

ある種の C^* -代数の生成について

東北大 教養 岡安隆照

§ 1. 緒言.

von Neumann 代数の生成に関する議論は未だ大分不満を残してはいるが、非常に興味深い幾つかの結果を言及していること勿論である。それらの研究が C^* -代数の生成についての多くの問題を自然に提起するわけで、事実この課題に関する報告が最近散見されるのである。その目ざすところは、von Neumann 代数の生成の議論と同様に、代数的な興味と共に、non-normal operators の構造の解析である。しかしながら、von Neumann 代数の生成の議論の、又 C^* -代数の理論の現状では、多くを期待することは難かしいことかもしれない。

以下本講演では特に GCR-代数を生成するような operator 即ち GCR-operator を中心に、 C^* -代数の生成に関する最近の結果を述べてみたいと思う。

H は Hilbert 空間、 F は H 上の有界な linear operators

(以下単に operators) の族とするとき, $\mathcal{F}$ を含む $\mathcal{H}$ 上の最小の von Neumann 代数を $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ と書き, それは $\mathcal{F}$ によって "von Neumann 代数として" (混雑が無ければよく) 生成されるという. 又 operator T は, $\mathcal{R}(T)$ が I 型, II 型, III 型のとき, それぞれ I 型, II 型, III 型であるといわれることは既に多くの研究者によって行われている. 可分な Hilbert 空間上の可換な von Neumann 代数が一つの self-adjoint operator で生成されるということはよく知られている ([12]). 又 C. Pearcy は, 可分な Hilbert 空間上の I 型の von Neumann 代数は一群の operator で生成されることを示した ([15]). 各々の型の operator が存在すること, のみならず各々の型の partial isometry が存在することもわかっていく ([16]). なお von Neumann 代数の生成に関する文献は [18] に詳しい.

さて Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の operators の族 $\mathcal{F}$ に対し, $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ と $\mathcal{H}$ 上の identity operator I を含む $\mathcal{H}$ 上の最小の $\mathcal{C}^*$ 代数を表わすことにしよう. そして $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ によって " $\mathcal{C}^*$ 代数として" (混雑が無ければよく) 生成されるというわけである. 上記の von Neumann の生成定理に相当する, $\mathcal{C}^*$ 代数についての定理は全く知られていないが, 多少ともそれに近いものとして次の事実がわかっていく.

定理. 一つの Hilbert 空間上の可換な C^* -代数が, それに属する可算個の idempotents によって C^* -代数として生成されるならば, それは一つの self-adjoint operator によって生成される ([17], pp. 293-294).

§2. GCR-operators, 特に isometries.

定義. Hilbert 空間上の operator T は $A(T)$ が CCR-代数, GCR-代数, NGCR-代数であるとき, それらに対応して CCR-operator, GCR-operator, NGCR-operator であるといわれる.

CCR-代数, GCR-代数, NGCR-代数は最近ではそれぞれ κ -liminal algebra, postliminal algebra, antiliminal algebra とも呼ばれるのであるが, 詳しくは J. Dixmier の text [6] と [9], [11], [14] と共に参照されたい.

勿論 CCR-operator は GCR-operator であり, GCR-代数はその任意の表現による像が I 型の von Neumann 代数を生成するような C^* -代数として特徴づけられるのであるから, GCR-operator は I 型である. 又 II 型又は III 型の operator は NGCR-operator であることも容易にわかる.

任意の normal operator, 任意の compact operator は CCR-operator であり, 任意の isometry はそれが I 型であること ([20]) から直接 GCR-operator であることがわかる.

これらの GCR-operators は II 型 I 型であるが, II 型であつても GCR-であるとは限らないのであつて, そのような operator を捜す事も難かしくはない (84).

isometry が生成する C^* -代数の構造は次の意味で完全にわかる.

[4]

定理 (L.A. Coburn). Hilbert 空間 H 上の isometry V が
生成する C^* -代数 $A(V)$ は最小の closed ideal J をもち, $A(V)/J$
は単位円周 Γ 上の複素数値連続函数の全体が作る可換な C^*
代数 $C(\Gamma)$ と同型である.

この証明は自明である. 先ず重複度 1 の shift S が生成する C^* -代数 $A(S)$ は "正則的にコンパクト" (換言すれば compact operators の全体 K を含んでしまい), 従つて又それは $A(S)$ の最小の closed ideal であり, $A(S)/K$ が $C(\Gamma)$ と同型になることを示すのである. 実際 $I-S$ は 1 次元の部分空間への射影であるから compact になり, これが $A(S)$ に入るから $K \subset A(S)$ が得られる ([7], p. 85). そして K が最小の closed ideal であることもわかる. 又 $A(S)$ から $A(S)/K \rightarrow$ の自然な準同型写像による S の像 S' は unitary でありその spectrum は Γ 一杯になつてゐることがわかるので, $A(S)/K$ は $C(\Gamma)$ と同型になる. 次に重複度 n の shift S について考える. それは重複度 1 の shift S_0 の ampliation であるから, $A(S)$ は $A(S_0)$ と

同型になる。そこで一般に任意の isometry V は unitary U と shift S の直和 $U \oplus S$ である ([10]) から, 任意の $T \in \mathcal{A}(V)$ は $T = T_1 \oplus T_2$, $T_1 \in \mathcal{A}(U)$, $T_2 \in \mathcal{A}(S)$ と書かれるのであるが, これに T_2 を対応させる写像を考えるときこれによって $\mathcal{A}(V)$ は $\mathcal{A}(S)$ と同型になるのである。

なお L.A. Coburn は [5] で $\mathbb{H}^2$ 上の Toeplitz operator T_2 が生成する C^* -代数の構造を上定理よりも多少具体的に調べている。

normal operator も isometry もいわれる nearly normal operator であるが, 実は任意の nearly normal operator が GCR-operator であることがわかる ([2], [24])。nearly normal operator は互いに可換な self-adjoint operator と isometry との積として書くことのできる operator でもある ([3])。このことを想起すれば, 下に述べる定理が意味をもつてくる ([14])。

定理. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の GCR-operators S, T が互いに可換で, S^* と T も互いに可換ならば, それらの積 ST は GCR-operator である。

実際, $\mathcal{A}(S)$ と $\mathcal{A}(T)$ の代数的な tensor 積 $\mathcal{A}(S) \otimes \mathcal{A}(T)$ ([21]) の上の α -norm と ν -norm は一致しているから, $\mathcal{A}(S) \otimes \mathcal{A}(T)$ から $\mathcal{A}(S, T)$ の中への自然な準同型写像は α -norm に関して連続になり ([13]), それで α -積 $\mathcal{A}(S) \hat{\otimes}_{\alpha} \mathcal{A}(T)$ 上

に連続的に拡張あることが出来る。そのとき $A(S) \hat{\otimes} A(T)$ の像はちょうど $A(S, T)$ になる。しかるに $A(S) \hat{\otimes} A(T)$ は GCR -代数である ([22]) から $A(S, T)$ も GCR -代数、従って $A(ST)$ も GCR -代数である。

$T^*T - TT^*$ が compact operator になるような operator T は almost normal operator と呼んでゐる著者があつたように思ふが、この種の operator を GCR -operators とある (cf. [1], [2]).

定理. 非可換な2変数の多項式は、 $p(S, S^*) = 0$ を満足する Hilbert 空間上の operator は、^{が常に} GCR -operator になる
ていふようなものがあるとし、 C は Id 上の compact operator とすれば $p(T, T^*) = C$ を満足する Id 上の operator T は GCR -operator である。

証明は直ぐ。

§3. I 型の von Neumann 代数の GCR -operator による生成.

既に述べた様に、可分な Hilbert 空間⁹上の I 型の von Neumann 代数は一代の operator によつて von Neumann 代数として生成される⁹があるが、一代の GCR -operator によつて von Neumann 代数として生成される⁹があるのか。本章ではこの問題を肯定的に解いてみた ([14]).

定理. 可分な Hilbert 空間⁹上の I 型の von Neumann

代数は一つの GCR-operator の von Neumann 代数として生成される。

これを示すために先ず次の基本定理を示そう。

定理. $\{A_i\}$ は C^* -代数の列で, 各 A_i は Hilbert 空間 H_i 上に作用し, Id_i は H_i 上の identity operator を意味するとする。もしも各 A_i が一つの operator によって生成されるならば, $\{A_i\}$ の $C^*(\infty)$ -和 $\sum \oplus C^*(\infty) A_i$ は H 上の identity operator を加えて得られる H 上の C^* -代数は一つの operator によって生成される。ただし $H = \sum \oplus H_i$ 。

証明は本質的に [7] の補題の証明と同じものである。添数 i は全正整数に与えるものとして示す。各 i に対して $T_i \in A_i$ が A_i を生成しているとしよう。次の条件を満足する二つの複素数列 $\{\lambda_i\}$, $\{\mu_i\}$ と複素平面上の円板の列 $\{K_i\}$ を選ぶのは容易である:

- (a) $\lambda_i \neq 0$;
- (b) K_i の中心を γ_i , 半径を δ_i とするとき
 $0 < \gamma_i \downarrow 0, \delta_i \downarrow 0$;
- (c) $K_i \cap K_j = \emptyset, i \neq j$;
- (d) $S_i = \lambda_i T_i + \mu_i I$ とするとき $\sigma(S_i) \subset K_i$;

そして

- (e) $\{S_i\}$ は一様位相に関して 0 に収束する。

こゝに identity operator は常に I と書くことにする。任意に正整数 i_0 を固定し, $L = \sum_{i > i_0} \oplus Id_i$, $Q = \sum_{i > i_0} \oplus S_i$ とおく。次に K を原点 0 を中心とし, $\bigcup_{i > i_0} K_i$ を含む円板, M を円環或 $\bigcup_{1 \leq i \leq i_0} K_i \cup K$ とする。又 M 上の函数 $f \in$

$$f(z) = 0 \text{ if } z \notin K_{i_0}; = 1 \text{ if } z \in K_{i_0}$$

により f を定義する。この f は Mergelyan の定理の仮定を満足するから、我々は M 上で一様に f に収束する多項式の列 $\{p_k\}$ をみつけることができる。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_i} (p_k(z) - f(z)) (zI - S_i)^{-1} dz = p_k(S_i), \quad i < i_0;$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} (p_k(z) - f(z)) (zI - Q)^{-1} dz = p_k(Q) = \sum_{i > i_0} \oplus p_k(S_i);$$

よって

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{i_0}} (p_k(z) - f(z)) (zI - S_{i_0})^{-1} dz = p_k(S_{i_0}) - I$$

から、

$$\|p_k(S_i)\| \leq \alpha \sup_{z \in M} |p_k(z) - f(z)|, \quad i \neq i_0;$$

$$\|p_k(S_{i_0}) - I\| \leq \alpha \sup_{z \in M} |p_k(z) - f(z)|$$

を満足する定数 α があることがわかり、 $S = \sum \oplus S_i$ とおくと一様位相の下に

$$p_k(S) = \sum \oplus p_k(S_i) \rightarrow E_{i_0} = \dots \oplus \overset{i_0}{0} \oplus I \oplus 0 \oplus \dots$$

である。故に $E_{i_0} \in A(S)$ 。故に又 $\dots \oplus 0 \oplus S_{i_0} \oplus 0 \oplus \dots \in$

$A(s)$. 従って我々の定理が得られる.

この主定理に戻る. 先ず可分な Hilbert 空間 H の上の homogeneous $\mathcal{K}$ von Neumann 代数は一つの GCR-operator で生成されることを示そう. 実際そのような $\mathcal{K}$ von Neumann 代数は $\mathbb{Z} \otimes B(L)$ の形をもつ. ここで $\mathbb{Z}$ は可分な Hilbert 空間 H 上の可換な von Neumann 代数, $B(L)$ は可分な Hilbert 空間 L の上の $\mathcal{K}$ の operators が作る von Neumann 代数である. von Neumann の生成定理によって見出し得る, 正の可逆な operator $T \in \mathcal{K}$ を生成するもの $\in P_N^{\mathbb{C}}$ と $\dim L = 1$, $1 < \dim L < \infty$, $\dim L = \infty$ によって $B(L)$ の operator 1 , $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ I & \ddots & \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ I & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$ とすると, $\mathcal{K}^{\mathbb{R}}(S) = B(L)$ で, GCR-operator $T = P \otimes S$ に対して $\mathcal{K}^{\mathbb{R}}(T) = \mathbb{Z} \otimes B(L)$ であることがわかる.

そこで定理に与えられた von Neumann 代数 $\mathcal{K}^{\mathbb{R}}$ homogeneous $\mathcal{K}$ von Neumann 代数の直和 $\sum \mathbb{R}_i$ と書けば, 各 $\mathbb{R}_i$ は一つの GCR-operator T_i によって生成され, 以下 $\{A(T_i)\}$ の $C^*(\infty)$ -和 $\mathcal{A}$ を考えるときこれは $\mathcal{K}^{\mathbb{R}}$ weak topology に保たれた $\mathcal{K}^{\mathbb{R}}$ 稠密な GCR-代数である. いかにも上述の定理によれば, $\mathcal{A}$ は $\mathcal{K}^{\mathbb{R}}$ の operator で生成されるが, これが求めているものになる.

§4. NGCR-operators.

Ⅱ型又はⅢ型の operator は NGCR-operator なのであるから, NGCR-operators の例には事欠かないのであるが, 構造の知られている NGCR-代数である UHF-代数 ([8]) を生成する operator が存在することがわかってゐる.

定理 (D. Topping [23]). 一つの Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の UHF-代数 A は 一組の operator を生成する. 従つて $\mathcal{H}$ は可分ならば, $\mathcal{H}$ 上に作用する "既約な", 従つてⅡ型 of NGCR-operator が存在する.

UHF-代数はいわゆる因子分解が出来る C^* -代数なのであつて, 有限型Ⅱ型の因子の列 $\{M_n\}_{n=1,2,\dots}$ が次の条件を満足して存在する:

$$(a) \quad I \in M_n \subset A;$$

$$(b) \quad m \neq n \text{ ならば } M_m \text{ と } M_n \text{ は operator-wise に可換};$$

そして

$$(c) \quad \bigcup_{n \geq 1} M_n \text{ は } A \text{ を生成する.}$$

いま各 M_n を生成する operator を一つづつとつて T_n とする.

$\operatorname{Re} T_n, \operatorname{Im} T_n$ はそれぞれ有限個の可換な M_n の projections $\{E_j^{(n)}\}, \{F_j^{(n)}\}$ の実係数の線型結合として書くことが出来る.

そこで $E = \bigcup_{n \geq 1} \{E_j^{(n)}\}, A_1 = A(E); F = \bigcup_{n \geq 1} \{F_j^{(n)}\}, A_2 = A(F)$ とおくと §1 で述べた定理から self-adjoint opera-

$\text{tors } H_1, H_2$ 則 $A_1 = A(H_1), A_2 = A(H_2)$ とするものがある。
 3: 2: $\mathcal{I} = H_1 + iH_2$ とおくと, π が A を生成することになる。
 又 A の任意の既約表現 π は A が単純で可分であるから,
 忠実に可分になり, $\pi(\mathcal{I})$ は π の表現空間の既約な NGCR-
 operator になる。それを $\mathcal{I}$ 上に移せば, 対応する operator である。

上定理の直接の系として Powers の III 型因子は一辺の operator
 によって生成されることとなる。というのもそれは $\mathcal{I}$
 は $\mathcal{UHF}$ -代数の weak closure として得られていたから
 である。

文 献

1. H. Behncke, Structure of certain non-normal operators,
Journ. Math. Mech. 18(1968), 103-107.
2. _____, A class of non-normal operators, Preprint.
3. A. Brown, On a class of operators, Proc. Amer. Math. Soc.
4(1953), 723-728.
4. L. A. Coburn, The C^* -algebra generated by an isometry,
Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967), 722-726.
5. _____, The C^* -algebra generated by an isometry,
II, Preprint.
6. J. Dixmier, Les C^* -algèbres et leurs représentations,
Gauthier-Villars, Paris(1964).
7. R. G. Douglas and C. Pearcy, von Neumann algebras with
a single generator, Preprint.
8. J. Glimm, On a certain class of operator algebras, Trans.
Amer. Math. Soc. 95(1960), 318-340.
9. _____, Type I C^* -algebras, Ann. Math. 73(1961), 527-
611.
10. P. R. Halmos, Shifts on Hilbert space, Journ. Reine Angew.
Math. 208(1961), 102-112.
11. I. Kaplansky, The structure of certain operator algebras,
Trans. Amer. Math. Soc. 70(1951), 219-255.
12. J. von Neumann, Zur Algebra der Funktional-Operationen
und
Theorie der normalen Operatoren, Math. Ann. 102(1930), 307-427.
13. T. Okayasu, On the tensor products of C^* -algebras, Tôhoku
Math. Journ. 18(1966), 325-331.
14. _____, On GCR-operators, To appear in Tôhoku Math.

Journ.

15. C. Pearcy, W^* -algebras with a single generator, Proc. Amer. Math. Soc. 13(1962), 831-832.
16. _____, On certain von Neumann algebras which are generated by ~~partial~~ ^{isometric} isometries, Proc. Amer. Math. Soc. 15(1964), 393-395.
17. C. E. Richart, General theory of Banach algebras, D. van Nostrand, New York(1960).
18. ~~斎藤~~ ^{講究録}, von Neumann 代数の生成について, 数理解析研究所 ^ノ 49, 1-14.
19. S. Sakai, On a characterization of type I C^* -algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 72(1966), 508-512.
20. N. Suzuki, Isometries on Hilbert spaces, Proc. Jap. Acad. 39(1963), 435-438.
21. M. Takesaki, On the cross-norm of the tensor product of C^* -algebras, Tôhoku Math. Journ. 16(1963), 111-122.
22. J. Tomiyama, Applications of Fubini type theorem to the tensor product of C^* -algebras, Tôhoku Math. Journ. 19(1967), 213-226.
23. D. Topping, UHF algebras are singly generated, Math. Scand. 22(1968), 224-225.
24. T. Yoshino, Nearly normal operators, Tôhoku Math. Journ. 20(1961), 1-4.