

Diffeomorphism と Topological entropy

中央大 理工 松江 広文

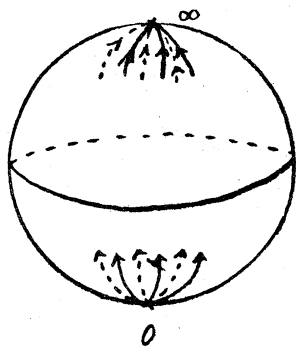
§1 で, Axiom A を満たす diffeomorphism の例をあげ
次に §2 で, topological entropy の定義といくつかの定
理を述べる. 最後に §3 で, §1 であげた例の topological
entropy の計算をする.

§1. Axiom A を満たす diffeomorphism の例

Morse-Smale diffeo.

例 1. S^2 上の例.

S^2 を Riemann sphere とみなし, $f(z) = 2z/|z|$ により,
 S^2 上の diffeo. を定義する.



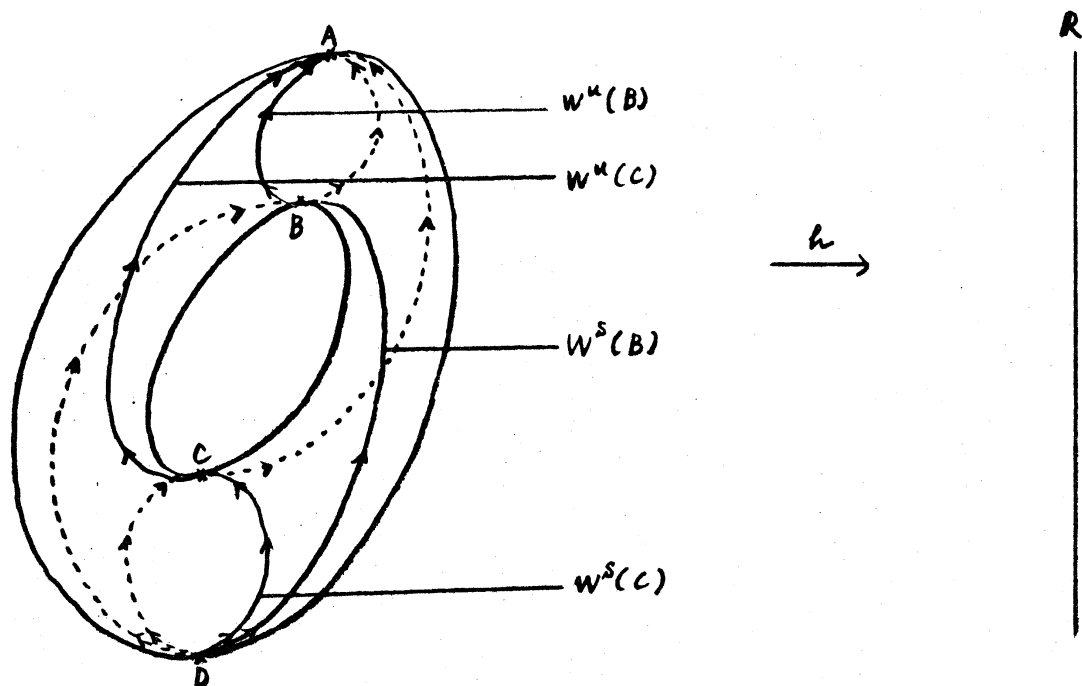
$$0: \text{source}, W^u(0) = S^2 - \{\infty\}$$

$$W^s(0) = \{0\}$$

$$\infty: \text{sink}, W^u(\infty) = \{\infty\}$$

$$W^s(\infty) = S^2 - \{0\}$$

例 2. T^2 上の例.



height function h に対し, vector field $X = \text{grad } h$ を考え, X による flow の time-one map をとる.

以上の例は, gradient-like diffeomorphism. 次に, non-gradient-like な例を上げる.

例 3.

$$f: \text{grad-like} \iff (p \leq q \Rightarrow \dim W^s(p) \geq \dim W^s(q))$$

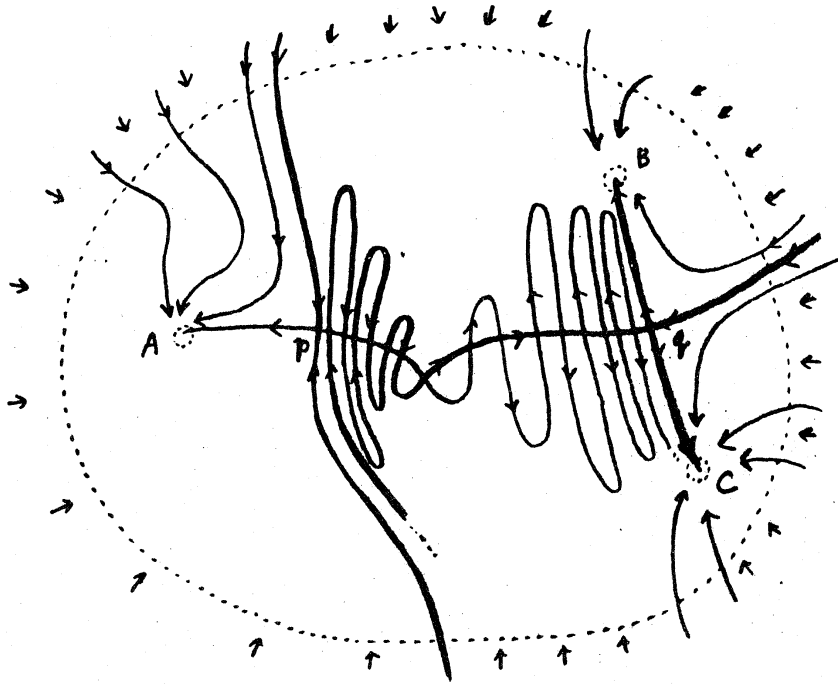
$T = T^2$ とし,

p, q periodic pt.

$$p \leq q \stackrel{\text{def}}{\iff} W^u(q) \cap W^s(p) \neq \emptyset$$

ということが知られている.

下図は S^2 上の diffeo. である。ここでは $p \neq q$ にもかかわらず、 $\dim W^s(p) = \dim W^s(q)$ となっていて、しかも non-gradient-like.

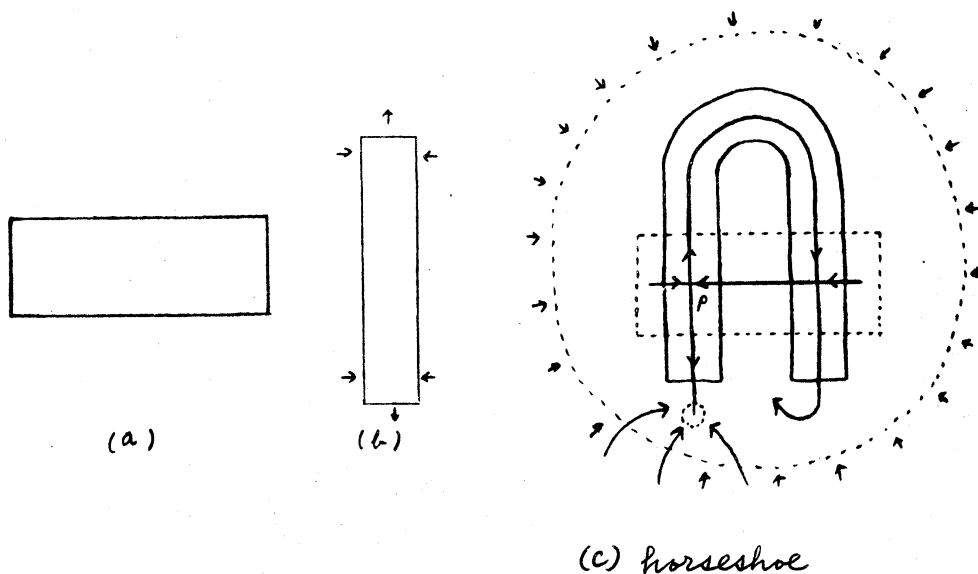


なお、 $W^u(p)$ と $W^s(q)$ が交差する点を heteroclinic pt. という。

以上の例 (Morse-Smale) の top. ent. = 0 であることを §2 で述べる。

Horseshoe diffeo. (S^2 上の diffeo.)

次の図で horseshoe diffeo. の作り方を表わす。詳しくは倉田氏を参照されたい。この diffeo. においては、homoclinic pt. があらわれる。

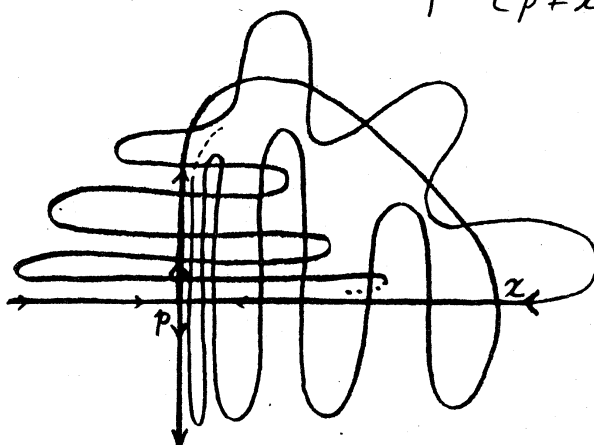


Def. p を $f \in \text{Diff}(M)$ の hyperbolic periodic pt. とする.
 $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$ を, homoclinic pt. と云う.
 $x \in W^s(p)$ 亦 $W^u(p)$ のとき, x は transverse homoclinic pt.
 という.

Remark. x : homoclinic $\iff$ ある $m \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{mn}(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} f^{mn}(x) = p \quad (p \neq x)$$

上図より, 点 p における stable mfd. と, unstable mfd. は右図の様になる。従って, homoclinic pt. x があらわれる。horseshoe diffeo. の top. ent. = $\log 2$ であ



ることを §3 で示す。

Anosov diffeo. の例.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$. A の固有値を λ_1, λ_2 とし.

$|\lambda_i| \neq 1$ ($i = 1, 2$) とする. ($0 < |\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$)

$f: T^2 \longrightarrow T^2$

$(x, y) \longmapsto (ax+by, cx+dy)$ により T^2 上の diffeo. を定義

する. f は Anosov diffeo. である. f の top. ent. = $\log |\lambda_1|$

(§3 で示す).

§2. Topological entropy の定義と定理.

$\left\{ \begin{array}{l} X: \text{compact top. space} \\ \forall \text{ open cover } \mathcal{A} \text{ of } X, N(\mathcal{A}): \text{min sub-cover の sets の個数} \\ \forall \text{ covers } \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \\ \mathcal{G}: X \rightarrow X \text{ cont. map} \end{array} \right.$

Def. $h(\mathcal{G}, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\mathcal{A} \vee \mathcal{G}^{-1}\mathcal{A} \vee \dots \vee \mathcal{G}^{-n+1}\mathcal{A})$

を. cover $\mathcal{A}$ に関する $\mathcal{G}$ の entropy という.

Remark. $h(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ は極限值を持ち.

$$0 \leq h(\mathcal{G}, \mathcal{A}) \leq \log N(\mathcal{A}) < \infty$$

であることが示される.

Def. $\text{ent}(\mathcal{G}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathcal{A}} h(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ を $\mathcal{G}$ の topological entropy

という。

$$\text{Remark. } \left[\begin{array}{l} \varphi: X \rightarrow X \text{ cont. map} \\ \psi: X \rightarrow X' \text{ homeo.} \\ \psi\varphi\psi^{-1}: X' \rightarrow X' \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \text{ent}(\psi\varphi\psi^{-1}) = \text{ent}(\varphi), \text{ i.e. top. conjugate}$$

で "topological entropy" は不変。

以上は [4] による。

Theorem. (Bowen [3])

$$\left[\begin{array}{l} M: \text{compact metric sp.} \\ f: M \rightarrow M \text{ cont. map} \\ \Omega: \text{nonwandering set of } f \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \text{ent}(f) = \text{ent}(f|_{\Omega}).$$

$$\text{Cor. } \Omega(f): \text{finite} \Rightarrow \text{ent}(f) = 0.$$

これより, Morse-Smale diffeo. の topological entropy
= 0 である。

Notation. (X, d) compact metric sp., $f: X \rightarrow X$ homeo.
 $\delta > 0$ と $x \in X$ に對して,

$$W^s(x, \delta) = \{y \in X; d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta, \forall n \geq 0\},$$

$$W^u(x, \delta) = \{y \in X; d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta, \forall n \leq 0\}.$$

Def. f が "canonical coordinates" を持つとは,

$$\forall \delta > 0 \text{ に對して, } \exists \varepsilon(\delta) > 0 \text{ s.t. } d(x, y) \leq \varepsilon(\delta) \Rightarrow W^s(x, \delta) \cap$$

$$W^u(y, \delta) \neq \emptyset.$$

f が hyperbolic can. coord. を持つとは、更に次の条件を満すこととする： $\exists \delta^* > 0, 0 < \lambda < 1, \exists c \geq 1$ ；

$$x \in X, y \in W^s(x, \delta^*) \Rightarrow d(f^n(x), f^n(y)) \leq c\lambda^n d(x, y), \forall n \geq 0,$$

$$x \in X, y \in W^u(x, \delta^*) \Rightarrow d(f^n(x), f^n(y)) \leq c\lambda^n d(x, y), \forall n \leq 0.$$

Remark. can. coord. については metric のとり方によらないが、hyperbolic can. coord. については metric のとり方に依存する。

Theorem. (Bowen [3])

$$\left[\begin{array}{l} M : \text{compact Riemannian mfd.} \\ f \in \text{Diff } M \text{ が Axiom A を満す} \\ \Omega_i : \text{basic set} \end{array} \right]$$

$\Rightarrow f|_{\Omega_i}$ はある metric に關し、hyp. can. coord. を持つ。

Theorem. (Bowen [3])

$$\left[\begin{array}{l} X : \text{compact metric sp.} \\ f : X \rightarrow X \text{ homeo. 且、hyp. can. coord. を持つ.} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \text{ent}(f) = \overline{\lim} \frac{1}{n} \log N_n(f),$$

ただし、 $N_n(f) : f^n$ の fixed pts. の個数。

§ 3. Shift automorphism と topological entropy の計算。

$$S_n = \{0, 1, \dots, n-1\} \ni a, b \text{ に対し}$$

$$d(a, b) = \begin{cases} 0 & a = b \\ 1 & a \neq b \end{cases} \quad \text{とおく.}$$

$$X_{S_n} = \{ (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots) ; a_i \in S_n \},$$

$x \in X_{S_n}$ に対し. 第 i 座標を $(x)_i$ と書く. $(x)_i \in S_n$.

$x, y \in X_{S_n}$ に対し. $d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} d((x)_i, (y)_i)$ による metric を入れると. X_{S_n} は compact metric sp. となる.

$\alpha: X_{S_n} \rightarrow X_{S_n}$ を. $a = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots) \in X_{S_n}$ に対し. $(\alpha(a))_i = a_{i+1}$ により定義する. α は onto homeo. (shift automorphism という).

例. ($n=2$)

$$a = (\dots, \overset{i-2}{1}, \overset{i-1}{0}, \overset{i}{0}, \overset{i+1}{1}, 0, 1, 0, \dots)$$

$\downarrow \alpha$

$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$

$$\alpha(a) = (\dots, \underset{i-3}{1}, \underset{i-2}{0}, \underset{i-1}{0}, \underset{i}{1}, 0, 1, 0, \dots)$$

$\alpha: X_{S_n} \rightarrow X_{S_n}$ に対し. α^m の fixed pt. は.

$$(\dots, \underbrace{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}}_{i-1}, \underbrace{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}}_i, \underbrace{a_{i1}, \dots, a_{im}}_{i+1}, \dots)$$

である. よって. α^m の fixed pts. の個数は n^m . 従って.

$$\begin{aligned} \text{ent}(\alpha) &= \overline{\lim}_m \frac{1}{m} \log N_m(\alpha) \\ &= \overline{\lim}_m \frac{1}{m} \log n^m = \log n. \end{aligned}$$

horseshoe diffeo. $f: S^2 \rightarrow S^2$ の nonwandering set Λ とする. Λ は Cantor set 2^n . $f|_{\Lambda}$ は shift aut. $\alpha: X_{S_2} \rightarrow$

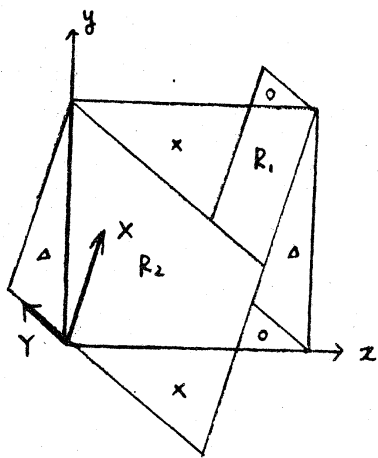
X_{52} は top. conjugate, 従って $\text{ent}(f) = \log 2$.

toral diffeo. (Anosov) の場合.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ の固有値を λ_1, λ_2 ($0 < |\lambda_2|$

$< 1 < |\lambda_1|$) とし、§1 の様に $f_A: T^2 \rightarrow T^2$ を考える。 f_A^m の fixed pts. の個数 $N_m(f_A)$ は Lefschetz trace formula より、
 $N_m(f_A) = (1 - \lambda_1^m)(1 - \lambda_2^m)$.

$$\begin{aligned} \text{ent}(f_A) &= \overline{\lim} \frac{1}{m} \log N_m(f_A) \\ &= \overline{\lim} \frac{1}{m} \log |\lambda_1|^m \left(\frac{1}{|\lambda_1|^m} - \frac{\lambda_1^m}{|\lambda_1|^m} \right) (1 - \lambda_2^m) \\ &= \log |\lambda_1|. \end{aligned}$$



λ_1 と λ_2 に対応する固有ベクトルを X と Y とし、二つの平行四辺形 R_1 と R_2 に分割する。上の計算は、この Markov partition を用いて shift auto. と対応させても、又、定義からも直接導ける。

文 献

- [1] Smale, S. ; Differentiable Dynamical Systems .
Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967), p. 747-817.
- [2] Nitecki, Z. ; Differentiable Dynamics . (MIT)
- [3] Bowen, R. ; Topological Entropy and Axiom A .
Proc. Sympos. Pure Math. 14(1970), p. 23-41.
- [4] Adler, R. L., A. G. Konheim and M. H. McAndrew ;
Topological Entropy. Trans. Amer. Math. Soc.
114(1965). p. 309-319.
- [5] Smale, S. ; Diffeomorphism with many periodic
points. Differential and Combinatorial Topology.
(Princeton) p. 63-80.