) (4) が成り立たないことが知られている.

反例 (Iirina [2], Sevast'yanov [4]) 1) $\Phi(s)$ を 1 変数の母函数とし, $F'(s) = \Phi(s^2)$, $F^2(s) = \Phi(s')$ とすれば, 明らかに

$$u^i(n; s) = \begin{cases} \Phi_n(s^i), & n: \text{even}, \\ \Phi_n(s^{i+1}), & n: \text{odd}, \end{cases}$$

但し Φ_n は Φ の n 回の iteration で, $i=2$ のとき $i+1=1$ とする.

2) Φ を 1) と同じとし, $F'(s) = \Phi(s^2)$, $F^2(s) = s'$ とす

2) $N \in \langle 1, \infty \rangle$ が存在して, $Q^N > 0$ の意味である.

る. このときは

$$u^i(n; s) = \begin{cases} \Phi_{n/2}(s^i), & n \text{ even,} \\ \Phi_{\{n-(n^i)/2\}}(s^{i''}), & n \text{ odd.} \end{cases}$$

上の2つの反例を説明するものとして, 次の定理がある.

定理3 (Jirima [2]) 行列 Q が irreducible で,

$$(5) \quad \lim_{s \uparrow \rho} \partial^2 F^i(s) / \partial s^j \partial s^k < \infty, \quad i, j, k \in \langle 1, d \rangle$$

ならば, 定数 $0 < C_1 < C_2$ があって

$$(6) \quad C_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u^i(n; s) - \rho^i|}{\rho^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u^i(n; s) - \rho^i|}{\rho^n} \leq C_2,$$

$$i \in \langle 1, d \rangle, \quad 0 \leq s \leq \rho.$$

③ 行列 Q の固有根を絶対値の大きさの順に並べて,

$$\rho = \mu_1 \geq |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_d|$$

とする. このとき我々は次の定理を得る.

定理4 $\rho < 1$, $|\mu_d| > 0$ で

$$(7) \quad \lim_{s \uparrow \rho} \partial^l F^i(s) / (\partial s^1)^{\alpha^1} \dots (\partial s^d)^{\alpha^d} < \infty, \quad i \in \langle 1, d \rangle$$

$$\alpha^i \in \langle 0, l \rangle, \quad \alpha^1 + \dots + \alpha^d = l,$$

$$l = [\log |\mu_d| / \log \mu_1] + 1,$$

ならば, $h \in \langle 1, d \rangle$ が存在して, $i \in \langle 1, d \rangle$ と $\forall \epsilon \in \langle 0, h-1 \rangle$

に対して $m_{iv} \in \langle 0, d-1 \rangle$ と $A_{iv}(s)$ があって

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u^i(nh+v; s) - q^i}{\rho^{nh} n^{m_{iv}}} = A_{iv}(s), \quad 0 \leq s \leq 3$$

がなりたつ. 更にもし $A_{iv}(s) \neq 0$ ならば $\mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}$ 上の分布 $\{P_{iv}^*(\alpha)\}$ があって

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{e_i} \{Z(nh+v) = \alpha \mid Z(nh+v) \neq 0, Z(n) \rightarrow \infty\} \\ = P_{iv}^*(\alpha), \quad v \in \langle 0, h-1 \rangle, \alpha \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}.$$

注意 連続径数の Galton-Watson process のとき, 即ち

$$\frac{d u^i(t; s)}{dt} = f^i(u(t; s)), \quad u(0; s) = s,$$

$$\text{但し } f^i(s) = b^i \left(\sum_{\alpha \neq e_i} P_\alpha^i s^\alpha - s^i \right), \quad P_\alpha^i \geq 0, \sum_{\alpha} P_\alpha^i = 1, \\ b^i > 0,$$

の解 $u^i(t; s)$ を考えるとき, (8)(9) のような周期性はない.

[4] 定理4の証明は Sternberg [5] の方法によって証明される次の lemma による:

Lemma 1 Q を差分系 $u(n+1; s) = F(u(n; s))$, $u(0; s) = s$ の不動点とし, $Q = [\partial F^i(q) / \partial s^j]_{i,j=1}^d$ の特性根を $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_d|$ とする. このとき, $1 > |\mu_1| \geq |\mu_d| > 0$ で, 自然数 $k > \log |\mu_d| / \log |\mu_1|$ と Q の近傍 V があって $F^i(s) \in C^k(V)$, $i \in \langle 1, d \rangle$ ならば, ある Q の近傍 $V \subset U$ と

ベクトル値函数 $A(s) = (A^1(s), \dots, A^d(s))$, $A^i(s) \in C^k(V)$,
 $A^i(\xi) = 0$, $\det [\partial A^i(\xi) / \partial s^j] \neq 0$, 及び

$$g_n^i(s) = \mu_i^n \{ s^i + \sum_{\mu^\alpha = \mu_i} b_\alpha^i(n) s^\alpha \},$$

$b_\alpha^i(n)$ は n に関する $(l-1)$ -次以下の多項式
 という形の $g_n(s) = (g_n^1(s), \dots, g_n^d(s))$ があって,

$$(10) \quad A(u(n; s)) = g_n(A(s)), \quad s \in V$$

がなりたつ.

(定理4の略証) (7)より ε のある近傍 U への $F(s)$ の拡張 $\tilde{F}(s)$ で, $\tilde{F}^i(s) \in C^l(V)$ となるものがある. このとき対応する解 $\tilde{u}(n; s)$ は $u(n; s)$ の拡張になっている. $\tilde{F}$ を改めて F とかき lemma 1 を用いる. (2)より $A(s)$ は (10)を保ちながら $0 \leq s \leq \varepsilon$ まで拡張できる. $A(s)$ の ξ の近くでの逆函数を $B(w)$ とすれば, $B^i(w)$ は $w=0$ のある近傍 W の上で l 回連続的微分可能である. n が十分大のとき $g_n(A(s)) \in W$, $0 \leq s \leq \varepsilon$ だから (10)より

$$(11) \quad u(n; s) = B(g_n(A(s))), \quad 0 \leq s \leq \varepsilon, \quad n: \text{十分大.}$$

故に $B^i(w)$ を $w = g_n(A(s))$ について Taylor 展開して

$$3) \quad \mu^\alpha = (\mu_1)^{\alpha_1} \dots (\mu_d)^{\alpha_d}, \quad \xi^\alpha = (\xi_1)^{\alpha_1} \dots (\xi_d)^{\alpha_d} \text{ である.}$$

$$(12) \quad U^i(n; s) - q^i = \sum_{p=1}^l \frac{1}{p!} \left\{ \sum_{j=1}^d \mu_j^n (A^j(s) + \sum_{\mu^\alpha = \mu_j} b_{\alpha}^i(n) A^\alpha(s)) \frac{\partial}{\partial w_i} \right\}^p B^i(0) + o(|\mu_d|^{-n})$$

を得る. (12)から (8)を得るには Q を標準型にしておき (cf.

Gantmacher [1] II, p. 75) Frobenius の定理を用いればよい.

(8) から (9)を得るのは単純な計算だけである. ただその時

$A_{iv}(s) \neq 0$ と $A_{iv}(0) \neq 0$ が同値であることを用いる.

5 最後に 2 の例について述べる

1) $\Phi(3)$ が non-critical ならば, 定理 2 により $A_0(\Phi(3))$

$= \rho A_0(3)$ ($\rho = \Phi'(q)$) をみたす函数 $A_0(3)$ がある. 一対

$Q = \begin{bmatrix} 0 & \rho \\ \rho & 0 \end{bmatrix}$ であるから, $\mu_1 = \rho$, $\mu_2 = -\rho$ である.

$A^1(s) = A_0(s^1) + A_0(s^2)$, $A^2(s) = A_0(s^1) - A_0(s^2)$, $g_n^i(3)$

$= \mu_i^n 3^i$ ($i=1, 2$) は明らかに (10) をみたす. $A_0'(q) = 1$

と normalize しておけば $[\partial A^i(q)/\partial s_j] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. 故に

$[\partial B^i(0)/\partial w_j] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ だから (11) より

$$U^i(n; s) - q^i = \begin{cases} \rho^n A_0(s^i) + o(\rho^n), & n: \text{even}, \\ \rho^n A_0(s^{i+1}) + o(\rho^n), & n: \text{odd}. \end{cases}$$

2) Φ , A_0 , ρ を 1) と同じとする. 今度は $Q = \begin{bmatrix} 0 & \rho \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

だから $\mu_1 = \sqrt{\rho}$, $\mu_2 = -\sqrt{\rho}$. $A^1(s) = A_0(s^1) + \sqrt{\rho} A_0(s^2)$,

$A^2(s) = A_0(s^1) - \sqrt{\rho} A_0(s^2)$, $g_n^i(3) = (\mu_i)^n 3^i$, から (10)

をみたまふ。これより容易に

$$u^i(n; s) - q^i = \begin{cases} \rho^{n/2} A_0(s^i) + o(\rho^{n/2}), & n: \text{even}, \\ \rho^{\{n-1\}/2} A_0(s^{i+1}) + o(\rho^{n/2}), & n: \text{odd} \end{cases}$$

が得られる。

文 献

- [1] Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices*, Chelsea, 1959
(English translation).
- [2] Iurina, M., *Czechoslovak. Math. J.* 7, (1957) 130-153,
(Russian).
- [3] Joffe, A. and F. Spitzer, *J. Math. Anal. Appl.* 19, (1967)
409-430
- [4] Sevast'yanov, B. A., *Branching Processes*, Nauka, 1971
(Russian).
- [5] Sternberg, S., *Am. J. Math.* 79, (1959) 809-824.

追記：定理4の $A_{ij} \neq 0$ という仮定は実は不自然である。

この原稿を書いた後で $d=2$ に対して (7) が成り立つという仮定だけの下で (9) 式が得られることが解ったが証明 (勿論 lemma 1 を用いる方法ではない) は割愛する。