

$\mathbb{Z}_p$ 拡大のコホモロジー群について

プリンストン大学 岩澤 健吉

(ノート: 藤崎 源二郎 記)

1° 以下, 考える体はすべて代数体 (複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体であって, 有理数体 $\mathbb{Q}$ の必ずしも有限次とは限らない代数的拡大体) である.

L/K を代数体 K の Galois 拡大, $G = \text{Gal}(L/K)$ をその Galois 群, A を G 加群とすれば, Galois コホモロジー群 $H^n(G, A)$ が定義される. ただし, A は discrete な加群で, G の A への作用 $G \times A \rightarrow A$ は連続である. $H^n(G, A)$ をまた $H^n(L/K, A)$ あるいは単に $H^n(A)$ と表すことが多い.

一例として, $G (= \text{Gal}(L/K))$ 加群の完全系列

$$0 \longrightarrow E_L \longrightarrow L^\times \longrightarrow P_L \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow P_L \longrightarrow I_L \longrightarrow C_L \longrightarrow 0$$

(ただし, $E_L = L$ の単数群, $P_L = L$ の単項 ideal 群,
 $I_L = L$ の ideal 群, $C_L = I_L / P_L$)

を考えれば, これらの完全系列から次の2つの完全系列が導かれる.

$$0 \rightarrow E_K \rightarrow K^\times \rightarrow P_L^G \rightarrow H^1(E_L) \rightarrow H^1(L^\times) \\ \rightarrow H^1(P_L) \rightarrow H^2(E_L) \rightarrow H^2(L^\times) \rightarrow \dots$$

および

$$\dots \rightarrow I_L^G \rightarrow C_L^G \rightarrow H^1(P_L) \rightarrow H^1(I_L) \rightarrow \dots$$

上の2つの完全系列において $H^1(L^\times) = 0$, $H^1(I_L) = 0$ であることに注意すれば

$$H^1(L/K, E_L) \simeq P_L^G / P_K, \\ \text{Ker} (H^2(L/K, E_L) \rightarrow H^2(L/K, L^\times)) \\ \simeq \text{Coker} (I_L^G \rightarrow C_L^G)$$

が導かれる.

2° k を有限次代数体, K/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大, $\Gamma = \text{Gal}(K/k) (\simeq \mathbb{Z}_p)$ とする. $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$ のコホモロジー次元から, 任意の Γ 加群 A に対して

$$H^n(K/k, A) = H^n(\Gamma, A) = 0 \quad (n \geq 3),$$

また, 任意の torsion Γ 加群 A に対して

$$H^n(K/k, A) = H^n(\Gamma, A) = 0 \quad (n \geq 2)$$

となることは知られている. したがって, $H^n(K/k, A)$ ($n \geq 0$) において実際考察の対象となるのは $n = 0, 1$,

2 の場合である。

特に、整数論において大事な $A = E_K$ の場合には $H^2(E_K)$ を考えれば予想される形は

$$H^2(K/k, E_K) \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^a, \quad a \geq 0$$

であり、 $a = a(K/k)$ は K/k で一意的に定まる $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k の1つの不変量である。

この不変量 $a = a(K/k)$ と K/k の他の不変量との関係または a と k の不変量との関係を調べることは大事な問題であろうと考えられる。

3° K, k, Γ は 2° におけるとおりとして

$S = k$ の有限素点の任意の有限集合

$S_0 = K/k$ で分岐する k の素点全体

とする、 $v \in S_0 \Rightarrow v \mid p$ である。

いま、 $E_S = E_{S,K}$ を K の S 単数群 (すなわち、 S の素点の上には K のすべての非 Archimedes 素点で単数となる K の元全体のつくる群) として

$$\varphi_S; H^2(K/k, E_S) \longrightarrow H^2(K/k, K^\times) \hookrightarrow \text{Br}(k)$$

($\text{Br}(k) = k$ の Brauer 群) を考えれば

$$\text{Ker}(\varphi_S) \simeq \text{Coker}(I_{K,S}^\Gamma \longrightarrow C_{K,S}^\Gamma)$$

ここで、 $I_{K,S} = K$ の S ideal 群、 $C_{K,S} = I_{K,S}/P_{K,S}$

である。

$H^2(K/k, E_S)$ については次の定理が成り立つ。

定理 1 $S_0 \subseteq S$ ならば

$$H^2(K/k, E_S) \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{t-1}$$

ここで、 t は S に含まれていて K において“有限分岐”する k の素点の個数である。

v を k の素点、 Z_v を v の K/k に関する分岐群とすれば

Z_v は $\Gamma = \text{Gal}(K/k) (\simeq \mathbb{Z}_p)$ の閉部分群であるから

$$Z_v = \{1\} \iff v \text{ は } K/k \text{ で完全分岐}$$

または

$$\Gamma/Z_v = \text{有限巡回群} \iff v \text{ は } K/k \text{ で有限分岐}$$

となる。 $S_0 \subseteq S$ のとき

$$\varphi_S: H^2(K/k, E_S) \longrightarrow \text{Br}(k)$$

$$c \longmapsto \varphi_S(c) = c'$$

$$= (\dots, \text{inv}_v(c'), \dots)$$

とすれば、 $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$ pro- p -群 $\Rightarrow \text{inv}_v(c') \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$

であり、また $v \notin S$ であるか $v \in S$ かつ v は完全分岐なら

は $\text{inv}_v(c') = 0$ である。さらに、和公式 $\sum_v \text{inv}_v(c')$

$= 0$ が成り立つから、 t が有限分岐する $v \in S$ の個数ならば

$$\text{Im}(\varphi_S) \subseteq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{t-1} \subseteq \text{Br}(k).$$

それゆえ, 定理 1 により, $S_0 \subseteq S$ であるとき

$\text{Ker}(\varphi_S) = \text{有限} \iff \text{Im}(\varphi_S) \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{t-1}$
である.

Lemma 1. 次の i), ii), iii) は同値である.

i) $\text{Ker}(\varphi_S) = \text{有限} \quad (\forall S \text{ に対して})$

ii) $\text{Ker}(\varphi_S) = \text{有限} \quad (\forall S \supseteq S_0 \text{ に対して})$

iii) $\text{Ker}(\varphi_{S_0}) = \text{有限}$

問題 1 $\text{Ker}(\varphi_S) = \text{有限} (\forall S) ?$

$\text{Ker}(\varphi_S) = 0$ かどうかについては次の定理が成り立つ.

定理 2 S_0 を含むすべての S に対して

$$\text{Ker}(\varphi_S) = 0 \iff C_{K, S_0}(p) = 0$$

ここで, $C_{K, S_0}(p)$ は $C_{K, S_0} = I_{K, S_0} / P_{K, S_0}$ の p 成分である.

$\text{Ker}(\varphi_S) \neq 0$ となる例: $k = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt[p^\infty]{1})$
($p > 2$) とすれば K/k は $\mathbb{Z}_p$ 拡大であり, $S_0 = \{v_p\}$ (v_p は p を割る k の唯一つの素点), $C_{K, S_0} = C_K$ である.

とくに, p を irregular な素数とすれば, $C_{K, S_0}(p)$

$= C_K(p) \neq 0$ (素数 p について, p irregular $\Leftrightarrow C_K(p) \neq 0$) であるから, 定理 2 により, ある $S \supseteq S_0$ で $\text{Ker}(\varphi_S) \neq 0$ となるものが存在する.

4° 以下, k は総実な有限次代数体, $K = k_\infty$ は k の basic $\mathbb{Z}_p$ 拡大体であるとする. このとき, 問題 1 と関連して次の補題が成り立つ.

Lemma 2

$$\begin{aligned} C_K(p)^\Gamma = \text{有限} &\Rightarrow C_{K,S}(p)^\Gamma = \text{有限} \quad (\forall S) \\ &\Rightarrow \text{問題 1 (が肯定的に解ける)} \end{aligned}$$

また, 次のことも証明される.

Lemma 3

$$\begin{aligned} C_K(p)^\Gamma = \text{有限} &\Rightarrow H^2(K/k, E_K) = (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\lambda-1} \\ &(\lambda = \#(S_0)) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ 有理素数 p を割る k の素 ideal $\mathfrak{p}$ は K においてすべて単項 ideal となる.

問題 2 $C_K(p)^\Gamma = \text{有限} ?$

問題 3 $a(K/k) = \lambda - 1 ? (\lambda = \#(S_0)),$

すなわち, $H^2(K/k, E_K) \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\lambda-1} ?$

問題 2, 3 においては, k = 総実な有限次代数体, K/k = basic $\mathbb{Z}_p$ 拡大である. 問題 2 は総実でない k に対しては一般に成り立たない.

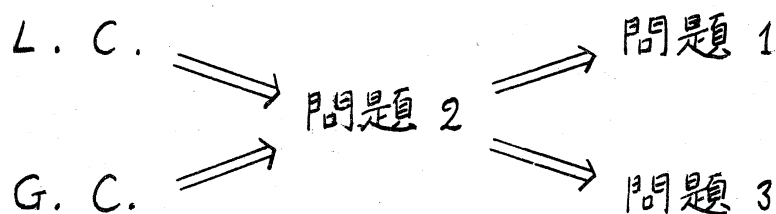
5° k = 総実な有限次代数体の場合には, Leopoldt 予想は次のように述べることができる.

Leopoldt 予想 (L.C.): $K = k_\infty$ (k の basic $\mathbb{Z}_p$ 拡大体) が k 上の唯一つの $\mathbb{Z}_p$ 拡大体である (?)

また, 総実な k に対しては次の予想がある.

Greenberg 予想 (G.C.): K/k が basic $\mathbb{Z}_p$ 拡大を
らば, $\lambda(K/k) = \mu(K/k) = 0$?
($\Leftrightarrow C_K(p) = 0$?)

上に述べた 2 つの予想と問題との間には次のような関係がある (k = 総実有限次代数体).



さらに, 次のことが証明される.

$G.C. \Rightarrow \text{Ker}(\varphi_S) = 0 \quad (\forall S) \Rightarrow C_{K, S_0}(p) = 0,$
 $C_K(p) = C_{K, S_0}(p) \iff \text{問題 3 がすべての } K/k_n$
 に対して肯定的に解ける.

(ここで, k_n は $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k のすべての中間体を表す.)

それゆえ, 次の定理が成り立つ.

定理 3 $k = \text{総実な有限次代数体}$, $K/k = \text{basic}$
 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とするとき,

$G.C.$ 正しい $\iff$

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{Ker}(\varphi_S) = 0 \quad (\forall S). \\ 2) k = k_0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_n \leq \dots \leq K \text{ とする} \\ \text{とき, 問題 3 がすべての } K/k_n \text{ に対して肯定的に} \\ \text{解ける.} \end{array} \right.$$

以上に述べたことからわかるとおり, 問題 2 および問題
 1, 3 は Leopoldt 予想あるいは Greenberg 予想の必要
 条件である. したがって, $L.C.$ あるいは $G.C.$ が正しい
 かどうかを確認めるために (も) 問題 1, 2, 3 を考えること
 は意味があると思われる. (なお, Leopoldt 予想は総実
 な k に対して essential である.)

附記： この講演記録は、藤崎が、岩澤教授の講演の際
とったノートにもとづいて作製したものです。したがって、
思いちがいや誤りは一切藤崎に責任があります。